

## ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ОПОР К КРУГЛЫМ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИМ ПЛАСТИНАМ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ\*

к.ф.-м.н. Романова Т.П.

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск*

Задача оптимального проектирования элементов конструкций, обладающих максимальной несущей способностью, актуальна в настоящее время, особенно для пластин, находящихся под действием нагрузок взрывного типа. Одним из способов повышения несущей способности является оптимальное размещение опор [1]. Для решения динамических задач при таком типе нагрузок широкое распространение получила модель жесткопластического тела. В работе [2] методом предельного равновесия определена предельная нагрузка для круглой пластины постоянной толщины, опертой на  $n$  симметрично расположенных точек. В [3, 4] получено общее решение для динамического изгиба односвязных и двусвязных произвольных криволинейных жесткопластических пластин постоянной толщины, шарнирно опертых по произвольному криволинейному гладкому контуру, расположенному внутри пластины, под действием равномерно распределенной нагрузки. В [5] найдено оптимальное расположение дополнительной внутренней круговой опоры для шарнирно опертой, защемленной и свободной на контуре круглой пластины постоянной толщины под действием начального импульса.

В настоящей работе построена математическая модель кинематически допустимого поведения жесткопластической круглой пластины переменной толщины под действием равномерно распределенной по поверхности нагрузки взрывного типа. Пластина шарнирно оперта по круговому контуру, расположенному внутри области пластины, внешний ее контур свободен. Получены простые аналитические выражения для верхней предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба. Определено оптимальное расположение опоры, при котором пластина имеет наименьшую повреждаемость с точки зрения максимума верхней предельной нагрузки. Решение может быть полезно в различных инженерных расчетах.

**1. Формулировка задачи и вывод определяющих уравнений.** Рассмотрим в полярных координатах  $(R, \varphi)$  круглую пластину из идеального жесткопластического материала, шарнирно опертую по круговому контуру  $L_1$ , расположенному внутри пластины. Внешний контур пластины  $L_2$  свободный (рис. 1). Окружности  $L_1$  и  $L_2$  – концентрические; их радиусы равны  $R_1$  и  $R_2$  ( $0 < R_1 \leq R_2$ ). Толщина пластины  $H$  – функция координаты  $R$ . На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка высокой интенсивности  $P(t)$  взрывного типа, которая достигает максимума  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент  $t = 0$  и затем быстро убывает ( $t$  – текущее время). Прогибы считаются малыми.

Рассмотрим поведение пластины при нагрузках, незначительно превышающих предельные (так называемых “средних” нагрузках). Так же как и для пластин постоянной толщины из жесткопластического материала ([3]) в динамике рассматриваемой пластины переменной толщины возможны несколько схем деформирования в зависимости от расположения контура  $L_1$ . Будем рассматривать случай, когда изменимость значений функции толщины  $H(R)$  небольшая. Тогда считаем, что при всех схемах пластина деформируется только конусообразно. Обозначим область пластины внутри контура  $L_1$  через  $S_1$ , а остальную часть – через  $S_2$ . Скорости прогибов пластины  $\dot{u}$  пред-

ставлены на рис. 2 (где  $u$  – прогиб пластины;  $(\dot{\bullet}) = \partial(\bullet)/\partial t$ ). При схеме 1 (рис. 2,а) пластина вращается вокруг опорного контура  $L_1$ , при этом область  $S_1$  движется вниз в направлении действия нагрузки, область  $S_2$  – вверх.

