

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ МНОГОСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ВНЕДРЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ*

д.ф.-м.н. Михасев Г.И., к.ф.-м.н. Ботогова М.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Использование многостенных углеродных нанотрубок (МУНТ) в качестве наполнителей при создании высокопрочных композиционных материалов [1, 2] делает актуальной задачу об исследовании их механических свойств с учетом реакции окружающей упругой среды. Достоверная оценка критических нагрузок [3-4], приводящих к бифуркации МУНТ, является важной информацией при проектировании композиционных материалов с заданными прочностными характеристиками. При решении подобных задач широкое распространение получили подходы, основанные на континуальном моделировании МУНТ с использованием теории тонких оболочек [5-9]. Как правило, в упомянутых и многих других работах, рассматриваются двухстенные, либо трехстенные нанотрубки, а упругая матрица, в которую внедрена МУНТ, моделируется винклеровским, либо пастернаковским основанием [10, 11].

Целью данной работы является вывод простых асимптотических оценок для критического радиального давления, приводящего к потере устойчивости МУНТ средней длины с внутренним радиусом $R_1 \geq 0.94$ нм и аспектным числом $\gamma = L / 2R_N \sim \pi / 2$, где L - длина нанотрубки, а R_N - радиус внешней стенки.

Континуальная модель МУНТ. При континуальном моделировании углеродной нанотрубки (УНТ), как правило, рассматриваются два главных параметра, характеризующих ее механические свойства, – цилиндрическая жесткость $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$ и жесткость на растяжение $K = Eh$, которые должны совпадать с данными молекулярного моделирования [12]: $D = 1.362 \times 10^{-19}$ Дж, $K = 360$ Дж/м². Если в основу модели МУНТ положена теория тонких изотропных оболочек, то часто возникает проблема выбора эффективной толщины h , влекущая за собой задачу определения соответствующих эффективных значений модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Выбор эффективной толщины зависит от характера нагружения трубки и ожидаемого числа волн (вмятин) на поверхности оболочки, моделирующей УНТ. Если рассматривается осевое растяжение или сжатие, либо радиальное обжатие, не влекущие потерю устойчивости УНТ, то определяющим является параметр K , при этом задача выбора эффективной толщины не ставится. Если же деформирование трубки сопровождается большим числом вмятин, то определяющими являются оба параметра, K и D . В этом случае принимаются следующие значения [13]: $h = 0.066$ нм, $E = 5.5$ ТПа, $\nu = 0.19$. Заметим, что погрешность модели УНТ, представленной тонкой изотропной оболочкой, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, имеет порядок [8, 14] $\sim \max\{a/R, h/R\}$, где $a = 0.142$ нм – межатомное расстояние в УНТ, а R – радиус трубки.

Многостенную углеродную нанотрубку будем моделировать как систему N концентрически вложенных тонких изотропных цилиндрических оболочек толщиной h , длиной L и с радиусами R_1, R_2, \dots, R_N . Пусть $R_1 \geq 0.94$ и $\gamma = L / 2R_N \sim \pi / 2$. Упругие свойства каждой трубки описываются модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Считаем, что МУНТ предварительно напряжена мембранными силами.

Известно, что устойчивость тонких цилиндрических оболочек средней длины хорошо описывается уравнениями Муштари-Доннела-Власова [15]:

$$D\Delta\Delta W - \Delta_T W + \Delta_R \Phi + c_f W = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi - \Delta_R W = 0.$$

Здесь W – нормальное перемещение точек срединной поверхности, Φ – функция напряжения, а операторы Δ , Δ_R , Δ_T имеют вид

$$\Delta W = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \right], \quad \Delta_R W = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A}{RB} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (2)$$

$$\Delta_T W = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{BT_1^0}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{AT_2^0}{B} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S^0 \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(S^0 \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right],$$

где R – срединный радиус цилиндрической поверхности, x , φ – безразмерные осевые и окружные координаты соответственно, A , B – коэффициенты Ламе для поверхности, такие что первая квадратичная форма имеет вид $I = A^2 dx^2 + B^2 d\varphi^2$. Для цилиндрической поверхности радиуса R параметры $A=B=R$.

