Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Финансовый менеджмент

Учет фактора времени при управлении финансами

Методические указания для студентов
специальности 1-26.02.02 «Менеджмент»
всех форм обучения

Минск БНТУ 2005

Содержание

1. Понятие временной стоимости денег

Подавляющее большинство решений, которые приходится принимать управленческому персоналу предприятия – это решения финансового характера. Логика подобных решений выражается известным соотношением: доходы, которые ожидаются в результате принятия данного решения, должны определенным образом превосходить совокупные затраты, связанные с его подготовкой и реализацией. Безусловно, некоторые решения могут иметь иное обоснование, нежели текущая выгодность, например социальный аспект, отсутствие убытков и т.д. Тем не менее решения основанные на денежных оценках без сомнения преобладают.

Решения финансового характера в большинстве случаев не является одномоментными в плане проявления вызываемых ими последствий. Здесь важную, если не решающую роль играет фактор времени. Поэтому принимать управленческие решения, эффективные во временном аспекте, следует исходя из того, что определенная сумма денежных средств сегодня не равноценна аналогичной сумме через какое-то время.

Различие между равными по абсолютной величине суммами денежных средств, получаемых или расходуемых в различных периодах времени, называется временной стоимостью денег.

Временная стоимость является объективно существующей характеристикой денежных ресурсов.

Почему одна и та же сумма денег в разные периоды времени имеет разную стоимость и при этом стоимость в настоящее время всегда выше, чем в любом будущем периоде?

Это определяется действием следующих основных причин:

1. **Первая причина – инфляция**

Инфляция означает обесценивание денег и соответственно рост цен.

Представим, что предприятие имеет свободные денежные средства в размере 15 млн. руб., а инфляция составляет 20% в год (т.е. цены увеличиваются в 1.2. раза). Это означает, что уже в следующем году, если хранить деньги «в чулке» они уменьшатся по своей покупательной способности и составят в ценах текущего дня лишь 12,5 млн. руб.

Инфляция присуща практически любой экономике, причем бытующее сугубо негативное отношение к этому процессу не вполне корректно. Происходящее в условиях инфляции постоянное обесценивание денег, вызывает, с одной стороны, естественное желание их куда-либо вложить, т.е. в известной мере стимулирует инвестиционный процесс, а с другой стороны как раз отчасти и объясняет, почему различаются деньги, имеющиеся в наличии и ожидаемые к получению.

2. **Вторая причина – риск неполучения ожидаемой суммы**

Любой договор, согласно которому в будущем ожидается, поступление денежных средств, имеет ненулевую вероятность быть неисполненным вовсе или исполненным частично.

Представьте себе ситуацию, когда вам нужно сделать выбор между двумя потенциальными покупателями вашей продукции: первый предлагает гарантированную сумму в 10 млн. руб. в месяц в виде предоплаты, второй обещает, выплатить 15 млн. руб., но через месяц. Из неофициальных источников вы располагаете информацией о том, что второй покупатель втянут в судебное разбирательство и в случае неблагоприятного исхода может понести колоссальные убытки, что не исключено, приведет его к банкротству. По мнению вашего финансового консультанта вероятность такого исхода равна 0,3.

Таким образом, если сравнивать варианты без учета риска возможного неполучения платежа, то второй покупатель явно более предпочтителен. Если риск учитывается, то выбор становится уже не столь очевиден, вероятность не получения денег достаточно высока.

1. **Третья причина – оборачиваемость**

Денежные средства, как любой актив, должны с течением времени генерировать доход приемлемый для владельца денежных средств.

Это «золотое» правило базируется на той истине, что денежные средства, которыми можно распоряжаться сегодня, должны быть немедленно направлены на конкретное дело-развитие производства, покупку ценных бумаг, депозиты в банках. Тем самым они способны заработать новые деньги, принести дополнительные доходы. Отсрочка «деятельности денег» означает временное их бездействие, что приносит потери от нереализованных возможностей. Многолетний опыт деятельности хозяйствующих субъектов разных стран подтверждает аксиому, что чем длиннее процесс «замораживания» денег, тем весомее становятся потери от недополученных доходов.

Однако финансового менеджера предприятия должны интересовать не только дополнительные доходы от умелого маневрирования и более эффективного использования денег, но и их применение для оценки результативности всех хозяйственных операций, принятых финансовых решений.

Предположим, предприятие имеет возможность участвовать в некоторой деловой операции, которая приносит доход в размере 10 млн. руб. по истечении двух лет. Предлагается выбрать вариант получения доходов: либо по 5 млн. руб. по истечении каждого года, либо единовременное получение всей суммы в конце двухлетнего периода.

Даже на жительском уровне, очевидно, что второй вариант получения доходов явно невыгоден по сравнению с первым. Потому, что сумма, получения в конце первого года, может быть вновь пущена в оборот и, таким образом принесет дополнительные доходы.

Проблема «деньги-время» не нова, поэтому уже разработаны удобные модели и алгоритмы, позволяющие ориентироваться в истинной стоимости будущих доходов с позиции текущего момента.

2. Операции наращения и дисконтирования

Логика построения основных алгоритмов достаточно проста и основана на следующей идее. Простейшим видом финансовой сделки является однократное предоставление в долг некоторой суммы *P* с условием, что через некоторое время t будет возвращена большая сумма *S*. Как известно результативность подобной сделки может быть охарактеризована двояко; либо с помощью абсолютного показателя прироста $\Delta = S - P$, либо путем расчета некоторого относительно показателя. Абсолютные показатели чаще всего не подходят для подобной оценки ввиду их несопоставимости в пространственно временном аспекте. Поэтому пользуются специальным коэффициентом – ставкой. Этот показатель рассчитывается отношением приращения исходной суммы к базовой величины, в качестве которой очевидно можно взять либо *P*, либо *S*.