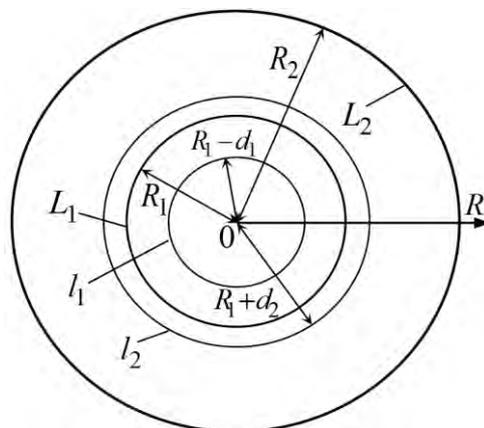


Рис. 1. Круглая пластина, шарнирно опертая по внутреннему круговому контуру

При схеме 2 (рис. 2,б) область  $S_1$  движется вверх, а область  $S_2$  движется вниз. В схемах 3 и 4 на рис. 2,в,г возможно образование дополнительных пластических шарнирных круговых контуров  $l_1$  и  $l_2$ , расположенных на расстоянии  $d_1$  и  $d_2$  от контура  $L_1$  (рис. 1). Области внутри контура  $l_1$  и между контурами  $L_2$  и  $l_2$  независимо друг от друга вращаются вниз вокруг контуров  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

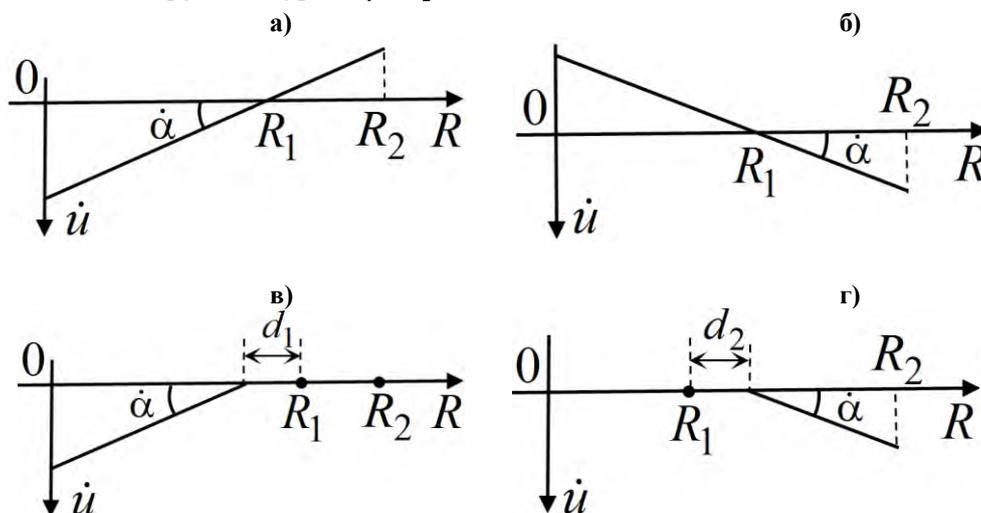


Рис. 2. Скорости прогибов пластины при разных схемах деформирования:  
а – схема 1; б – схема 2; в – схема 3; г – схема 4

Обозначим угол поворота плоскости пластины в направлении действия нагрузки через  $\alpha$ , его скорость  $\dot{\alpha}$  (см. рис. 2). Уравнения движения выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [6]:

$$K = A - N; \quad (1)$$

$$K = \iiint_V \rho_V \dot{u} \dot{u}^* dV; \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds; \quad N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m + \frac{1}{4} \iint_S \sigma_0 H^2 (|\dot{\kappa}_1^*| + |\dot{\kappa}_2^*|) ds. \quad (2)$$

Здесь  $K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$ ,  $V$  – площадь и объем пластины;  $\rho_V$ ,  $\sigma_0$  – плотность (объемная) и предел текучести материала пластины;  $ds$ ,  $dV$  – элемент площади и объема;  $l_m$ ,  $m$  – линии разрыва уг-

ловых скоростей и их количество;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\dot{\theta}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ . Верхним индексом “\*” обозначены допустимые величины;  $\int_{-H/2}^{H/2} dV = H(R)ds$ ;  $ds = RdRd\varphi$ ,  $\kappa_1 \kappa_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины.