Применяя систему уравнений (1) к каждой трубке, учитывая силы Ван-дер-Ваальса и коэффициент постели упругого основания для среды, в которую внедрена трубка, можем записать для первой нанотрубки

$$D\Delta_1^2 W - \Delta_{T1} W_1 + \Delta_{R1} \Phi_1 - p_{12} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta_1^2 \Phi_1 - \Delta_{R1} W_1 = 0,$$

для j -й трубки $j=2, \dots, (N-1)$,

$$D\Delta_j^2 W_j - \Delta_{Tj} W_j + \Delta_{Rj} \Phi_j - p_{j(j+1)} + \frac{R_{j-1}}{R_j} p_{(j-1)j} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta_j^2 \Phi_j - \Delta_{Rj} W_j = 0,$$

и для N -ой трубки,

$$D\Delta_N^2 W_N - \Delta_{TN} W_N + \Delta_{RN} \Phi_N - p_N + \frac{R_{N-1}}{R_N} p_{(N-1)N} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta_N^2 \Phi_N - \Delta_{RN} W_N = 0.$$

Здесь операторы Δ_i , Δ_{Ri} , Δ_{Ti} определяются уравнениями (2), $A_i = R$, $B_i = Rr_i$, $r_i = R_i / R$. В уравнениях (3)-(4)

$$p_{j(j+1)} = c^* (W_{j+1} - W_j), j=1, 2, \dots, (N-1), \quad (6)$$

$$p_N = -c_f^* W_N,$$

где $c^* = 620 \times 10^{-10}$ Н/нм³ – коэффициент Ван-дер-Ваальсовых сил, c_f^* – коэффициент постели винклеровского основания упругой среды, в которой лежит трубка.

Существует 16 возможных вариантов граничных условий, которые можно разбить на четыре группы [15]: группа заделки, группа шарнирного опирание, группа слабого закрепления, группа свободного края. В данной статье рассмотрим только группу шарнирного опирания, для которой

$$W_i = \Phi_i = 0 \text{ при } x=0, l=L/R. \quad (7)$$

Значения начальных усилий T_{i1}^0 , T_{i2}^0 , S_i^0 можно найти из уравнений безмоментной теории оболочек. Будем считать, что радиальное давление q_N^* и коэффициент по-

стели винклеровского основания c_f^* не зависят от координат s и φ и начальное напряженное состояние осесимметрично. Тогда уравнения безмоментной теории оболочек для каждой пары трубок можно записать в виде:

$$\frac{dT_{i1}^\circ}{dx} = 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\frac{T_{i2}^\circ}{R_i} = -c^*(W_2^\circ - W_1^\circ),$$

$$\frac{T_{j2}^\circ}{R_j} = -c^*(W_{j+1}^\circ - W_j^\circ) + \frac{R_{j-1}}{R_j} c^*(W_j^\circ - W_{j-1}^\circ), \dots, \quad (9)$$

$$\frac{T_{N2}^\circ}{R_N} = \frac{R_{N-1}}{R_N} c^*(W_N^\circ - W_{N-1}^\circ) + c_f^* W_N^\circ - P^*.$$

Определяющие уравнения для усилий следующие [15]:

$$T_{i1}^\circ = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R} \frac{dU_i^\circ}{dx} - \frac{\nu W_i^\circ}{R_i} \right), \quad T_{i2}^\circ = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{R} \frac{dU_i^\circ}{dx} - \frac{W_i^\circ}{R_i} \right). \quad (10)$$

Из формул (8)-(10) можно получить формулы для определения T_{i2}° . В частности для однослойной нанотрубки

$$T_{12}^\circ = -\frac{RP^*}{1+c_f}, \quad (11)$$

для двуслойной нанотрубки

$$T_{12}^\circ = -\frac{RP^* c_1}{c_1 + (1+c_f)(1+c_1^2)}, \quad T_{22}^\circ = -\frac{RP^*(1+c_1^2)}{c_1 + (1+c_f)(1+c_1^2)}, \quad (12)$$

где $c = \frac{c^* R^2}{Eh}$, $c_f = \frac{c_f^* R^2}{Eh}$. В данном случае остальные мембранные усилия равны нулю.