Таким образом, ставка рассчитывается по одной из двух формул.

$$r_t = \frac{S-P}{P};$$

$$d_t = \frac{S-P}{S};$$

В финансовых вычислениях разность *S* – *P* называется процентом. Это величина дохода от предоставления в долг денежной суммы *P*.

В финансовых вычислениях показатель r_t называется – «процентной ставкой», показатель d_t – называется «учетной ставкой».

Обе ставки взаимосвязаны, т.е. зная один показатель можно рассчитать другой.

$$r_t = \frac{d_t}{1-d_t} \qquad \text{или} \qquad d_t = \frac{r_t}{1+r_t}$$

Оба показателя могут выражаться либо в долях, либо в процентах.

Как же соотносятся между собой эти показатели? Очевидно, что $r_t \rangle d_t$, а степень расхождения зависит от уровня процентных ставок, имеющих место в конкретный момент времени. Так, если $r_t = \mathbf{8}\%$, $d_t = 7{,}4\%$, т.е. расхождение сравнительно невелико, если $r_t = \mathbf{80}\%$, то $d_t = \mathbf{44{,}4}\%$, т.е. ставки существенно различаются по величине. Следовательно при разумных значениях ставок расхождения между ними не велики и поэтому в прогнозных расчетах может использоваться любая из них. Итак, в любой простейшей финансовой сделке всегда присутствуют три величины, две из которых заданы, а одна искомая.

Процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется процессом наращения, искомая величина – наращенной суммой или наращенной стоимостью, а используемая в операции ставка – ставкой наращения.

Процесс, в котором заданы ожидаемые в будущем к получению сумма и ставка называется процессом дисконтирования, искомая величина – приведенной суммой, а используемая в операции ставка – ставкой дисконтирования. Одна из интерпретаций ставки, используемой для дисконтирования такова: ставка показывает, какой ежегодный процент возврата хочет или может иметь инвестор на инвестируемый им капитал.

В первом случае речь идет о движении от настоящего к будущему.

Во втором случае о движении от будущего к настоящему.

Наращенная стоимость определяется путем присоединения к первоначальной сумме начисленной суммы процентов.

$$S = P + I$$

Наращение стоимости – процесс приведения настоящей стоимости денег к их будущей стоимости в определенном периоде путем присоединения к их первоначальной сумме начисленной сумме процентов.

Дисконтирование стоимости – процесс приведения будущей стоимости денег к их настоящей стоимости путем изъятия из их будущей суммы соответствующей суммы процентов (называемой «дисконтом»).

$$P = S - D$$

Пример: Предприятие получило кредит на один год в размере 5 тыс. руб. с условием возврата 10 тыс. руб. В этом случае ставка наращения равна 100%, а дисконтирования – 50%.

3. Понятие простого и сложного процента

Предоставляя денежные средства в долг, их владелец получает определенный доход в виде процентов, начисляемых по некоторому алгоритму в течение определенного промежутка времени.

Проценты, начисление, которых осуществляется за фиксированный промежуток времени (год, полугодие, квартал, месяц, день) называются дискретными.

Поскольку стандартным временным интервалом в финансовых операциях является один год, наиболее распространен вариант, когда процентная ставка устанавливается в виде годовой ставки, подразумевающей однократное начисление процентов по истечении года после получения ссуды.

Известны две основные схемы дискретного начисления:

* схема простых процентов;
* схема сложных процентов.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

Пусть исходная сумма *P*, требуемая процентная ставка или доходность r (в долях единицы).

Считается, что ссуда выдана на условиях простого процента, если исходная сумма ежегодно увеличивается на величину $P \cdot r$. Таким образом, размер ссуды через *n* лет будет равен

$$S_П = P + P \cdot r + P \cdot r_{....} P \cdot r = P(1 + n \cdot r)$$

Сумма простого процента будет выражаться формулой

$$I = P \cdot n \cdot r$$

Таким образом, *простой процент* – сумма дохода, начисляемого к основной сумме капитала в каждом интервале, по которой дальнейшие расчеты платежей не осуществляются.

При применении простого процента доходы по мере их начисления целесообразно снимать для потребления или использования в других проектах или текущей деятельности.

Считается, что ссуда выдана на условиях сложного процента, если очередной годовой доход исчисляется не с исходной величины денежной суммы, а с общей суммы, включая также и ранее начисленные проценты.

В этом случае происходит капитализация процентов по мере их начисления, т.е. база, с которой начисляются проценты, все время возрастает.

Следовательно, размер ссуды будет равен:

к концу первого периода: $S_1 = P + P \cdot r = P \cdot r(1+r)$;

к концу второго периода: $S_2 = S_1 + S_1 \cdot r = S_1 \cdot (1+r) = P \cdot (1+r)^2$;

к концу n года: $S_c = P \cdot (1+r)^n$.

Соответственно сумма сложного процента в этом случае определяется по формуле:

$$I_c = S_c - P.$$

Сложный процент – сумма дохода, начисляемого в каждом интервале, которая не выплачивается, а присоединяется к основной сумме предыдущего периода и в последующем платежном периоде сама приносит доход.

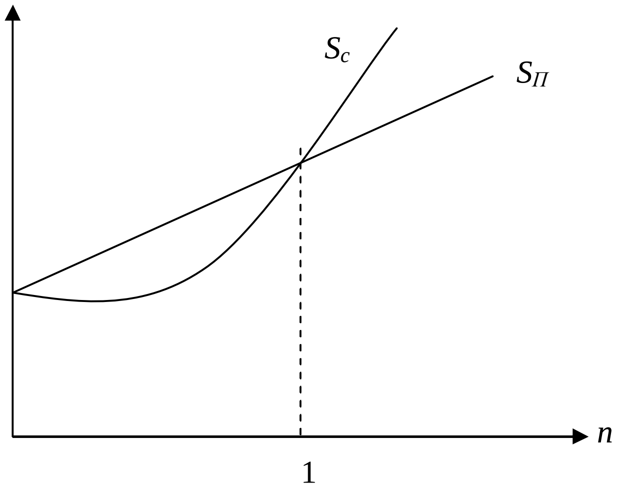
Как же соотносятся величины, $S_П$ и S_c? Это чрезвычайно важно знать при проведении финансовых операций. Все зависит от величины n, сравним множители наращения по простым и сложным процентам, т.е. сравним: $(1+n\cdot r)$ и $(\mathbf{1}+r)^n$. Очевидно, что при $n=\mathbf{1}$ это множители совпадают и равны $\mathbf{1}+r$.