Рассмотрим схемы 1, 2. Скорости прогибов для схем 1, 2 имеют вид:

$$\dot{u}(R, \varphi, t) = (-1)^i \dot{\alpha}(t)(R - R_1), \quad (0 \leq R \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где  $i = 1$  для схемы 1 и  $i = 2$  для схемы 2. Кривизны  $\kappa_1 \kappa_2$  равны:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial R^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial R} = (-1)^{i+1} \frac{\dot{\alpha}(t)}{R}. \quad (4)$$

Выражения (2) для мощностей  $K$ ,  $A$  будут равны:

$$K = \rho_V \ddot{\alpha}^* \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} H(R)(R - R_1)^2 RdRd\varphi = 2\pi\rho_V \ddot{\alpha}^* \int_0^{R_2} H(R)(R - R_1)^2 RdR; \quad (5)$$

$$A = (-1)^i \dot{\alpha}^*(t)P(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} (R - R_1) RdRd\varphi = (-1)^i \dot{\alpha}^*(t)P(t) \frac{\pi R_2^2 (2R_2 - 3R_1)}{3}. \quad (6)$$

На контуре  $L_2$  нормальный изгибающий момент  $M_m$  равен нулю. Разрыв угловой скорости на контуре  $L_1$  равен  $[\dot{\theta}]_{L_1} = 0$ . Тогда для  $N$  в (2) с учетом (4) получаем

$$N = \dot{\alpha}^* \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} H^2 dRd\varphi = \dot{\alpha}^* \frac{\pi\sigma_0}{2} \int_0^{R_2} H^2 dR. \quad (7)$$

Подставляя выражения (5) – (7) в (1), получаем уравнения движения для схем 1, 2:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \int_0^{R_2} H(R)(R - R_1)^2 RdR = (-1)^i \frac{P(t)}{6} R_2^2 (2R_2 - 3R_1) - \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{R_2} H^2 dR. \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

Предельную нагрузку  $P_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) для схем 1, 2 определяем из (8) при учете  $\ddot{\alpha} = 0$ :

$$P_{0i} = (-1)^i 3\sigma_0 \int_0^{R_2} H^2(R) dR / [2R_2^2 (2R_2 - 3R_1)]; \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

Предельная нагрузка  $P_{0i}$  должна быть положительной, тогда из (9) следует, что схема 1 реализуется при  $2R_2 - 3R_1 < 0$ , а схема 2 – при условии  $2R_2 - 3R_1 > 0$ , не зависимо от вида функции  $H(R)$ .

При движении по схеме 3 деформируется только часть пластины внутри контура  $l_1$ , при этом поведение пластины и предельная нагрузка не зависят от величины  $R_2$ . Скорости прогибов пластины при схеме 3 определяются как  $\dot{u}(R, \varphi, t) = -\dot{\alpha}(t)(R - R_1 + d_1)$  при  $0 \leq R \leq R_1 - d_1$ . Мощности  $K$ ,  $A$  в (2) равны:

$$K = \rho_V \ddot{\alpha}^* \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1 - d_1} H(R)(R - R_1 + d_1)^2 RdRd\varphi = 2\pi\rho_V \ddot{\alpha}^*(t) \int_0^{R_1 - d_1} H(R)(R - R_1 + d_1)^2 RdR;$$

$$A = \dot{\alpha}^*(t)P(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1 - d_1} (R - R_1 + d_1) RdRd\varphi = \dot{\alpha}^*(t) \frac{P(t)}{3} \pi (R_1 - d_1)^3.$$

При схеме 3 на контуре  $l_1$  нормальный изгибающий момент равен  $\sigma_0 H^2 (R_1 - d_1) / 4$ , а разрыв угловой скорости будет  $[\dot{\theta}]_{l_1} = \dot{\alpha}^*(t)$ , тогда для  $N$  в (2) с учетом (4) имеем:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{2\pi} (R_1 - d_1) H^2 (R_1 - d_1) d\varphi + \dot{\alpha}^* \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1 - d_1} H^2 (R) dRd\varphi = \\ &= \dot{\alpha}^* \frac{\pi\sigma_0}{2} [(R_1 - d_1) H^2 (R_1 - d_1) + \int_0^{R_1 - d_1} H^2 (R) dR]. \end{aligned}$$