Можно заметить, что при $c_f = 0$ усилия удовлетворяют следующему уравнению

$$\sum_{i=1}^N T_{i2}^\circ = -RP^*. \quad (13)$$

Моделируя дискретную МУНТ, будем предполагать, что расстояние между стенками составляет 0.34 нм.

Метод решения. Введем безразмерный параметр

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad (14)$$

где $R = R_N$. Для принятых геометрических размеров МУНТ, данный параметр можно рассматривать как малый. Значение безразмерного параметра c зависит от внешнего радиуса R . Сравнивая его с параметром ε , мы полагаем что $c = \varepsilon^\beta \kappa$, где $\kappa \sim 1$.

Можно выделить следующие четыре случая:

- (I) $\beta = 3$ for $R \approx 1.28$ нм, $N \leq 2$,
- (II) $\beta = 2$ for 1.28 нм $\leq R \leq 1.90$ нм, $N \leq 4$,
- (III) $\beta = 1$ for 1.90 нм $\leq R \leq 3.00$ нм, $N \leq 8$,
- (IV) $\beta = 0$ for $R \geq 3.00$ нм.

Для каждого случая существует ограничение для количества стенок нанотрубки, которое зависит от внутреннего радиуса. Например, если $R_1 = 0.94$ нм, то для случая

(1) мы можем рассмотреть лишь двуслойную трубку, а для случая (3) максимальное количество стенок - 8.

Введем следующие безразмерные величины:

$$W_i = R\varepsilon^{-4}w_i, \quad \Phi_i = R^2EhF_i, \quad T_{i2}^0 = -\lambda\varepsilon^6Ehf_i, \quad k_f = \frac{R^2c_f^*}{Eh\varepsilon^4}. \quad (15)$$

Предположим, что

$$w_j - w_{j-1} = \varepsilon^{4-\tau}u_{j(j+1)}, \quad w_i \sim 1, \quad j=1, 2, \dots, (N-1), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

где $u_{j(j+1)} \sim 1$ для $j=1, 2, \dots, (N-1)$, и параметр τ принимает целое значение 3, 2, 1, 0 для случая 1, 2, 3, 4 соответственно. Здесь функция w_N рассматривается как безразмерное перемещение МУНТ в радиальном направлении, а $\varepsilon^{4-\tau}u_{j(j+1)}$ - перемещение j стенки по отношению к $j-1$.

В уравнении (15) параметр λ связан с радиальным давлением P^* соотношением

$$P^* = -\varepsilon^6EhR^{-1}\lambda, \quad \lambda \sim 1. \quad (17)$$

Известно, что изгиб радиально сжатой средней длины тонкой цилиндрической оболочки происходит с образованием большого числа волн в окружном направлении, так что $\pi n \sim \varepsilon^{-1}$. Следовательно, мы можем представить неизвестные функции $w(x, \varphi)$, $u_{j(j+1)}(x, \varphi)$ в следующей форме:

$$w = Y(x)\sin(\varepsilon^{-1}q\varphi), \quad F_i = G_i(x)\sin(\varepsilon^{-1}q\varphi), \quad i=1, \dots, N, \quad (18)$$

$$u_{j(j+1)}(x, \varphi) = Z_j(x)\sin(\varepsilon^{-1}q\varphi), \quad j=1, \dots, N-1.$$