Если $\mathbf{0}\langle n \langle \mathbf{1}$, $(1+n\cdot r)\rangle(1+r)^n$.

Если $n\rangle\mathbf{1}$, $(1+n\cdot r)\langle(1+r)^n$.

Следовательно, $S_П \rangle S_c$ при $0\langle n\langle 1$.

Графически взаимосвязь $S_{П}$ и S_c можно представить следующим образом:



Таким образом, в случае ежегодного начисления процентов, для лица предоставляющего ссуду:

∗ более выгодной является схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода);

∗ более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год (проценты начисляются ежегодно);

∗ обе схемы дают одинаковые результаты при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

4. Области применения схемы простых процентов

На практике многие финансовые операции выполняются в рамках одного года. В частности, большое распространение имеют краткосрочные ссуды, т.е. ссуды, предоставляемые на срок до одного года с однократным начислением процентов.

Как отмечалось выше, в этом случае для кредитора, диктующего чаще всего условия финансового контракта, более выгодна схема простых процентов, при этом в расчетах используют промежуточную процентную ставку, которая равна доле временного интервала в году:

$$S_n = P_x(1+f\cdot r) \qquad \text{или} \qquad S_n = P_x(1+\frac{t}{T}\cdot r)$$

где r – годовая процентная ставка в долях единицы;

t – продолжительность финансовой операции в днях;

T – количество дней в году;

f – относительная длина периода до погашения ссуды.

Для наглядности формулу можно записать следующим образом: $S_n = P\cdot(1+t\cdot\frac{r}{T})$, т.е. дробь $\frac{r}{T}$ представляет собой дневную ставку, а произведение $t\cdot\frac{r}{T}$ – ставку за t дней.

В ряде стран для удобства вычислений год делится на 12 месяцев по 30 дней в каждом, т.е. продолжительность года (T) принимается равной 360 дней. Это так называемая «германская практика». Проценты рассчитанные с временной базой 360 дней называется обыкновенными.

Существует «французская практика», когда продолжительность года принимается равной $T = \mathbf{360}$ дней, а продолжительность месяца соответствует календарному исчислению. И, наконец, в ряде стран используется «английская практика», учитывающая продолжительность года в 360 дней, а продолжительность месяца в днях, также соответствует календарному исчислению, как и при использовании «французской практики», т.е. 28, 29, 30, 31 дней.

В этой связи различают три метода процентных расчетов, которые зависят от выбранного периода начисления:

* Точные проценты с точным числом дней ссуды («английская практика»).

При этом методе определяется фактическое число дней (t) между двумя датами (датой получения и погашения ссуды), продолжительность года $T = 365/366$ дней.

Для упрощения процедуры расчета точного числа дней пользуются специальными таблицами, в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Продолжительность операции определяется вычитанием номера дня получения ссуды из номера дня погашения ссуды.

∗ Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды («французская практика»), величина t рассчитывается, как в предыдущем случае, продолжительность года принимается равной $T = 360$ дней.

∗ Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды («германская практика»), величина t определяется количеством месяцев по 30 дней в каждом, начиная с момента выдачи ссуды и до момента ее погашения, и точным числом дней ссуды в неполном месяце, продолжительность года $T = 360$ дней.

В практическом смысле эффект от выбора того или иного способа зависит от значительности суммы, фигурирующей в процессе финансовой операции. Но и так ясно, что использование обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды, как правило, дает больший результат.

Другой распространенной операцией краткосрочного характера, для оценки которой используются рассмотренные формулы является операция по учету векселей банком.

Вексель – это особый вид письменного долгового обязательства, дающего его владельцу бесспорное право требовать по истечении указанного в нем срока, уплаты денег с должника. Схема действий в этом случае такова.

Владелец веселя на сумму S предъявляет его банку (эта сумма называется номинальной величиной векселя), который соглашается его учесть, т.е. купить, удерживая в свою пользу часть вексельной суммы, т.е. получает, какой то доход. В этом случае банк предлагает владельцу сумму P, исчисляемую банком исходя из объявленной учетной ставки (эта сумма называется дисконтированной величиной векселя).

Расчет предоставляемой банком суммы осуществляется с помощью процесса дисконтирования, который называется банковским дисконтированием.

Расчет предоставляемой банком суммы ведется по формуле

$$P = S \cdot (1 - \frac{t}{T}) \cdot d \text{ или } P = S \cdot (1 - f \cdot d)$$

Разность $(S - P)$ представляет собой комиссионные удерживаемые банком в свою пользу.

Кроме банковского дисконтирования существует еще и математическое дисконтирование.

При математическом дисконтировании решается задача, обратная определению наращенной суммы. Сформулируем эту задачу следующим образом, какую сумму следует выдать в долг на n лет, чтобы при начислении на нее процентов по ставке r получить наращенную сумму S.

Для решения этой задачи используем формулу наращения по простой ставке процента $S = P \cdot (1 + n \cdot r)$:

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot r} \quad ;$$

где $\frac{1}{1 + n \cdot r}$ – дисконтный множитель, показывающий, во сколько раз первоначальная сумма ссуды меньше наращенной, где n – необязательно целое число лет, т.е.

$$P = \frac{S}{1 + \frac{t}{T} \cdot r}.$$

5. Области применения схемы сложных процентов

5.1. Внутригодовые процентные начисления

На практике в договорах финансовых сделок, условиями часто предусматривается капитализация процентов несколько раз в год – по полугодиям, кварталам иногда помесячно.

