

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПЛАСТИН ИНДУЦИРОВАННЫЕ БЕЛЫМ ШУМОМ

к.ф.-м.н. <sup>1</sup>Крылова Е.Ю., к.ф.-м.н. <sup>2</sup>Папкова И.В., маг. <sup>2</sup>Кружилин В.С.,  
д.т.н. <sup>2</sup>Крысько В.А.

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет  
им. Гагарина Ю.А., Саратов

Гибкие пластины являются составными элементами ответственных конструкций, которым приходится работать в средах с переменными во времени свойствами (случайные ударные воздействия, звуковое давление). Поэтому возникает необходимость комплексного исследования влияния внешних шумов на поведение таких систем и установления множества параметров воздействия, которые будут характеризовать безопасные и опасные режимы. В таких областях как физика, химия, биология, уже показано, что случайные воздействия играют весьма существенную роль в поведении динамических систем [1]. Внешние шумы способны приводить не только к флуктуациям в характеристиках динамических систем, но и вызывать качественную перестройку их режимов. Несмотря на большой интерес ученых к индуцированным шумам переходам в известной нам литературе не освещен вопрос влияния шумовых полей на хаотические колебания гибких пластин.

В данной работе рассматривается математическая модель колебаний гибкой прямоугольной в плане пластины с постоянной жесткостью и плотностью под действием знакопеременной продольной нагрузки, действующей по ее периметру. Система рассматривается в поле белого шума, нормального к поверхности пластины. Материал пластины изотропный и однородный. Математическая модель колебаний пластины основывается на гипотезах Кирхгофа-Лява, считается моделью первого приближения, но является достаточно точной для возможности ее анализа, геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана.

В прямоугольной системе координат трехмерная область имеет вид:  $\Omega = \{x_1, x_2, x_3 \mid (x_1, x_2) \in [0; a] \times [0; b], x_3 \in [-\delta; \delta]\}$  (рис. 1).

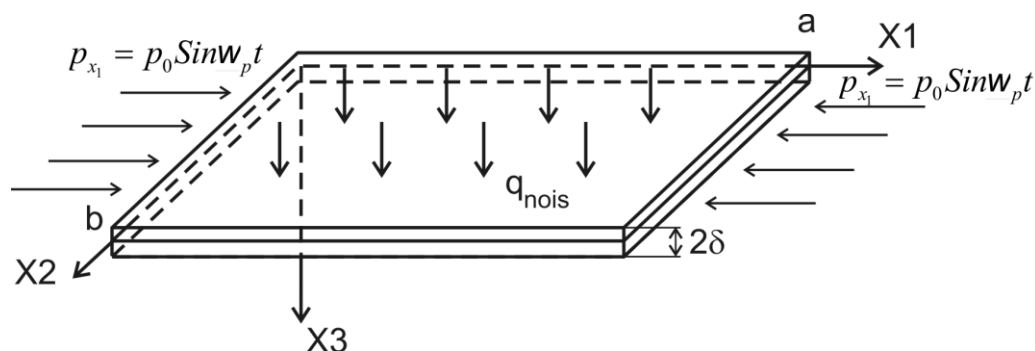


Рис. 1. Схема приложения нагрузки и шумового поля к пластине

Математическая модель колебаний пластины описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, записанных в безразмерном виде [2]:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}(\nabla_{\lambda}^4 w) - L(w, F) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q_{nois} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla_{\lambda}^4 F + \frac{1}{2}L(w, w) = 0$$

где  $L(w, F)$ ,  $L(w, w)$  - известные нелинейные операторы,  $\nabla_{\lambda}^4 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ ,  $w$  и  $F$  - функция прогиба и усилия соответственно,  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $\gamma$  - удельный вес материала пластины,  $E$  - модуль Юнга материала пластины,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\lambda = a/b$ , где  $a, b$  - размеры пластины в плане по  $x_1$  и по  $x_2$  соответственно. Система (1) приведена к безразмерному виду с использованием следующих безразмерных параметров  $x_1 = a\bar{x}_1$ ,  $x_2 = b\bar{x}_2$  - безразмерные параметры пластины по  $x_1$  и по  $x_2$  соответственно;  $w = 2\delta\bar{w}$ ;  $F = E(2\delta)^3\bar{F}$ ;  $t = t_0\bar{t}$  - время,  $t_0 = \frac{a}{K}$ ,  $K = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ ;  $\varepsilon = (2\delta)\bar{\varepsilon}$  - коэффициент демпфирования среды;  $q_{nois}$  - внешний белый шум. Черточка над безразмерными параметрами в первом уравнении (1) для простоты опущена. К уравнениям (1) присоединяются граничные и начальные условия в зависимости от типа нагружения и закрепления пластины.

### Методы решения

Система (1) с учетом граничных и начальных условий сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) методом конечных разностей с аппроксимацией  $O(c^2)$  по пространственным переменным. Первое уравнение нелинейной СОДУ по времени решается методом Рунге-Кутты 4-ого порядка относительно функции прогиба. Выбор метода обоснован в статье [3]. Далее значения функции прогиба подставляется в правую часть второго уравнения системы. Второе уравнение системы (1) становится линейным и решается методом обратной матрицы относительно функции усилия на каждом шаге по времени. Число разбиений в методе конечных разностей  $n \times n = 14 \times 14$ . Выбор количества разбиений МКР и обоснование достоверности получаемых результатов приведены в работе [4].