С учетом (18), уравнения (3)-(5) могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\left(\varepsilon^4 d_1^2 - \lambda \frac{q^2 f_1}{r_1^2} \right) \left(Y - \varepsilon \sum_{k=1}^{N-1} Z_k \right) + \frac{1}{r_1} \frac{d^2 G_1}{dx^2} - \kappa Z_1 = 0, \dots,$$

$$\left(\varepsilon^4 d_j^2 - \lambda \frac{q^2 f_j}{r_j^2} \right) \left(Y - \varepsilon \sum_{k=j}^{N-1} Z_k \right) + \frac{1}{r_j} \frac{d^2 G_j}{dx^2} - \kappa Z_j + \frac{r_{j-1}}{r_j} \kappa Z_{j-1} = 0, \dots, j=2, \dots, N-1 \quad (19)$$

$$\left(\varepsilon^4 d_N^2 - \lambda \frac{q^2 f_N}{r_N^2} \right) Y + \frac{1}{r_N} \frac{d^2 G_N}{dx^2} + \frac{r_{N-1}}{r_N} \kappa Z_{N-1} + c_f Y = 0,$$

$$\varepsilon^4 d_i^2 G_i - \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dx^2} \left(Y - \varepsilon \sum_{k=i}^{N-1} Z_k \right) = 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (20)$$

где дифференциальный оператор d_i определяется следующим образом:

$$d_i = \varepsilon^{-2}q^2 + \frac{1}{r_i^2} \frac{d^2}{dx^2}. \quad (21)$$

Решение уравнений (19)-(20) можно представить в виде суммы рядов следующего вида

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \quad G_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k g_{ik}(x), \quad Z_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_{ik}(x), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \quad (22)$$

Чтобы определить неизвестные функции $y_k(x)$, $g_{ik}(x)$, $z_{ik}(x)$, λ_i подставляем (22) в систему (19)-(20) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε^k .

Граничные условия для группы шарнирного опирания будут иметь вид:

$$y_k = \frac{d^2 y_k}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad l=L/R. \quad (23)$$

В нулевом приближении ($k=0$) из уравнения (20) следует

$$g_{i0} = \frac{r_i^3}{q^4} \frac{d^2 y_0}{dx^2}. \quad (24)$$

Из системы (19) при $k=0$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{r_1^2} \left(\frac{q^2}{r_1^2} - \lambda_0 f_1 \right) y_0 + \frac{1}{r_1} \frac{d^2 g_{10}}{dx^2} - \kappa z_{10} &= 0, \dots, \\ \frac{q^2}{r_j^2} \left(\frac{q^2}{r_j^2} - \lambda_0 f_j \right) y_0 + \frac{1}{r_j} \frac{d^2 g_{j0}}{dx^2} - \kappa z_{j0} + \frac{r_{j-1}}{r_j} \kappa z_{(j-1)0} &= 0, \dots, \\ \frac{q^2}{r_N^2} \left(\frac{q^2}{r_N^2} - \lambda_0 f_N \right) y_0 + \frac{1}{r_N} \frac{d^2 g_{N0}}{dx^2} + \frac{r_{N-1}}{r_N} \kappa z_{(N-1)0} + k_f y_0 &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $j=2, \dots, N-1$.

Умножая i -ое уравнения (25) на r_i с учетом формулы (24), а затем складывая преобразованные уравнения, получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции $y_0(x)$:

$$L_0 y_0 \equiv q^{-4} \sum_{i=1}^N r_i^3 \frac{d^4 y_0}{dx^4} + \left(q^4 \sum_{i=1}^N r_i^{-3} - \lambda_0 q^2 \sum_{i=1}^N f_i r_i^{-1} + k_f r_N \right) y_0 = 0. \quad (26)$$

В случае шарнирного опирания собственные функции и собственные значения соответственно имеют следующий вид:

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \quad y_0 = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (27)$$

Тогда из формулы (26) с учетом (27) получим λ_0

$$\lambda_0 = \lambda_0^{(n)}(q) = \frac{1}{\delta_{-1}} \left(q^2 \delta_{-3} + \frac{\alpha_n^4}{q^6} \delta_3 + \frac{k_f}{q^2} \right), \quad (28)$$

$$\text{где } \delta_{-1} = \sum_{i=1}^N f_i r_i^{-1}, \quad \delta_{-3} = \sum_{i=1}^N r_i^{-3}, \quad \delta_3 = \sum_{i=1}^N r_i^3. \quad (29)$$