В подобных случаях для расчета наращенной суммы можно использовать формулу наращения по схеме сложных процентов:

$$S_c = P \cdot (1 + r)^n$$

где n будет означать число периода капитализации процентов, а r – процентную ставку за соответствующий период.

Например, если кредит выдан на 2 годы с поквартальным начислением процентов по ставке $r = \mathbf{5\%}$, то множитель наращения $(1+r)^n = (1+0{,}05)^{4\cdot 2} = 1{,}4775$.

Однако на практике указывается не квартальная или помесячная ставка, а годовая, которая называется номинальной. Кроме того, указывается число периодов (m) начисления процентов в году. Тогда для начисления процентов m раз в году для расчета наращенной суммы используется формула

$$S_c = P \cdot (1+\frac{j}{m})^{m\cdot n},$$

где j – номинальная процентная ставка.

В нашем случае было бы сказано, что выдан кредит сроком, два года с квартальным начислением процентов под 20% годовых, $S_c = P \cdot (1+\frac{0.20}{4})^{4\cdot 2} = P \cdot 1{,}4775$.

5.2. Начисление процентов за дробное число лет

Достаточно обычными являются финансовые контракты заключаемые на период, отличающейся от целого числа лет. В этом случае проценты могут начисляться одним из двух методов:

* по схеме сложных процентов:

$$S_c = P \cdot (1+r)^{w+f}$$

* по смешанной схеме (используется схема сложных процентов для целого числа лет и схема простых процентов – для дробной части года)

$$S_c = P \cdot (1+r)^w + (1+f \cdot r)$$

где w – целое число лет

f – дробная часть года

Поскольку $f \langle \mathbf{1}$, то $(1+f \cdot r) \rangle (1+r)^f$, следовательно, сумма будет больше при использовании смешанной схемы.

Так как w означает целое число лет в n годах, а f – дробная часть года, поэтому $n = w + f$.

Возможны финансовые контракты, в которых начисление процентов осуществляется по внутригодовым подпериодам, а продолжительность общего периода действия контракта не равна целому числу подпериодов. В этом случае также возможно использование двух схем

* схема сложных процентов: $S_c = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{w+f}$;
* смешанная схема: $S_c = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{w} \times (1 + f \cdot \frac{j}{m})$;

где w – целое число подпериодов, в n годах;

f – дробная часть подпериодам;

m – количество начислений в году;

j – годовая ставка.

Так как w – означает целое число подпериодов в n годах, а f – дробную часть подпериода, поэтому $n = (w + f)/m$.

5.3. Непрерывное начисление процентов

Суть непрерывных процентов заключается в том, что количество периодов наращения стремиться к бесконечности, а временной интервал между периодами – к нулю.

При использовании дискретной номинальной ставки начисленная сумма определяется с помощью выражения

$$S_c = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}.$$

По определению непрерывных процентов чем больше величина m (число m стремится к бесконечности), тем меньше временные промежутки между периодами (они стремятся к нулю). В этом случае мы можем записать

$$S_c = \lim_{m \to \infty} P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n} = P \cdot e^{r \cdot n},$$

так как согласно второму замечательному пределу $\lim_{m\to\infty}(1+1/m)^m = e$, где $e = \mathbf{2{,}718281}$, называется числом Эйлера и является одной из важнейших постоянных математического анализа.

Чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной вводят специальное обозначение непрерывной ставки – *б* и называют ее <u>силой роста</u>. Таким образом, формула для нахождения наращенной суммы за *n* лет при непрерывном начислении процентов принимает вид

$$S_c = P \cdot e^{б \cdot n},$$

где $e^{б \cdot n}$ – является множителем наращения.

5.4. Эффективная годовая процентная ставка

Различными видами финансовых контрактов могут предусматривать различные схемы начисления процентов – полугодовое, квартальное, ежемесячное. Однако на практике указывается не квартальная, полугодовая или ежемесячная процентная ставка, а годовая, которая называется номинальной.

Между тем эта ставка не может быть использована для сопоставлений различных контрактов.

Для того чтобы обеспечить сравнительный анализ эффективности таких контрактов, необходимо выбрать некий показатель, который был бы универсальным для любой схемы начисления.

Таким показателем является эффективная годовая процентная ставка r_e, обеспечивающая переход от P к S_c, при заданных значения этих показателей и однократном начислении процентов.

Общая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Задана исходная сумма *P*, годовая процентная ставка *j*, число начислений сложных процентов. Этому набору исходных величин в рамках одного года соответствует вполне определенная величина S_c. Требуется найти такую годовую ставку r_e, которая обеспечила бы точно такое же наращение как и исходная схема, но при однократном начислении процентов, т.е. $m = \mathbf{1}$.

Иными словами, схемы $(P, S_c, j, m\rangle 1)$ и $(P, S_c, r_e, m = \mathbf{1})$ должны быть равносильны.

Итак, в рамках данного года ($n = \mathbf{1}$):

$$S_c = P \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot 1}$$

Из определения эффективной годовой процентной ставки получается, что $S_c = P \cdot (1 + r_e)$. Наращенные суммы равны, тогда:

$$(1 + j/m)^m = (1 + r_e),$$

Отсюда:

$$r_e = (1 + \frac{j}{m})^m - 1$$

Из формулы следует, что эффективная ставка зависит от количества внутригодовых начислений, причем с ростом m она увеличивается.

Именно ставка r_e является критерием эффективности финансовой сделки и может быть использована для пространственно-временных сопоставлений.

