УДК 531.391:621.313.13

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ПЛАНАРНЫХ ПОЗИЦИОНЕРАХ

к.т.н. [1]**Дайняк И.В.**, [2]**Алехнович Г.Н.** , к.т.н. [3]**Голдын Л.**, [1]**Баев В.С.**

[1]*УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск*
[2]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[3]*Белостокский технический университет, Белосток, Польша*

Введение

В настоящее время все более возрастают требования к системам перемещений технологического оборудования прецизионного машиностроения и приборостроения, которое в большинстве своем строится на электромагнитных модулях движения, компонуемых в линейные шаговые двигатели различных конфигураций с соответствующей цифровой системой управления. Наибольшее распространение в прецизионном оборудовании получили планарные позиционеры [4], представляющие собой двухкоординатные комплектные приводы, управляемые по двух ортогональным координатным с электромагнитной редукцией скорости без промежуточных трансмиссий на магнитовоздушной опоре. Они характеризуются модульностью, однотипностью независимо от характера движения и вида управления, возможностью работы по программе от ЭВМ как в разомкнутых системах, так и в системах с обратной связью, осуществляют реализацию сложных многокоординатных и точно согласованных перемещений с широким варьированием параметров движения. Однако используемый только базовый ряд координатных модулей и координатных систем на их основе уже не обеспечивает все возрастающие требования к точности и производительности перспективного технологического оборудования. Необходимы новые подходы и решения в этой области. Следует разрабатывать принципиально новые координатные системы и системы перемещений для построения многофункционального автоматизированного технологического оборудования. К наиболее перспективным системам перемещений в настоящее время относятся системы, построенные на основе механизмов параллельной кинематики и привода прямого действия, в том числе планарного различного конструктивного исполнения. Для систем перемещений, предназначенных для реализации программируемых движений в плоскости или в трехмерном пространстве наиболее эффективными по нашему мнению являются системы многокоординатных приводов, построенные на основе планарных позиционеров, которые вместе с соответствующими механизмами параллельной кинематики конфигурируются в автономные кинематические узлы, алгоритмизация которых по кинематическим и динамическим моделям является актуальной научной задачей.

В настоящей статье рассматривается построение динамических моделей для двух систем перемещений: трехкоординатной планарной системы на двух планарных позиционерах и системы перемещений с шестью степенями свободы на трех планарных позиционерах.

Динамическая модель трехкоординатной планарной системы перемещений

Трехкоординатная планарная система перемещений (рис. 1) позволяет, используя двухкоординатные планарные модули с линейными перемещениями по осям X и Y, получить не только линейное результирующие перемещение предметного стола, но и его поворот на угол φ [3].

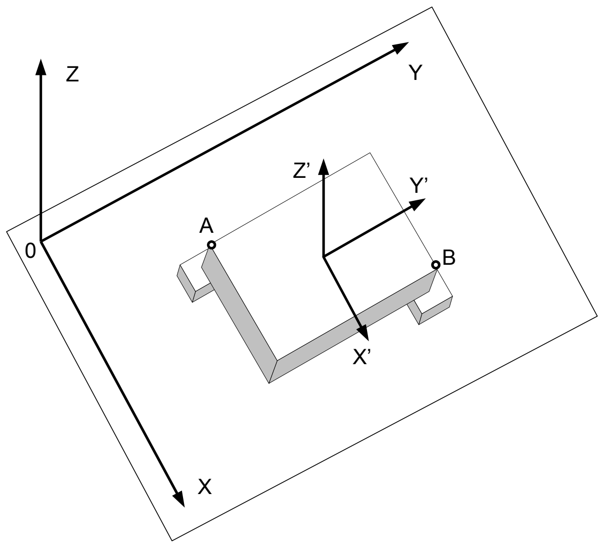

Рис. 1. Трехкоординатная планарная система перемещений

При этом предметный стол совершает плоскопараллельное движение, описываемое законом $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, $\varphi = f_3(t)$. Соотношение между координатами (рисунок 2) двух планарных модулей осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} X_B &= X_B + AB \cdot (1 - \cos\varphi); \\ Y_B &= Y_A + AB \cdot \sin\varphi. \end{aligned} \qquad (1)$$

Отсюда получим

$$\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{y_B(t) - x_A(t)}{AB}\right) \text{ или } \varphi(t) = \arccos\left(1 - \frac{x_B(t) - x_A(t)}{AB}\right).$$