Критическое давление соответствует наименьшему значению

$$\lambda_0^* = \min_q \lambda_0^{(1)}(q) = \lambda_0^{(1)}(q_*), \quad (30)$$

$$q_* = \left[\frac{k_f + \sqrt{k_f^2 + 12\alpha_1^4 \delta_{-3} \delta_3}}{2\delta_{-3}} \right]^{1/4}. \quad (31)$$

Рассмотрим первое приближение ($k=1$). Из уравнений (20), получаем

$$g_{i1} = \frac{r_i^3}{q_*^4} \frac{d^2 y_1}{dx^2} - \frac{r_i^3}{q_*^4} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{\zeta=i}^{N-1} z_{\zeta 0}, \quad (32)$$

а уравнения (19) дают следующую систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{q_*^2}{r_1^2} \left(\frac{q_*^2}{r_1^2} - \lambda_0 f_1 \right) y_1 + \frac{1}{r_1} \frac{d^2 g_{11}}{dx^2} - \kappa z_{11} &= \frac{q_*^2}{r_1^2} \left(\frac{q_*^2}{r_1^2} - \lambda_0^* f_1 \right) \sum_{\zeta=1}^{N-1} z_{\zeta 0} + \lambda_1 \frac{q_*^2}{r_1^2} f_1 \chi_1, \dots, \\ \frac{q_*^2}{r_j^2} \left(\frac{q_*^2}{r_j^2} - \lambda_0 f_j \right) y_1 + \frac{1}{r_j} \frac{d^2 g_{j1}}{dx^2} - \kappa z_{j1} + \frac{r_{j-1}}{r_j} \kappa z_{(j-1)1} &= \frac{q_*^2}{r_1^2} \left(\frac{q_*^2}{r_1^2} - \lambda_0^* f_j \right) \sum_{\zeta=1}^{N-1} z_{\zeta 0} + \lambda_1 \frac{q_*^2}{r_j^2} f_j \chi_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{q_*^2}{r_N^2} \left(\frac{q_*^2}{r_N^2} - \lambda_0 f_N \right) y_1 + \frac{1}{r_N} \frac{d^2 g_{N1}}{dx^2} + \frac{r_{N-1}}{r_N} \kappa z_{(N-1)1} + k_f y_1 = \lambda_1 \frac{q_*^2}{r_N^2} f_1 \chi_N, j=2, \dots, N-1.$$

Как и в нулевом приближении, мы умножаем каждое i -ое уравнение (33) на r_i и суммируем. В результате получаем неоднородное уравнение

$$L_0 y_1 = L_1 \chi_1, \quad (34)$$

где оператор L_1 определяется как

$$L_1 = \sum_{i=1}^N (\varsigma_i r_i^{-2} q_*^4 + \lambda_0^* q_*^2 f_i \varsigma_i + \alpha_1^4 q_*^{-4} r_i^2 \varsigma_i + \lambda_1 q_*^2 f_i r_i^{-1}), \quad \varsigma_j = \frac{1}{r_j} (\xi_j + \dots + \xi_N). \quad (35)$$

Неоднородное уравнение (34) с однородными граничными условиями для y_1 – это неоднородная граничная задача на спектре. Условие существования решения этой задачи приводит к значению для λ_1

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (\varsigma_i r_i^{-2} q_*^4 + \lambda_0^* q_*^2 f_i \varsigma_i + \alpha_1^4 q_*^{-4} r_i^2 \varsigma_i)}{q_*^2 \sum_{i=1}^N f_i r_i^{-1}}. \quad (36)$$

Чтобы определить параметры λ_k нужно рассмотреть соответствующие системы неоднородных уравнений для k -ой аппроксимации.