Если в контракте указаны эффективная годовая процентная ставка и число начислений сложных процентов m, то номинальная ставка будет равна:

$$j = m \cdot \left[(1 + r_e)^{1/m} - 1\right].$$

6. Финансовые ренты, основные понятия

В большинстве современных коммерческих операциях подразумевается не разовые платежи, а последовательность денежных поступлений или выплат в течении определенного периода.

Например, погашение среднесрочной и долгосрочной банковской задолженности, коммерческого кредита, инвестирование средств в различные программы, создание денежных фондов целевого назначение и т.п., в большинстве случаев предусматривают выплаты, производимые через определенные промежутки времени. При этом возникает ряд последовательных платежей, которые обычно именуют потоком платежей.

Последовательность денежных поступлений или выплат в течении определенного периода называется потоком платежей.

Поток однонаправленных платежей с равными интервалами между последовательными платежами в течении определенного количества лет называется *финансовой рентой*.

Финансовая рента может быть охарактеризована рядом параметров.

Член ренты – величина каждого отдельного платежа.

Период ренты – временной интервал между двумя платежами.

Срок ренты – время от начала реализации ренты до момента начисления последнего платежа.

Процентная ставка – ставка, используемая для расчета наращения или дисконтирования платежей, составляющих ренту.

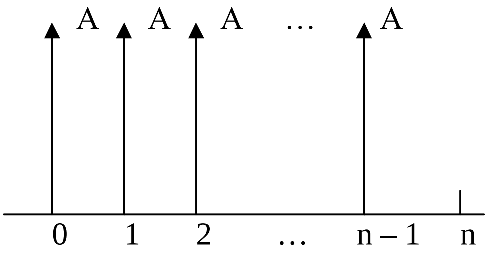
По моменту выплаты членов ренты последние подразделяются на обычные (постнумерандо), в которых платежи производятся в конце соответствующих периодов (года, полугодия и т.д.), и пренумерандо, в которых платежи осуществляются в начале этих периодов.

7. Аннуитеты

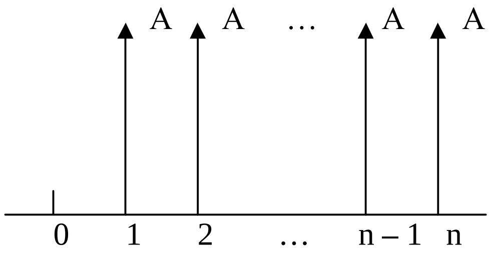
Аннуитет представляет собой частный случай денежного потока. Известны два подхода к определению аннуитета. Согласно первому подходу аннуитет представляет собой однонаправленный денежный поток, элементы которого имеют место через равные временные интервалы. Второй подход накладывает дополнительные ограничения, а именно элементы денежного потока одинаковы по величине. В дальнейшем изложении материала мы будем придерживаться именно второго подхода.

Если число равных временных интервалов ограничен, аннуитет называется *срочным*.

Как и в общем случае, выделяют два типа аннуитетов. Аннуитет, для которого платежи осуществляются в начале соответствующих интервалов, носит название аннуитет *пренумерандо*, если же платежи осуществляются в конце интервалов, мы получаем аннуитет *постнумерандо*.



Аннуитет пренумерандо



Аннуитет постнумерандо

Рассмотрим аннуитет постнумерандо с ежегодными платежами A в течение n лет, на которые начисляются проценты по сложной годовой ставки r_c.

Прямая задача оценки срочного аннуитета при заданных величинах регулярного поступления A и сложной процентной ставки r_c предполагает оценку будущей стоимости аннуитета. Как следует из логики, присущей схеме аннуитета постнумерандо – платежи производятся в конце соответствующих интервалов.

Наращенная сумма (S_1), для первого платежа, процент на который будет начисляться, очевидно ($n-1$) раз, в конце n-го периода составит:

$$S_1{}^a = A \cdot (1 + r_c)^{n-1}$$

Для второго платежа наращенная сумма в конце n-го периода составит:

$$S_2{}^a = A \cdot (1 + r_c)^{n-2}$$

и так далее.

На предпоследний платеж проценты начисляются за один интервал и наращенная сумма составит:

$$S^a{}_{n-1} = A \cdot (1 + r_c)$$

На последний платеж, произведенный в конце n-го года, проценты уже не начисляются, т.е.

$$S_n^{\ a} = A$$

Тогда наращенная сумма к концу срока аннуитета, составит сумму членов ряда:

$$A \cdot (1 + r_c)^{n-1},\ A \cdot (1 + r_c)^{n-2},\ \ldots\ A \cdot (1 + r_c),\ A$$

т.е. $$S^a{}_{pst} = A \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 + r_c)^{n-k}$$

Представленный ряд, переписанный в обратном порядке *А,* $A \cdot (1 + r_c) \ldots A \cdot (1 + r_c)^{n-2}, A \cdot (1 + r_c)^{n-1}$ представляет собой возрастающую геометрическую прогрессию.

Напомним, что геометрической прогрессией называется ряд чисел, в котором каждый член ряда равен произведению предыдущего члена на постоянное число – знаменатель прогрессии.

Например: 5, 10, 20, 40 и т.д., знаменатель прогрессии в данном примере равен 2.

Сумма членов геометрической прогрессии определяется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 \times (g^n - 1)}{g - 1},$$

где a_1 – первый член прогрессии;

g – знаменатель прогрессии.

В нашем случае: 1-й член прогрессии – *А*, знаменатель прогрессии величина – $(\mathbf{1} + r_c)$. Тогда сумму членов ряда, т.е. наращенную сумму аннуитета постнумерандо, можно определить по формуле:

$$S^a{}_{pst} = A \cdot \frac{(1 + r_c)^n - 1}{(1 + r_c) - 1} = A \cdot \frac{(1 + r_c)^n - 1}{r_c}.$$

Величина $\frac{(\mathbf{1} + r_c)^n - \mathbf{1}}{r_c}$ является коэффициентом наращения аннуитета, который иногда называют *коэффициентом аккумуляции вкладов.* Он показывает, во сколько раз наращенная сумма аннуитета больше первого члена аннуитета.