Сигналы, получаемые в результате численных экспериментов при исследовании динамики распределенных механических систем, имеют амплитудно-временное представление. Но для глубокого понимания поведения динамических систем под действием той или иной нагрузки, для выявления причин того или иного явления необходима информация, скрытая в частотной области сигнала. Долгое время для изучения частотного наполнения сигналов использовалось преобразование Фурье, однако выяснилось, что этот аппарат хорошо подходит только для анализа стационарных сигналов, то есть таких, частотное наполнение которых не меняется с течением времени. Получаемые в результате исследований динамики нелинейных пластин сигналы зачастую имеют сложную структуру по временной оси. Для и оценки характера колебаний рассматриваемой системы в работе применялся аппарат вейвлет преобразований. Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье, которая дает более глубокую технику обработки сигнала. Основным преимуществом

вейвлет – анализа является возможность отследить локализованные особенности сигнала. В коэффициентах Фурье, напротив, отражается поведение сигнала на всем временном интервале. Если с помощью Фурье – анализа рассматривать сигнал, характеристики которого существенно меняются с течением времени, то на выходе мы будем иметь как бы «сумму всех его поведений», наложенных друг на друга. Вейвлет сектор сигнала, в свою очередь, серьезно зависит от материнского вейвлета, на основании которого он строится. В работе [5] приведено обоснование выбора в качестве материнского, вейвлета Gauss32, который дает лучшую локализацию по частоте по сравнению с ранее используемым вейвлетом Morlet. Вейвлеты семейства Гаусса конструируются на основании  $n$ -ой производной функции Гаусса. При  $n=8$ , спектры, построенные на основе вейвлета Гаусса практически идентичны спектрам построенным с использованием вейвлета Морле. С ростом порядка производной вейвлеты Гаусса дают лучшую локализацию по оси частот, чем вейвлет Морле.

### Численный эксперимент

Численные эксперименты, проведенные в работе, направлены на изучение влияния интенсивности внешнего шумового поля, на характер колебаний рассматриваемой динамической системы. Продольная нагрузка задавалась в виде  $p_{x_1} = p_0 \sin \omega_p t$ , где  $\omega_p$ ,  $p_0$  – частота и амплитуда внешнего воздействия соответственно, колебания рассматривались на временном интервале  $t \in [0, 286]$ , коэффициент диссипации среды  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 0.3$ , частота продольной нагрузки взята в окрестности частоты собственных линейных колебаний пластины  $\omega_p = 6.4$ ,  $\lambda = 2$ . К системе (1) присоединялись неоднородные граничные условия опирания на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) ребра [6]:

$$\begin{aligned} w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0; F = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1 = 0; 1, \\ w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0; F = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = p_{x_1} \text{ при } x_2 = 0; 1 \end{aligned} \quad (2)$$

и нулевые начальные условия

$$w(x_1, x_2) |_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Аддитивный шум добавлен в систему в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью  $q_{oisn} = q_{n0} (2.0 * \text{rand}() / (\text{RAND\_MAX} + 1.0) - 1.0)$ , где  $q_{n0}$  - интенсивность шума,  $\text{rand}()$  - стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое число от 0 до  $\text{RAND\_MAX}$ ,  $\text{RAND\_MAX}$  - константа, равная 65535. В результате без амплитуды формула принимает произвольные дробные значения в диапазоне (-1;1). Данная формула белого шума предложена Perry R. Cook и Gary P. Scavone - центр компьютерных исследований в области музыки и акустики (CCRMA) Стэнфордского университета.

При исследовании колебаний результаты, полученные для центральной точки срединной плоскости пластины, обобщаются на всю пластину. Так тело сплошное, то колебания пластины в любой точки должны носить одинаковый характер при равных

условиях нагружения. Эксперимент, показывающий правомочность такого обобщения описан в работе [5].

В отсутствии шумового поля был получен сценарий Фейгенбаума [7]. Сценарий развивался на диапазоне амплитуд внешней продольной нагрузки  $p_0 \in [4.2; 5.1]$ , по этому влияние интенсивности внешнего шумового поля будет рассматриваться именно на этих значениях. В работе рассматривалось влияние на механическую систему шумового поля, интенсивность которого менялась в диапазоне  $q_{0n} \in (0; 15]$ .

Первое, что стоит отметить, это то, что приложение внешнего шумового поля с интенсивностью из заданного диапазона не меняет сценария перехода колебаний рассматриваемой динамической системы из гармонических в хаотические.

В таблице 1 приведены вейвлет спектры колебаний пластины для разных значений интенсивности шумового поля  $q_{0n} = 0$ ,  $q_{0n} = 0.5$ ,  $q_{0n} = 5$ .