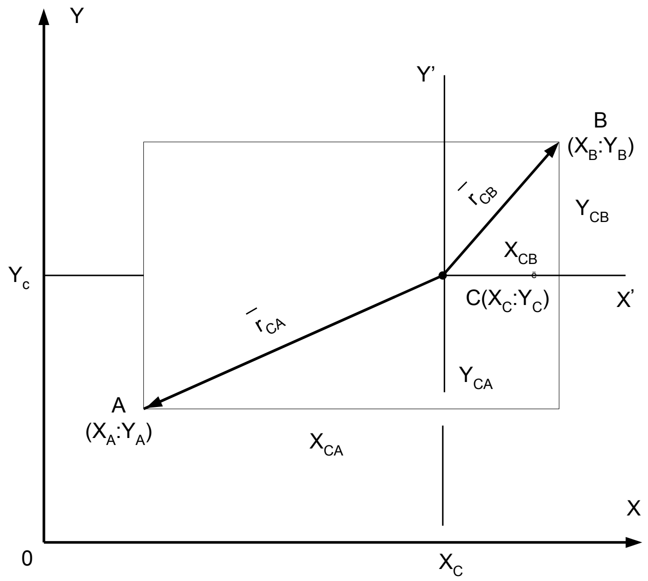

Рис. 2. Соотношение координат планарной системы перемещений

Для построения математической модели, описывающей движение рассматриваемой системы перемещений воспользуемся уравнением Лагранжа [1, 2, 5] в обобщенных координатах q_1 и q_2 ($q_1 = x_A(t) = x$, $q_2 = y_A(t) = y$):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} + Q_x; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} + Q_y. \end{cases} \qquad (2)$$

Кинетическая энергия подвижных частей позиционера будет равна

$$T = T_A + T_B + T_{AB},$$

где T_A – кинетическая энергия планарного модуля А; T_B – кинетическая энергия планарного модуля В; T_{AB} – кинетическая энергия стола, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A \left[\left(\frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right]; \\ T_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_B \left[\left(\frac{dx_B}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt} \right)^2 \right]; \\ T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} v_A^2 + \frac{1}{2} J_{np_A} \omega^2 = \frac{1}{2} m_{AB} \left[\left(\frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_{np_A} \frac{d\varphi}{dt}, \end{gathered} \tag{3}$$

где m_A – масса планарного модуля А; m_B – масса планарного модуля В; m_{AB} – масса предметного стола; J_{np_A} – приведенный момент инерции стола относительно оси Z, проходящей через точку A планарного модуля.

С учетом (3) окончательно получим:

$$\begin{aligned} T = T_A + T_B + T_{AB} = \\ = \frac{1}{2} m_A \left[\left(\frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m_B \left[\left(\frac{dx_B}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_B}{dt} \right)^2 \right] + \\ + \frac{1}{2} m_{AB} \left[\left(\frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_{np_A} \frac{d\varphi}{dt} = T\left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Нахождение обобщенной силы, действующей на планарные модули А, В и стол, выполним по формулам:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x}; \quad Q_y = \frac{\delta A}{\delta y}. \tag{5}$$

Подставив выражений (4) и (5) в исходные дифференциальные уравнения (2), получим систему дифференциальных уравнений в принятых обобщенных координатах, которая является динамической моделью трехкоординатной планарной системы перемещений.

Динамическая модель системы перемещений с шестью степенями свободы на трех планарных позиционерах

Для получения шести степеней свободы предметного стола при линейных перемещениях трех планарных позиционеров А, В, С, совершаемых в одной плоскости, применяется система перемещений [3], расчетная модель которой представлена на рисунке 3.

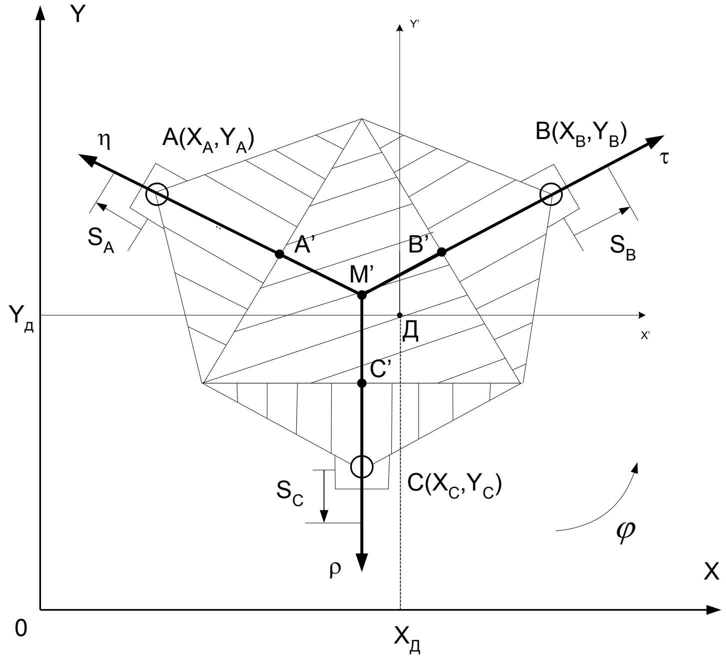

Рис. 3. Схема предметного стола с шестью степенями свободы

Для получения динамической математической модели воспользуемся уравнением Лагранжа [1, 2, 5] в обобщенных координатах q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6:

$$q_1 = x_A(t);\quad q_2 = y_A(t);$$
$$q_3 = x_B(t);\quad q_4 = y_B(t);$$
$$q_5 = x_C(t);\quad q_6 = y_C(t);$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1}+Q_{q_1};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=-\frac{\partial U}{\partial q_2}+Q_{q_2};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_3}=-\frac{\partial U}{\partial q_3}+Q_{q_3};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_4}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_4}=-\frac{\partial U}{\partial q_4}+Q_{q_4};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_5}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_5}=-\frac{\partial U}{\partial q_5}+Q_{q_5};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_6}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_6}=-\frac{\partial U}{\partial q_6}+Q_{q_6}.
\end{aligned}\right\}$$

Или, переходя к естественным координатам системы, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x_A}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_A}=-\frac{\partial U}{\partial x_A}+Q_{x_A};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_A}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_A}=-\frac{\partial U}{\partial y_A}+Q_{y_A};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x_B}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_B}=-\frac{\partial U}{\partial x_B}+Q_{x_B};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_B}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_B}=-\frac{\partial U}{\partial y_B}+Q_{y_B};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x_C}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_C}=-\frac{\partial U}{\partial x_C}+Q_{x_C};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y_C}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_C}=-\frac{\partial U}{\partial y_C}+Q_{y_C}.
\end{aligned}\right\}$$

Представим абсолютные движения точек предметного стола и планарного позиционера как сложные, состоящие из двух переносных и одного относительного для каждого позиционера.

В относительных движениях позиционеры движутся вдоль осей τ, η, ρ, расположенных на виртуальной плоскости и перпендикулярных сторонам базового треугольника стола, формируя соответствующие перемещения S_A, S_B, S_C. В первом переносном движении виртуальная плоскость с осями τ, η, ρ перемещается поступательно по закону $x = f(t)$, $y = f(t)$, во втором переносном движении виртуальная плоскость с осями τ, η, ρ совершает вращательное движение вокруг оси Z, проходящей через точку D.

Угол наклона плоскости стола и положение точки $D(x_D,y_D,z_D)$ задаются, исходя из условий построения программы движения.

Уравнение плоскости предметного стола по трем точкам в векторной форме имеет следующий вид:

$$\left(\vec{r}_{A'}-\vec{r}_0\right)\left(\vec{r}_{B'}-\vec{r}_0\right)\left(\vec{r}_{C'}-\vec{r}_0\right)=0,$$

а в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_{A'}-x_0 & y_{A'}-y_0 & z_{A'}-z_0 \\ x_{B'}-x_0 & y_{B'}-y_0 & z_{B'}-z_0 \\ x_{C'}-x_0 & y_{C'}-y_0 & z_{C'}-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Запишем нормальное уравнение плоскости в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - h = 0,$$

где x, y, z – координаты любой точки D, лежащей на плоскости; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали; h – расстояние от начала координат до плоскости.

Зная координаты точки $D(x_D,y_D,z_D)$ и уравнение плоскости стола, находим координаты точек $A'\left(x'_A, y'_A, z'_A\right)$, $B'\left(x'_B, y'_B, z'_B\right)$, $C'\left(x'_C, y'_C, z'_C\right)$, как показано на рисунке 4.