Обозначим коэффициент наращения $a_{rc,n}$, где подстрочные символы n и r_c указывают на срок аннуитета и применяемую процентную ставку, тогда формула примет вид.

$$S^a{}_{pst} = A \cdot a_{r_c,n}\,.$$

Значение коэффициента наращения $a_{r_c,n}$ табулированы, т.е. зная срок аннуитета и процентную ставку по специальным таблицам можно определить наращенную сумму аннуитета. Это облегчает ведение расчетов.

Найдем теперь современную величину $P^a{}_{pst}$ данного аннуитета, т.е. решим обратную задачу оценки срочного аннуитета постнумерандо.

В этом случае реализуется схема дисконтирования, производится оценка будущих денежных поступлений с позиции текущего момента, под которым в данном случае понимается момент времени, начиная с которого отсчитываются равные временные интервалы, входящие в аннуитет, т.е. на конец периода 0.

Современное значение первого платежа будет определяться по формуле:

$$P_1^a = \frac{A}{(1+r_c)}\,.$$

Современное значение второго платежа будет определяться по формуле:

$$P_2{}^a = \frac{A}{(1+r_c)^2} \quad \text{и так далее.}$$

Современное значение предпоследнего платежа:

$$P^d{}_{n-1} = \frac{A}{(\mathbf{1}+r_c)^{n-1}}\,.$$

Современного значение последнего платежа:

$$P_n{}^a = \frac{A}{(1+r_c)^n}\,.$$

Таким образом, приведенный денежный поток имеет следующий вид:

$$\frac{A}{(\mathbf{1}+r_c)}, \frac{A}{(\mathbf{1}+r_c)^{n-2}} \cdots \frac{A}{(\mathbf{1}+r_c)^{n-1}}, \frac{A}{(\mathbf{1}+r_c)^n}\,.$$

Элементы, приведенного денежного потока можно суммировать. Следовательно, современная величина всего аннуитета составит:

$$P^a{}_{pst} = A \cdot \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(1+r_c)^k}.$$

Обозначим $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(1+r_c)^k} = K_{r_c,n}$ и запишем, что $P^a{}_{pst} = A \cdot K_{r_c,n}$.

$K_{r_c,n}$ – называется дисконтирующим множителем для аннуитета, а также коэффициентом дисконтирования аннуитета или коэффициентом приведения аннуитета, и представляет собой сумму геометрической прогрессии с параметрами $a_1 = g = 1/(1+r_c)$.

Тогда, для $K_{r_c,n}$ получаем выражение:

$$K_{r_c,n} = \frac{\frac{1}{1+r_c} \cdot \left[(\frac{1}{1+r_c})^n - 1 \right]}{\frac{1}{1+r_c} - 1} = \frac{1-(1+r_c)^{-n}}{r_c}.$$

Для современной величины аннуитета, соответственно

$$P^a{}_{pst} = A \cdot \frac{1-(1+r_c)^{-n}}{r_c}.$$

Экономический смысл дисконтирующего множителя заключается в следующем: он показывает, чему равна с позиции текущего момента величина аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере одной денежной единицы, продолжающегося n периодов с заданной процентной ставкой r_c .

Как видим современная величина и наращенная сумма аннуитета связаны между собой соотношением:

$$S^a{}_{pst} = P^a{}_{pst} \times (1+r_c)^n.$$

Из полученных формул путем преобразований легко получить еще несколько формул.

Так, для определения размера очередного платежа (A) имеем:

$$A = \frac{S^a{}_{pst}}{a_{rc,n}} = \frac{S^a{}_{pst} \cdot r_c}{(1+r_c)^n - 1},$$

где $a_{r_c,n}$ – коэффициент наращения.

$$A = \frac{P^a{}_{pst}}{K_{r_c,n}} = \frac{P^a{}_{pst} \cdot r_c}{1-(1+r_c)^{-n}},$$

где $K_{r_c,n}$ – коэффициент дисконтирования.

Для определения срока аннуитета (n), при прочих заданных условиях, получаем:

$$n = \frac{\ln\left[(S^a{}_{spt} / A) \cdot r_c + 1\right]}{\ln(1+r_c)};$$

$$n = \frac{\ln\left[1-(P^a{}_{pst} / A) \cdot r_c\right]^{-1}}{\ln(1+r_c)}.$$

8. Составление планов погашения кредитов

Практическим применением теории аннуитетов является составление планов погашения кредитов.

Кредит – это представление временно свободных денежных средств одних субъектов хозяйствования (банк, предприятия и т.д.) во временное пользование других субъектов хозяйствования на принципах платности, срочности, обеспеченности и целевого использования кредита.

При заключении кредитного контракта составляется план погашения кредитной задолженности.

Одним из важнейших элементов плана является определение числа так называемых срочных уплат и их величины.

Срочные уплаты рассматриваются как средства, предназначенные для погашения как основного долга, так и текущих процентных платежей.

Существуют различные методы составления планов погашения кредитов.

Условиями кредитного контракта может предусматриваться погашение долга равными срочными уплатами в конце каждого расчетного периода. Каждая срочная уплата (Y) будет являться суммой двух величин: годового расхода по погашению основного долга R и процентного платежа по займу I, т.е.

$$Y = R + I.$$

В этом случае остаток основного долга и сумма процентных платежей уменьшаются от периода к периоду, годовой расход погашенного основного долга растет.

Величина кредита (D) является современной величиной всех срочных уплат и определяется по формуле:

$$D = Y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n \cdot r},$$

где r – ставка процента по займу,

n – срок кредита в годах.

