УДК 518:517.5:536.2

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

д.ф.-м.н. **Мелешко И.Н.**, д.ф.-м.н. **Чигарев А.В.**, к.ф.-м.н. **Ширвель П.И.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Рассматривается одна краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $y > 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$:

$$\Delta T = 0, \quad y > 0; \tag{1}$$

$$T = T_0 f(x), \quad |x| \le 1, \quad f(\pm 1) = \frac{T^0}{T_0}, \quad y = 0; \tag{2}$$

$$T = T^0, \quad |x| > 1, \quad y = 0, \tag{3}$$

где $T = T(x, y)$ – температура; T_0 – характерная температура; T^0 – известная температура; $f(x)$ – известная функция.

В [1] с помощью методов теории аналитических функций строятся комплексные тепловые потенциалы плоских задач теории теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для практической реализации такого метода важное значение имеет вопрос об эффективном вычислении интегралов типа Коши, входящих в представление тепловых потенциалов. Как известно, во многих случаях этот вопрос представляет значительные трудности.

В настоящей статье на основе интеграла Пуассона для полуплоскости конструируется приближенное представление функции температуры $T = T(x, y)$ в верхней полуплоскости. Полученная приближенная формула эффективна в том смысле, что она сравнительно проста, устойчива и позволяет оценивать погрешности вычислений.

1. Точное представление решения краевой задачи (1)…(3). При помощи представления решения задачи Дирихле для полуплоскости интегралом Пуассона [2, с. 224-225], [3, с. 590] получаем точное решение краевой задачи (1)…(3)

$$T(x, y) = T^0 + \frac{T_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[f(t) - \frac{T^0}{T_0} \right] \frac{y dt}{(t - x)^2 + y^2}, \quad y > 0. \tag{4}$$

Запишем формулу (4) в виде

$$T(x, y) = T^0 + T_0 I(x, y), \quad y > 0, \tag{5}$$

где

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi(t) \frac{y dt}{(t - x)^2 + y^2}, \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{T^0}{T_0}. \tag{6}$$

Примечание 1. Решение краевой задачи (1)…(3) может быть записано также через решение соответствующей задачи Шварца для полуплоскости [4, с. 268] с граничными условиями (2),(3) на действительной оси с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt.$$

Так как очевидно, что интеграл (6)

$$I(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z),$$

формулу (5) можно записать в виде

$$T(x,y) = T^0 + T_0 \operatorname{Re}\Phi(z).$$

2. Приближенное решение краевой задачи (1)…(3). Сначала получим приближенную формулу для интеграла (6). Зададимся не отрезке [-1;1] системой точек

$$x_k = kh,\ \ k = -n,...,-1,0,1,...,n, h = \frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ в выражении интеграла $I(x,y)$ (6) на отрезке [-1;1] по формуле

$$\varphi(x) \approx \tilde{\varphi}(x) = \sum_{-n}^{n} \Theta_k(x)\varphi(x_k), \tag{7}$$

в которой

$$\Theta_k(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \left[x_k - \dfrac{h}{2},\ x_k + \dfrac{h}{2}\right]; \\ 0,\ x \notin \left[x_k - \dfrac{h}{2},\ x_k + \dfrac{h}{2}\right]. \end{cases}$$

После этого получим квадратную формулу

$$I(x,y) \approx \tilde{I}(x,y) = \sum_{-n}^{n} A_k(x,y)\varphi(x_k), \tag{8}$$

где коэффициенты

$$A_k(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\,dt, \quad y > 0. \tag{9}$$

Из соотношений (9) для коэффициентов $A_k(x,y)$ квадратной формулы (8) следует, что все они неотрицательны для всех $x \notin (-\infty, +\infty)$ и $y > 0$.
Вычислив интеграл в правой части (9), получим формулу для нахождения коэффициентов $A_k(x,y)$ $(k = -n,...,-1,0,1,...,n)$

$$A_k(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{x_k + \dfrac{h}{2} - x}{y} - arctg\frac{x_k - \dfrac{h}{2} - x}{y} \right). \tag{10}$$

Подставляя затем в формулу (5) вместо интеграла $I(x,y)$ его приближение по (8), найдём приближенное решение краевой задачи (1)…(3)

$$T(x,y) \approx \tilde{T}(x,y) = T^0 + T_0 \sum_{-n}^{n} A_k(x,y)\varphi(x_k), \tag{11}$$

где коэффициенты $A_k(x,y)$ определены формулой (10).

Получим неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (11).