Выражение для определения сжимающего параметра λ дается формулой

$$\lambda = \lambda_0^* [1 + \varepsilon \Xi + O(\varepsilon^2)], \quad (37)$$

где

$$\Xi = \lambda_1 / \lambda_0^*. \quad (38)$$

Табл. 1. Параметры q_* , λ_0^* , Ξ , и критическое давление P^* для N -стенной нанотрубки при различных значениях коэффициента постели k_j

N	q_*	λ_0^*	Ξ	P^* ГПа
$k_j=0$				
1	0.830	0.918	0	0.486
2	0.739	2.435	-0.14	1.263
3	0.632	6.632	-3.731	2.818
$k_j=0.2$				
1	0.874	1.433	0.079	0.773
2	0.757	3.244	-0.168	1.686
3	0.639	8.306	-4.493	3.563
$k_j=0.4$				
1	1	2.242	0.242	1.232
2	0.775	4.147	-0.227	2.154
3	0.647	10.124	-5.355	4.365

В таблице 1 проведены результаты расчета параметров q_* , λ_0^* , Ξ , P^* для одностенной, двухстенной и трехстенной углеродных нанотрубок, имеющих безразмерную длину $l=L/R_N=6$ и внешний радиус $R_N = 1.28$ нм, при различных коэффициентах по-

стели винклеровского основания. Можно заметить, что с возрастанием количества стенок трубки волновой параметр q_* уменьшается, а значения λ_0^* , критического усилия P^* возрастают. Поправка первого приближения Ξ также увеличивается по модулю с увеличением количества стенок.

На рисунке 1 показана зависимость критической силы, приводящей к потере устойчивости двустенной нанотрубки, от коэффициента постели и безразмерной длины трубки. Как видно, возрастание жесткости среды, в которую внедрена трубка, приводит к увеличению значения критического радиального давления, и наоборот, рост длины трубки снижает величину критического давления.

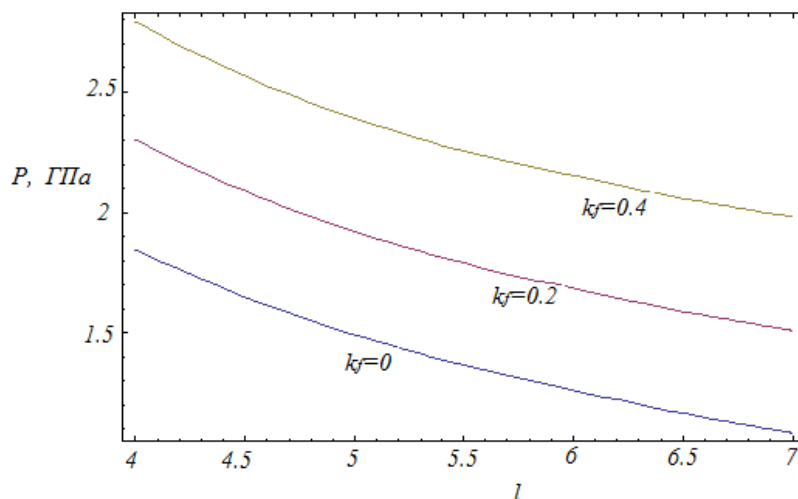


Рис. 1. Зависимость критического давления, приводящего к потере устойчивости двустенной нанотрубки, от коэффициента постели и безразмерной длины трубки

* Работа выполнена в рамках задания № 2.2.02 ГПНИ «Функциональные и композиционные материалы, наноматериалы» в Республике Беларусь на 2013-2015гг.