Из данного выражения можно определить величину срочной уплаты:

$$Y = D \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

где $\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ - коэффициент погашения задолженности.

В кредитном контракте может быть оговорено условие – производить погашение основного долга равными ежегодными платежами. В этом случае размеры платежей по основному долгу будут равны:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \ldots = R_к = R_n$$

Остаток основного долга в начале каждого расчетного периода ($D_к$) определяется как:

$$D_к = D - R \cdot (k-1),$$

где D – сумма всего долга,

k – номер расчетного периода.

Величина срочной уплаты в каждом расчетном периоде равна***:***

$$Y_к = D_к \cdot r + R,$$

Подставив значение $D_к$, получим:

$$Y_к = [D - R \cdot (k-1)] \cdot r + R,$$

Кредитным контрактом может быть предусмотрено погашение основного долга платежами, возрастающими или убывающими в арифметической прогрессии с разностью d. В этом случае величина выплаты основного долга в периоде k равна:

$$R_к = R_1 + (n-k)\cdot d\ .$$

Величина основного долга равна сумме всех выплат, т.е. сумме членов возрастающей арифметической прогрессии:

$$D = \frac{[R_1 + R_1 + (n-1)\cdot d]\cdot n}{2} = \frac{n}{2}\cdot[2\cdot R_1 + (n-1)\cdot d]\cdot$$

Решив эти уравнения относительно *R₁*, получим формулу для вычисления величины первой выплаты:

$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{(n-1)}{2}\cdot d$ для возрастающей прогрессии;

$R_{1=} \frac{D}{n} + \frac{(n-1)}{2}\times d$ для убывающей прогрессии.

Одним из вариантов погашения кредитной задолженности может быть такой, при котором погашение основного долга должно производиться платежами, каждый из которых больше или меньше предыдущего в q раз.

Таким образом, эти платежи будут являться членами возрастающей или убывающей геометрической прогрессии.

Величина основного долга является суммой этих членов и определяется по формуле геометрической прогрессии, где R_1 - первый член прогрессии и одновременно первый платеж основного долга, а q – знаменатель прогрессии.

Тогда основной долг D равен:

$D = R_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, где $q > 1$ или $D = R_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$, где $q < 1$,

Решив эти два уравнения относительно R_1, получим

$R_1 = D\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, где $q > 1$, $R_1 = D\cdot\frac{1-q}{1-q^n}$, где $q < 1$.

На практике может возникнуть ситуация, когда необходимо изменить условия погашения кредита. Изменение условий погашения кредитов называется конверсией займа.

Примером конверсии может быть вариант, когда изменяются срок погашения займа и процентная ставка, а срочные уплаты, как по старым, так и по новым условиям производятся равными платежами; проценты начисляются один раз в конце каждого расчетного периода.

Для составления плана погашения конверсионного займа определяют:

1) величину срочной уплаты по старым условиям:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

где D – величина основного долга;

Y –величина срочной уплаты до конверсии,

n – первоначальный срок погашения займов до конверсии,

r – процентная ставка до конверсии;

2) остаток долга на момент конверсии:

$$D_{n-\kappa} = Y \cdot \frac{(1+r)^{n-k} - 1}{(1+r)^{n-k} \cdot i},$$

где $D_{n-\kappa}$ – остаток долга на момент конверсии;

k – число оплаченных расчетных периодов до конверсии

2) величину срочной уплаты по новым условиям

$$Y_1 = D_{n-k} \cdot \frac{r_1 \cdot (1+r_1)^{n-k+n_1}}{(1+r)^{n-k+n_1} - 1},$$

где r_1 – процентная ставка после конверсии,

Y_1 – величина срочной уплаты после конверсии,

n_1 – срок, на который продлен период погашения в результате конверсии.

В финансовой практике встречаются ситуации, когда кредитный контракт предусматривает выплату займа разовым платежом.

В подобных случаях, особенно при значительных размерах кредита, заемщик для своевременного погашения долга предусматривает, как правило, создание погасительного фонда. Погасительный фонд создается путем денежных взносов в банк на специальный счет с начислением на них процентов. Размер погасительного фонда (взносы и начисленные проценты) должен обеспечить своевременную выплату кредита.

Так же как при планировании погашения задолженности непосредственно кредитору, при создании погасительного фонда необходимо определить размер срочной уплаты.

Величина срочной уплаты за период Y_t рассчитывается по формуле:

$$Y_t = I_t + R,$$

где I_t – процентный платеж;

R – размер взноса в погасительный фонд;

Величину I_t для расчетного периода t вычисляют по формуле:

$$I_t = D \cdot (1+g)^{t-1} \cdot g,$$

где D – величина долга

t = 1,2,3…n

g – ставка процента по займу.

Сумма, накопленная в погасительном фонде за n лет равна величине основного долга D, в силу чего можно записать:

$$D = R \cdot \left[(1+r)^n - 1\right] / r,$$

где r – ставка, по которой начисляются проценты на взносы в фонд.

Отсюда $R = D \cdot r / \left[(1+r)^n - 1\right].$

Для расчета накопленных за t лет сумм погасительного фонда используется следующая формула:

$$S_t = S_{t-1}(1+r) + R.$$

9. Практические задания

1. Фирма приобрела в банке вексель, по которому через год должна получить 6,6 млн.руб. В момент приобретения цена векселя составляла 6,0 млн.руб. Определить доходность этой сделки.
2. Ссуда в размере 50000 руб. выдана на полгода по простой ставке процентов 28% годовых. Определить наращенную сумму.
3. Коммерческий банк приобрел на 2,0 млн.руб. государственных ценных бумаг со сроком погашения через шесть месяцев. По истечению указанного срока банк рассчитывает получить 2175 тыс.руб. Определить доходность данной сделки.
4. Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту. Первое полугодие процентная ставка 20%, каждый

следующий квартал ставка возрастает на 2,5%. Проценты начисляются только на первоначально внесенную сумму вклада.