Из равенства  $A = N$  следует, что предельная нагрузка  $P_{03}$  для схемы 3 равна:

$$P_{03} = \frac{3}{2} \sigma_0 \min_{0 \leq d_1 < R_1} [(R_1 - d_1)H^2(R_1 - d_1) + \int_0^{R_1 - d_1} H^2(R)dR] / (R_1 - d_1)^3 = \quad (10)$$

$$= \frac{3}{2} \sigma_0 [(R_1 - d_{10})H^2(R_1 - d_{10}) + \int_0^{R_1 - d_{10}} H^2(R)dR] / (R_1 - d_{10})^3.$$

Для невозрастающей функции  $H(R)$  можно показать, что  $\partial P_{03} / \partial d_1 \geq 0$ , следовательно,  $d_{10} = 0$ . Подставляя значения  $K$ ,  $A$ ,  $N$  при  $d_1 = d_{10}$  в (1), получаем уравнение движения для схемы 3:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \int_0^{R_1 - d_{10}} H(R)(R - R_1 + d_{10})^2 R dR = \quad (11)$$

$$= \frac{P(t)}{6} (R_1 - d_{10})^3 - \frac{\sigma_0}{4} [(R_1 - d_{10})H^2(R_1 - d_{10}) + \int_0^{R_1 - d_{10}} H^2(R)dR].$$

При движении по схеме 4 деформируется только часть пластины между контурами  $L_2$  и  $l_2$ . Скорости прогибов при схеме 4 определяются соотношениями  $\dot{u}(R, \varphi, t) = \dot{\alpha}(R - R_1 - d_2)$  при  $R_1 + d_2 \leq R \leq R_2$ . Выражения для  $K$ ,  $A$  в (2) равны:

$$K = \rho_V \ddot{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_{R_1 + d_2}^{R_2} H(R)(R - R_1 - d_2)^2 R dR d\varphi = 2\pi \rho_V \ddot{\alpha}(t) \dot{\alpha}^*(t) \int_{R_1 + d_2}^{R_2} H(R)(R - R_1 - d_2)^2 R dR ;$$

$$A = \dot{\alpha}^*(t) P(t) \int_0^{2\pi} \int_{R_1 + d_2}^{R_2} (R - R_1 - d_2) R dR d\varphi = \dot{\alpha}^*(t) P(t) \frac{\pi}{3} (R_2 - R_1 - d_2)^2 (2R_2 + R_1 + d_2).$$

При схеме 4 на  $l_2$  нормальный изгибающий момент равен  $\sigma_0 H^2(R_1 + d_2)/4$ , а разрыв угловой скорости будет  $[\dot{\theta}]_{l_2} = \dot{\alpha}^*(t)$ , тогда для  $N$  в (2) с учетом (4) имеем:

$$N = \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{2\pi} (R_1 + d_2) H^2(R_1 + d_2) d\varphi + \dot{\alpha}^* \frac{\sigma_0}{4} \int_0^{2\pi} \int_{R_1 + d_2}^{R_2} H^2(R) dR d\varphi =$$

$$= \dot{\alpha}^* \frac{\pi \sigma_0}{2} [(R_1 + d_2) H^2(R_1 + d_2) + \int_{R_1 + d_2}^{R_2} H^2(R) dR].$$

Из равенства  $A = N$  следует, что предельная нагрузка  $P_{04}$  для схемы 4 равна:

$$P_{04} = \frac{3}{2} \sigma_0 \min_{0 \leq d_2 < R_2 - R_1} \frac{(R_1 + d_2) H^2(R_1 + d_2) + \int_{R_1 + d_2}^{R_2} H^2(R) dR}{(R_2 - R_1 - d_2)^2 (2R_2 + R_1 + d_2)} = \quad (12)$$

$$= \frac{3}{2} \sigma_0 [(R_1 + d_{20}) H^2(R_1 + d_{20}) + \int_{R_1 + d_{20}}^{R_2} H^2(R) dR] / [(R_2 - R_1 - d_{20})^2 (2R_2 + R_1 + d_{20})].$$