РЕЗЮМЕ

Исследуется потеря устойчивости многостенной углеродной нанотрубки средней длины под действием внешнего радиального давления. Трубка моделируется системой концентрически вложенных тонких изотропных цилиндрических оболочек. В качестве исходных используются модифицированные уравнения Муштари-Доннела-Власова, учитывающие ван-дер-Ваальсовы силы взаимодействия соседних стенок трубки. С использованием асимптотического метода получены нулевое и первое приближения для критического давления. Исследовано влияние коэффициента постели окружающей упругой среды, а также длины трубки на критическое бифуркационное давление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bakshi, S.R. Carbon nanotube reinforced metal matrix composites – a review/ S.R. Bakshi, D. Lahiri and A. Agarwal // Int. Mater. Rev. - 2010. - Vol. 55 (1). - P. 41–64.
2. Bower, C. Deformation of carbon nanotubes in nanotube-polymer composites/ C. Bower, R. Rosen, L. Jin, J. Han and O. Zhou // Appl. Phys.Lett. – 1999. - Vol. 74(22). - P. 3317–3319.
3. Tang, D.S. The electrical behavior of carbon nanotubes under high pressure / D.S. Tang, Z.X. Bao, L.J. Wang, L.C. Chen, L.F. Sun, Z.Q. Liu, W.Y. Zhou, S.S. Xie // J.Phys. Chem. Solids. – 2000.- Vol. 61. – P. 1175-1185.
4. Buehler, M.J. Deformation Mechanisms of Very Long Single-Wall Carbon Nanotubes Subject to Compressive Loading/ M.J. Buehler, Y. Kong and H. Gao// J. Eng. Mater. Technol. – 2004. - Vol. 126 (3). - P. 245–249.

5. Ru, C.Q. Axially compressed buckling of a doublewalled carbon nanotube embedded in an elastic medium / C.Q. Ru // J. Mech. Phys. Solids. – 2001 – Vol. 49. –P. 1265--1279.
6. Ru, C.Q. Degraded axial buckling strain of multiwalled carbon nanotubes due to interlayer slips / C.Q. Ru // J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 89. – P. 3426--3433.
7. Wang, C.Y. The effect of dimensional factors on buckling of multiwall carbon nanotubes / C.Y. Wang, A. Mioduchowski // J. Appl. Phys.- 2007. –Vol. 101. –P. 14306--14312 .
8. Михасев, Г.И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек/ Г.И. Михасев// Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55 (6) - С. 119-123.
9. Михасев, Г.И. Бифуркация многослойной углеродной нанотрубки, лежащей в упругой матрице, при осевом сжатии/ Г.И. Михасев, М.Г. Ботогова, А.В. Бальцевич// Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический журнал. – Мн.: БНТУ – 2012, вып. 27. – С.149–154.
10. Yoon, J. Vibration of an embedded multiwalled carbon nanotube / J. Yoon, C. Q. Ru, A. Mioduchowski // Compos. Sci. Technol. -2003. –Vol. 63. – P. 1533–1542.
11. Mikhasev, G. On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium / G. Mikhasev // Z. Angew. Math. Mech. – 2014. – Vol. 94, No. 1-2. –P. 130-141.
12. Yakobson, B.I. Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response / B.I. Yakobson, C.J. Brabec, J. Bernholc // Physical Review Letters. -1996 – Vol. 76(14). – P. 2511–2514.
13. Strozzi, M. Low-frequency linear vibrations of single-walled carbon nanotubes: Analytical and numerical models/ M. Strozzi, L. Manevitch, F. Pellicano, V. V. Smirnov, D. S. Shepelev // Journal of Sound and Vibration. – 2014. –Vol. 333. –P. 2936–2957.
14. Peng, J. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell? / J. Peng, J. Wu, K.C. Hwang, J. Song, Y. Huang // J. Mech. Phys. Solids. -2008.-Vol. 56. –P. , 2213–2224.
15. Tovstik, P.E. Asymptotic Methods in the Buckling Theory of Elastic Shells/ P.E. Tovstik, A.L. Smirnov.- World Scientific, Singapore, 2001-347p.

SUMMARY

Buckling of a medium-length multi-walled carbon nanotube under external radial pressure is studied on the base of a multiple-shell model. The tube is modeled by a system of concentrically nested thin elastic isotropic cylindrical shells. The modified Mushtari-Donell-Vlasov type equations, taking into account the van der Waals' (vdW) interaction forces between adjacent walls of the tube, are used as the governing ones. Using the asymptotic method, the zero- and first-order approximations for the critical buckling pressure were obtained. The influence of the coefficient of soil reaction of a surrounding elastic medium and the tube length on the critical buckling pressure was studied.

E-mail: mikhasev@bsu.by
botogova@tut.by

Поступила в редакцию 15.10.2015