5. Кредит в размере 20 млн.руб. выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год – 30%, а за каждое последнее полугодие она уменьшается на 1%. Определить множитель наращения и наращенную сумму.

6. Вкладчик внес в банк 5000$ под 12% годовых. Определить наращенную сумму через 2 года.

7. Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 25,0 млн.руб. вырастет до 40,0 млн.руб., если используется простая процентная ставка 28% годовых.

8. Представлена ссуда в размере 7 млн.руб. 10 февраля с погашение 10 июня под 20% годовых, год не высокостный. Рассчитать различными способами сумму к погашению.

9. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 500 тыс. руб со сроком погашения 28.09. Вексель предъявлен 13.09. Банк согласился учесть вексель по учетной ставке 30% годовых. Определить сумму которую векселедержатель получит от банка.

10. Банк предоставил ссуду в размере 10000$ на 30 месяцев под 30% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока.

11. Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 18% и сложные проценты начисляются ежемесячно.

12. На сумму 600 тыс.руб. ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течении 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы двумя методами.

13. Определить эффективную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму как и при использовании номинальной ставки j = 18%, при ежеквартальном начислении процентов.

14. Предприятие продало товар на условиях потребительского кредита с оформлением векселя: номинальная стоимость – 150 тыс. руб., срок векселя

60 дней, ставка процента за представленный кредит – 15% годовых. Через 45 дней с момента оформления векселя предприятие решило учесть вексель в банке, предложенная банком дисконтная учетная ставка а) 20%, б) 25%. Рассчитать суммы получаемые предприятием и банком, если используются обыкновенные проценты с точным числом дней.

15. Через полгода после заключения финансового соглашения о получении кредита должник обязан заплатить 2,14 тыс.руб. Какова первоначальная величина кредита, если он выдан под 14% годовых и начисляются обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

16. На вашем счете в банке 2 млн.руб. Банк платит 18% годовых. Вам предлагают войти всем вашим капиталом в организацию венчурного предприятия. Представленные экономические расчеты показывают, что через шесть лет ваш капитал утроится. Стоит ли принимать это предложение, если финансовый консультант рекомендует оценить ваше участие в венчурном предприятии путем введения премии в размере 5%.

17. Вам предлагают сдать в аренду участок на три года, выбрав один из двух вариантов оплаты аренды а) 10 млн.руб. в конце каждого года, б) 35 млн.руб. в конце трехлетнего периода. Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 20% годовых по вкладам.

18. Предприниматель может получить ссуду:

а) либо на условиях ежемесячного начисления процентов из расчета 26% годовых;

б) либо на условиях полугодового начисление процентов из расчета 27% годовых.

Какой вариант более предпочтителен?

19. Найти современную величину потока платежей определяемого следующим образом: первый год – поступления 500$, второй год – поступления 200$, третий год – выплата 400$, далее в течение семи лет – доход по 500$. Ставка дисконтирования – 6% годовых.

20. С учетом исходных данных (таблица 3) составить план погашения кредита при различных условиях кредитного контракта:

а). Погашение кредита должно производиться равными ежегодными выплатами в конце каждого года, включающими погашение основного долга и процентные платежи. Начисление процентов производится раз в году.

б) Погашение основного долга должно производиться равными ежегодными платежами, начисление процентов в конце года.

в). Погашение кредита производится ежегодными выплатами. Начисление процентов один раз в конце года. Платежи, обеспечивающие погашение основного долга, должны увеличиваться в арифметической прогрессии.

г). Погашение кредита производится ежегодными выплатами. Начисление процентов один раз в конце года. Платежи, обеспечивающие погашение основного долга, должны увеличиваться в геометрической прогрессии.

д). Кредит подлежит погашению равными ежегодными выплатами в конце каждого года. Проценты начисляются в конце года. После выплаты третьего платежа достигнута договоренность о продлении срока погашения кредита и увеличении процентной ставки с момента конверсии.

е). Погашение долга в банке А предусматривается разовым платежом. Одновременно с получением кредита в банке А создается погасительный фонд, для чего в банке Б открывается счет. На размещенные в банке Б средства начисляются проценты.

ж). Результаты расчета по пунктам 1-5 оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1.

План погашения кредита, млн. руб

Год	Величина долга D	Процентный платеж I	Годовой расход по погашению основного долга **R**	Годовая срочная уплата **Y**
1 . . .				
ИТОГО:				

з). Результаты расчета по пункту 6 оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2.

План погашения кредита, млн. руб

Год	Выплата процентных платежей I_t	Взносы в погасительный фонд R_t	Накопления на конец года в погасительном фонде $\mathbf{S_t}$	Срочные уплаты $\mathbf{Y_t}$
1 . . .				
ИТОГО:				

3. Исходные данные

Таблица 3

Данные для составления плана погашения задолженности при различных условиях кредитного контракта

Наименование показателей	Условные обозначения	Номер варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Величины кредита млн. руб.	D	10	45	20	35	30	25	40	55	15	50
Срок погашения кредита, лет	n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Годовая процентная ставка по кредиту, %	i	5	20	16	10	18	15	25	20	5	15
Ежегодное увеличение в арифметической прогрессии платежей, обеспечивающих погашение основного долга, млн. руб.	d	0,10	0,30	0,50	0,15	0,20	0,35	0,50	0,25	0,10	0,40
Ежегодное увеличение в геометрической прогрессии платежей, обеспечивающих погашение основного долга, %	q	7	5	6	5	8	7	4	3	10	6
Срок, на который продлен период погашения в результате конверсии кредита, лет	n_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Процентная ставка после конверсии, %	i_c	10	25	20	15	23	18	30	25	10	23
Ставка, по которой начисляются проценты на взносы в погасительный фонд, %	g	10	12	15	10	13	14	15	11	12	9