Для неубывающей функции  $H(R)$  можно показать, что  $\partial P_{04} / \partial d_2 \geq 0$ , тогда  $d_{20} = 0$ . Подставляя  $K$ ,  $A$ ,  $N$  при  $d_2 = d_{20}$  в (1), имеем уравнение движения для схемы 4:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \int_{R_1 + d_{20}}^{R_2} H(R)(R_1 - d_{20})^2 R dR = \frac{P(t)}{6} (R_2 - R_1 - d_{20})^2 (2R_2 + R_1 + d_{20}) - \quad (13)$$

$$- \frac{\sigma_0}{4} [(R_1 + d_{20}) H^2(R_1 + d_{20}) + \int_{R_1 + d_{20}}^{R_2} H^2 dR].$$

Начальные условия для всех схем имеют вид:

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (14)$$

Предельная нагрузка  $P_0$  для пластины определится как

$$P_0 = \min(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}). \quad (15)$$

Номер  $j$ , соответствующий минимальному значению величин  $P_{0j}$ , определяет номер схемы деформирования пластины ( $j = 1-4$ ).

**2. Интегрирование уравнений движения.** Для “средних” нагрузок при  $P_{\max} > P_0$  движение пластины по схемам 1 – 4 определяется уравнениями (7), (8), (10), которые можно записать в виде (где  $j$  – номер схемы):

$$\ddot{\alpha}(t) = G_j [P(t) - P_0], \quad (j = 1-4) \quad (16)$$

$$G_i = (-1)^i R_2^2 (2R_2 - 3R_1) / [6\rho_V \int_0^{R_2} H(R)(R - R_1)^2 R dR] \quad (i = 1, 2);$$

$$G_3 = (R_1 - d_{10})^3 / [6\rho_V \int_0^{R_1 - d_{10}} H(R)(R - R_1 + d_{10})^2 R dR];$$

$$G_4 = (R_2 - R_1 - d_{20})^2 (2R_2 + R_1 + d_{20}) / [6\rho_V \int_{R_1 + d_{20}}^{R_2} H(R)(R - R_1 - d_{20})^2 R dR].$$

Начальные условия имеют вид (11). В момент времени  $t = T$  нагрузка снимается.

При  $0 \leq t \leq T$ , интегрируя уравнение (16), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = G_j \left[ \int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right]; \quad \alpha(t) = G_j \left[ \int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - P_0 \frac{t^2}{2} \right].$$

При  $T < t \leq t_f$  движение пластины происходит по инерции до остановки в момент  $t_f$  и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -G_j P_0 \quad (17)$$

с начальными условиями  $\dot{\alpha}(T)$ ,  $\alpha(T)$ . Момент  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (17), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - G_j P_0 (t - T); \quad \alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - G_j P_0 (t - T)^2 / 2. \quad (19)$$

Из уравнений (18), (19) следует, что момент остановки равен

$$t_f = \left( \int_0^T P(t) dt \right) / P_0. \quad (20)$$

Из (19), (20) для остаточного угла поворота имеем:

$$\alpha(t_f) = G_j \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0) - \int_0^T t P(t) dt.$$

Прогибы пластины определяются из (3) для схем 1, 2; из (3) при  $i = 1$  и  $0 \leq R \leq R_1 - d_{10}$  для схемы 3; из (3) при  $i = 2$  и  $R_1 + d_{20} \leq R \leq R_2$  для схемы 4. Максимальный остаточный прогиб пластины равен ( $j$  – номер схемы):

$$w_{\max} = z_j \alpha(t_f) = z_j G_j \left[ \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 / (2P_0) - \int_0^T t P(t) dt \right] \quad (j = 1-4); \quad (21)$$

$$z_1 = R_1, \quad z_2 = R_2 - R_1, \quad z_3 = R_2 - R_1 + d_{10}, \quad z_4 = R_2 - R_1 - d_{20},$$

где  $z_j$  – расстояние от опоры до точки максимального прогиба при схеме  $j$ .