Приложение внешнего шумового поля вызывает переход системы к хаотическим колебаниям раньше по амплитуде внешней продольной нагрузки. Так хаотические колебания в отсутствие шума наступили в системе при  $p_0 = 5.0$ , присутствие шума, даже небольшой интенсивности ( $q_{0n} = 0.5$ ) провоцирует хаотический спектр при  $p_0 = 4.95$ . Однако, наличие шума приводит к значительному снижению мощности частоты первой бифуркации, причем, чем меньше амплитуда внешнего шума, тем больший временной интервал требуется для того чтобы мощность первой бифуркации достигла своего максимума и остановилась в росте. Так при амплитуде внешней продольной нагрузки  $p_0 = 4.7$  на вейвлет спектре частота  $\omega_p/2$  представлена на всем временном интервале, ее мощность соизмерима с мощностью  $\omega_p$  и постоянна во времени. На вейвлет спектре колебаний при той же амплитуде внешней нагрузки ( $p_0 = 4.7$ ) шумовое поле интенсивности  $q_{0n} = 0.5$  «глушит» мощность частоты  $\omega_p/2$ , так, что она становится видимой на спектре (соизмеримой по мощности с  $\omega_p$ ) лишь при  $t \geq 150$ . Присутствие шумового поля интенсивности  $q_{0n} = 5$  также «глушит» мощность частоты  $\omega_p/2$ , но она становится «видимой» уже при  $t \geq 50$ . Важно то, что под действием шумового поля (для всех рассматриваемых его интенсивностей) бифуркации системы не равномерно представлены на вейвлет спектрах. То есть везде существовал начальный интервал времени, где мощности частот, соответствующих бифуркациям, «глушились» шумовым полем.

Цель проведенных исследований заключалась в выявлении возможности управления характером колебаний динамической системы, путем приложения внешнего шумового воздействия. Наиболее необходимо такое управление в областях хаотических колебаний. Приведенные в таблице результаты подтверждают возможность управления. В отсутствие шума при амплитуде продольной нагрузки  $p_0 = 5.0$  вейвлет спектр хаотический на всем временном интервале. Наложение шума интенсивностью  $q_{0n} = 5$  приводит к появлению в хаотическом спектре квазипериодического окна при  $t < 60$ .

Табл.1. Вейвлет спектры колебаний пластины для разных значений интенсивности шумового поля

$p_0$	Вейвлет спектры, материнский вейвлет Gauss32, ось ординат- частота, ось абсцисс- время		
	$q_{0n} = 0$	$q_{0n} = 0.5$	$q_{0n} = 5$
4.7			
4.85			
4.95			
5.0			

## РЕЗЮМЕ

В работе изучаются влияние внешнего поля белого шума на характер колебаний геометрически нелинейных прямоугольных в плане пластин кинематической гипотезы Кирхгофа. Пластины находятся под действием знакопеременной продольной нагрузки, действующей по их периметру. Дифференциальная задача в частных производных сводится к дифференциальной задаче для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) методом конечных разностей с аппроксимацией  $O(c^2)$  по пространственным переменным. По времени СОДУ решается методом Рунге-Кутты 4-ого. Исследование нелинейной динамики рассматриваемых систем проводится с применением аппарата вейвлет преобразований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хорстхемке, В. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии/ В. Хорстхемке, Р. Лефевр: Пер. с англ.-М.:Мир,1987.-400с.
2. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.:
3. Awrejcewicz, J. Routes to chaos in continuous mechanical systems / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Part 1: Mathematical models and solution methods', Chaos Solitons & Fractals, 45, 2012, P. 687-708.
4. Awrejcewicz, J. Wavelet-based analysis of the regular and chaotic dynamics of rectangular flexible plates subjected to shear-harmonic loading / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Shock and vibration 19 (2012) p. 979-994
5. Awrejcewicz, J. Analysis of nonlinear dynamics of plates and shells using the Lyapunov exponents and wavelets / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Dynamical Systems - Theory, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski, TU of Lodz Press, 2013, 273-282
6. Корнишин, М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения/ М.С. Корнишин. М.:Наука. 1964. 192с.
7. Крылова, Е.Ю. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок /Е.Ю. Крылова, Т.В. Яковлева, И.В. Папкина, В.А. Крысько // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 3. С. 235-243.

## SUMMARY

*In article is research the influence of the external field of white noise on the complex oscillations of geometrically nonlinear rectangular plate by using kinematic Kirchhoff hypotheses. Plate is subjected to an alternating longitudinal load acting on their perimeter. Differential problems in partial differential problem is reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations (ODE) by finite difference approximation  $O(c^2)$  to the space variables. ODE is solved by the Runge-Kutta fourth order in time. A study of nonlinear dynamics systems is carried out using the wavelet transformation.*

**E-mail:** [kat.krylova@bk.ru](mailto:kat.krylova@bk.ru)  
[ikravzova@mail.ru](mailto:ikravzova@mail.ru)  
[kruzhilin@mail.ru](mailto:kruzhilin@mail.ru)  
[tak@sun.ru](mailto:tak@sun.ru)

Поступила в редакцию 01.10.2015