Теорема. *Если функция $f(x)$ в граничном условии (2) непрерывна на отрезке [-1;1], то имеет место равномерная по x и y $(-\infty < x < +\infty,\ y \ge 0)$ следующая оценка погрешности приближенной формулы (11):*

$$\left|T(x,y) - \tilde{T}(x,y)\right| \le T_0\omega(f;h), \tag{12}$$

где $\omega(f;h)$ - модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$\left|T(x,y)-\tilde{T}(x,y)\right| \le T_0\frac{M}{2}h,\ -\infty<x<+\infty,\ y\ge 0,$$
$$M=\max_{x\in[-1;1]}\left|f'(x)\right|. \tag{13}$$

Доказательство. Сравнивая соответственно равенства (5) и (11), (6) и (8), находим, что

$$T(x,y)-\tilde{T}(x,y)=T_0\left(I(x,y)-\tilde{I}(x,y)\right)=T_0\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)\right)\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2},\quad y>0$$

Оценим последнее равенство по модулю

$$\left|T(x,y)-\tilde{T}(x,y)\right|\le T_0\max_{x\in[-1;1]}\left|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)\right|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{14}$$

Интеграл в правой части равенства (14) представляет собой гармоническую функцию в верхней полуплоскости, равную единице на отрезке [-1;1] действительной оси и нулю – на остальной части этой оси. В силу принципа симметрии и принципа максимума модуля для гармонической функции в любой точке плоскости

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}\le 1. \tag{15}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [-1;1], то

$$\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right|\le\omega(f;h),\quad -1\le x\le 1. \tag{16}$$

Если же $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко устанавливается при помощи формулы Тейлора, что

$$\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right|\le\frac{M}{2}h,\quad -1\le x\le 1. \tag{17}$$

Из неравенств (14)-(16) вытекает неравенство (12),а неравенства (14), (15), (17) приводят к неравенству (13).

Примечание 2. Очевидно, что квадратная формула (8) является точной, если $\varphi(x)\equiv 1$. Следовательно,

$$\sum_{-n}^{n}A_k(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2},\quad y>0.$$

Из неравенства (15) следует, что

$$\sum_{-n}^{n}A_k(x,y)\le 1,\ -\infty<x<+\infty,\ y>0. \tag{18}$$

Таким образом, можем отметить, что квадратурная формула (8) обла-дает замечательным качеством: все ее коэффициенты $A_k(x,y)$ неотрицательны при всех $x\in(-\infty,+\infty), y>0$, и удовлетворяют соотношению (18).

3. Пример. В качестве примера рассмотрим следующую краевую зада-чу в верхней полуплоскости:

$$\Delta T=0,\quad y>0; \tag{19}$$

$$T=(1-x^2)^{\frac{5}{2}},\ |x|\le 1,\quad y=0; \tag{20}$$

$$T=0,\ |x|>1,\quad y=0, \tag{21}$$

(здесь для определенности положено $T_0=1, T^0=0$).

С помощью точных методов вычисления интегралов типа Коши [5] находим

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}{t-z}=\frac{i}{16}\left[\xi^2(z)-5\xi^3(z)+10\xi(z)\right],$$

где $\xi(z)=z-\sqrt{z^2-1}$.

Учитывая связь интеграла (6) с интегралом типа Коши по отрезку [-1;1] действительной оси (примечание 1), точное решение краевой задачи (19)…(21) можно записать в виде

$$T(x,y)=\mathrm{Re}\frac{i}{16}\left[\xi^5(z)-5\xi^3(z)+10\xi(z)\right] \qquad (22)$$

Для сравнения точных и приближенных значений функция $T=T(x,y)$, полученных соответственно по формулам (22) и (11) при $n=10$, $n=20$ и $n=40$, приводим табл. 1.

Табл. 1. Сравнение точных и приближенных значений функции $T=T(x,y)$

(x,y)	$T(x,y)$	$\tilde{T}_{10}(x,y)$	$\tilde{T}_{20}(x,y)$	$\tilde{T}_{40}(x,y)$
(0,1;0,1)	0,81679	0,816106	0,816558	0,816721
(0,2;0,2)	0,654278	0,654035	0,654165	0,654241
(0,3;0,3)	0,521429	0,521509	0,521404	0,521415
(0,4;0,4)	0,418555	0,418837	0,415888	0,418557
(0,5;0,5)	0,34138	0,341759	0,341442	0,341389
(0,6;0,6)	0,28414	0,284544	0,284212	0,284153
(0,7;0,7)	0,241466	0,241855	0,241538	0,241479
(0,8;0,8)	0,209137	0,209494	0,209204	0,20915
(0,9;0,9)	0,184123	0,184444	0,184183	0,184134
(1;1)	0,164336	0,164623	0,16439	0,164346
(0;1000)	0,000312	0,000313	0,000313	0,000313

Результаты численного эксперимента подтверждают эффективность и устойчивость приближенной формулы (11).

РЕЗЮМЕ

С помощью интеграла Пуассона получено приближенное представление решения одной краевой задачи Дирихле для верхней полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пыхтеев, Г.Н. О точном и приближенном решении плоских задач теории теплопроводности с граничными условиями первого рода / Г.Н. Пыхтеев // Вестник Бел. гос. ун-та. Сер. 1. – 1975. - №3. – С.19-24.
2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Пыхтеев, Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши / Г.Н. Пыхтеев. – Новосибирск: Наука, 1980. – 121 с.

E-mail: Chigarev@rambler.ru
Pavel.Shirvel@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.05.2015