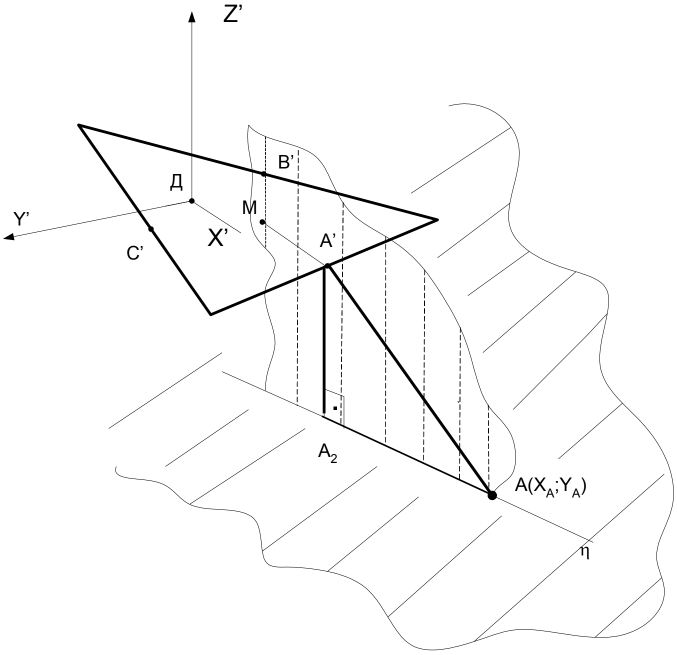

Рис. 4. Расчет координат предметного стола

Величины Z'_A, Z'_B, Z'_C определяют перемещение индукторов A, B, C вдоль виртуальных осей τ, η, ρ. Значения координат x_A, y_A; x_B, y_B; x_C, y_C определяются также поворотом стола на угол φ вокруг оси Z, проходящей через точку D, и координатами точки $D(x_D,y_D)$.

Кинетическая энергия системы может быть найдена как сумма кинетических энергий всех ее подвижных частей по формуле

$$T = T_{\text{ст}} + T_A + T_B + T_C + T_{AA'} + T_{BB'} + T_{CC'},$$

где $T_{\text{ст}}$ – кинетическая энергия стола в сложном движении, состоящем из переносного, поступательного и сферического относительного, равная

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{2}M_c\left(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2+\dot{z}_D^2\right)+\frac{1}{2}Z_D\left(\dot{\gamma}^2+\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\right);$$

T_A, T_B, T_C – кинетическая энергия индукторов, находимая по формулам

$$T_A = \frac{1}{2} m_A \left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right);$$
$$T_B = \frac{1}{2} m_B \left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right);$$
$$T_C = \frac{1}{2} m_C \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right);$$

$T_{AA'}$, $T_{BB'}$, $T_{CC'}$ – кинетическая энергия «ног» стола, вычисляемая по формулам

$$T_{AA'} = \frac{1}{2} m_{AA'} \left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right) + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2;$$
$$T_{BB'} = \frac{1}{2} m_{BB'} \left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2;$$
$$T_{CC'} = \frac{1}{2} m_{CC'} \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2.$$

Значение потенциальной энергии системы определяется изменением значения координат Z_i центров масс отдельных ее частей:

$$U = U_{\text{ст}} + U_{AA'} + U_{BB'} + U_{CC'} + U_A + U_B + U_C ,$$

где U_A=U_B=U_C=0 – потенциальная энергия индукторов.

Обобщённая сила Q_{g_i} – определяется как коэффициент при соответствующей обобщенной координате в выражении виртуальной работы

$$\delta A^e = Q_{g_i} \delta g_i ,$$

откуда $Q_{g_i} = \dfrac{\delta A^e}{\delta g_i}$.

Подстановка полученных значений в исходное дифференциальное уравнение Лагранжа в обобщенных координатах дает шесть уравнений, описывающих динамику перемещения предметного стола.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются две системы перемещений на базе планарных позиционеров. Первая состоит из предметного стола и двух планарных позиционеров, соединенных с ним вращательными парами, и позволяет реализовать перемещения в горизонтальной плоскости с тремя степенями свободы. Вторая состоит из предметного стола и трех планарных позиционеров, соединенных с ним через подвижное звено поворотной и сферической парами, и позволяет реализовать пространственные перемещения с шестью степенями свободы. Для каждой из систем перемещений на основе уравнений Лагранжа, методов аналитической геометрии и расчета кинетической и потенциальной энергии получена система дифференциальных уравнений, описывающая ее динамику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М. : Мир, 1980. – 292 с.
2. Голубев, Ю.Ф. Основы теоретической механики / Ю.Ф. Голубев. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 525 с.
3. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.
4. Основы механики машин и роботов / С.Е. Карпович [и др.]. – Минск : Технопринт, 2002. – 155 с.
5. Spong, M. Robot dynamics and control / M. Spong, M. Vidyasagav. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. – 327 p.

SUMMARY

The two motion systems based on the planar positioners were considered. The first one consists of the object stage and two planar positioners connected by hinges and allows realizing movements in horizontal plane with three degrees of freedom. The second system consists of the triangle stage and three planar positioners connected via a mobile link by rotary and spherical joints, and allows realizing spatial movements with six degrees of freedom. A differential equation system based on the Lagrange equations, methods of analytical geometry and calculation of kinetic and potential energy was found for each system, this equation system is describing the dynamics of motion system.

E-mail: dainiak@bsuir.by
alekhnov@tut.by
mmts@bsuir.by

Поступила в редакцию 12.10.2015