**3. Вычисление оптимальных опор.** Оптимальной будем считать такую опору, при которой пластина имеет максимальную предельную нагрузку и, следовательно, минимальную повреждаемость. Обозначим радиус окружности оптимальной опоры через  $R_{10}$ .

На рис.3 приведена безразмерная предельная нагрузка  $p_0 = 4P_0 R_2^2 / (\sigma_0 H_0^2)$ , вычисленная по (9), (10), (12), (15) для рассматриваемых пластин переменной толщины в за-

висимости от параметра опоры  $R_1/R_2$ . Линия  $a_1a_2a_3a_4$  изображает  $p_0$  для эталонной пластины толщиной  $H_0$ . В такой пластине схемы 2 нет; на интервале  $a_1a_2$  пластина деформируется по схеме 4, на интервале  $a_2a_3$  – по схеме 3, на интервале  $a_3a_4$  – по схеме 1. Радиус оптимальной опоры, соответствующей максимальной предельной нагрузке, равен  $R_{10} = 0,7R_2$  (в точке  $a_2$ ), при этом  $p_0 = 24,5$ .

Объем эталонной пластины равен  $V_0 = \pi R_2^2 H_0$ . При увеличении объема пластины на величину  $\beta V_0$ , объем новой пластины равен  $(1+\beta)V_0$ . Если эта пластина имеет постоянную толщину, то она равна  $(1+\beta)H_0$ . Для приведенных ниже примеров считалось  $\beta = 0,5$  при разной переменной толщине  $H_k(R)$  ( $k=1-3$ ).

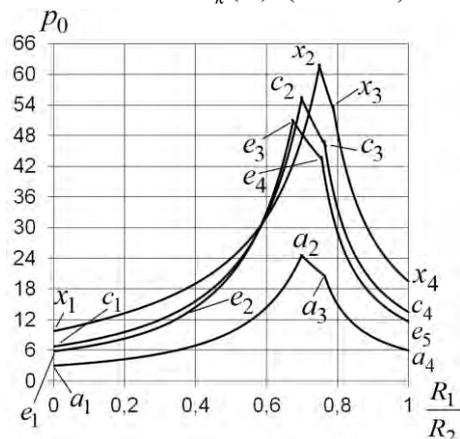


Рис. 3. Безразмерная предельная нагрузка для круглых пластин переменной толщины

На рис. 3 линия  $c_1c_2c_3c_4$  изображает нагрузку  $p_0$  для пластины толщиной  $h_1(r) = 1,5$  ( $h_k = H_k/H_0$ ). На интервале  $c_1c_2$  реализуется схема 4, на интервале  $c_2c_3$  – схема 3, на интервале  $c_3c_4$  – схема 1. Схемы 2 нет. Параметр оптимальной опоры равен  $R_{10} = 0,7R_2$  (в точке  $c_2$ ), в этом случае  $p_0(R_{10}/R_2) = 55,5$ .

Линия  $e_1e_2e_3e_4e_5$  показывает нагрузку  $p_0$  для пластины толщиной  $h_2(r) = 1 + 0,75r$  ( $r = R/R_2$ ). На интервале  $e_1e_2$  реализуется схема 2, на интервале  $e_2e_3$  – схема 4, на интервале  $e_3e_4$  – схема 3, на интервале  $e_4e_5$  – схема 1. Оптимальная опора расположена на окружности с радиусом  $R_{10} = 0,67R_2$  (в точке  $e_3$ ), в этом случае  $p_0(R_{10}/R_2) = 51$ .

Линия  $x_1x_2x_3x_4$  изображает нагрузку  $p_0$  для пластины толщиной  $h_3(r) = 1 - 1,5(r-1)$ . В этом случае схемы 2 нет. На интервале  $x_1x_2$  реализуется схема 4, на интервале  $x_2x_3$  – схема 3, на интервале  $x_3x_4$  – схема 1. Параметр оптимальной опоры равен  $R_{10} = 0,75R_2$  (в точке  $x_2$ ), при этом  $p_0(R_{10}/R_2) = 62$ .

Из приведенных примеров, а также из анализа выражений для определения предельной нагрузки следует, что в случае гладкой функции толщины  $H(R)$  оптимальная опора расположена там, где схема 3 переходит в схему 4, то есть при образовании пластического шарнира на опорном контуре  $R = R_{10}$ . Поэтому, условие оптимальности опоры имеет вид:

$$P_{03} = P_{04} \quad \text{при} \quad d_{10} = d_{20} = 0. \quad (22)$$

С учетом (10), (12) условие (22) приводится к алгебраическому уравнению для определения параметра оптимальной опоры  $R_{10}$ :

$$\frac{R_{10}H^2(R_{10}) + \int_0^{R_{10}} H^2(R)dR}{R_{10}^3} = \frac{R_{10}H^2(R_{10}) + \int_{R_{10}}^{R_2} H^2(R)dR}{(R_2 - R_{10})^2(2R_2 + R_{10})}. \quad (23)$$

В случае постоянной толщины пластины решение уравнения (23) методом деления пополам дает оптимальное значение  $R_{10} = 0,7R_2$ . Такое оптимальное расположение опоры совпадает с оптимальными решениями, полученными для круглой пластины в [5] на основе точного решения при условии пластичности Йогансена, и в [2], когда количество точек опирания стремится к бесконечности.

Таким образом, изменение толщины пластины существенно влияет на ее предельную нагрузку. Однако, если есть возможность управлять размещением опорного контура, то эффект оптимизации превосходит эффекты, получаемые за счет управления только толщиной пластины. Изменяя расположение опорного контура внутри области пластины, можно найти опору, при которой пластина будет наиболее прочной. Максимальный остаточный прогиб  $w_{o,max}$  при оптимальном расположении опоры будет не больше значения  $w_{max}$  в (21).

*\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00102-а).*

## РЕЗЮМЕ

Построено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом изгибе идеальной жесткопластической круглой пластины переменной толщины, шарнирно опертой по внутреннему неподвижному круглому контуру. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка взрывного типа. Получены аналитические выражения для верхней предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба. Определено оптимальное расположение опоры, при котором пластина имеет наибольшую предельную нагрузку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дехтярь, А.С. Оптимальное опирание квадратной пластины / А.С. Дехтярь // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 107-110.
2. Yang, W.H. How to optimally support a plate / W.H. Yang // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1981. V. 48. – PP. 207-209.
3. Немировский, Ю.В. Моделирование предельного и динамического поведения жесткопластической пластины произвольной формы с внутренней криволинейной опорой / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Вест. Чувашского гос. педагог. ун-та. Сер. Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С. 79-88.
4. Немировский, Ю.В. Предельное и динамическое поведение двусвязной жесткопластической пластины произвольной формы с внутренней криволинейной опорой / Ю.В. Немировский, Т.П. Романова // Проблемы прочности и пластичности – 2014. – Вып. 76 (2). – С. 122-133.
5. Оленев, Г.М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жесткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения / Г.М. Оленев // Уч. зап. Тартуского гос. ун-та. – 1983. – Вып. 659. – С. 30-41.
6. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций / М.И. Ерхов. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

## SUMMARY

*The general solution is obtained for the problem of limit behavior and dynamic bending of ideal rigid-plastic circular plate of variable thickness, hinge supported on immobile inner circular contour. The plate is subjected to short-term dynamic load of explosive type, uniformly distributed over the surface. Analytical expressions are obtained for upper limit load and maximum final deflection. The optimal location of support contour is determined in which the plate has maximum limit load.*

**E-mail:** [lab4nemir@gmail.com](mailto:lab4nemir@gmail.com)  
[nemirov@itam.nsc.ru](mailto:nemirov@itam.nsc.ru)

Поступила в редакцию 02.12.2013