

ПРАВИЛА ПОДОБИЯ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

к.т.н. Недоступ А.А., асп. Ражев А.О.

ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет», Россия

Физическое моделирование как научный метод познания интересующих нас явлений или процессов имеет давнюю историю и успешно применяется во всех областях науки [1,2,3]. Действительно, изучая динамические процессы, протекающие с механическими системами (МС) в натуральных условиях, можно получить данные по функциональным зависимостям, связывающих все элементы системы, но при этом не установить, что и как влияет на характеристики каждого элемента в отдельности. Испытание натуральных механических систем сопряжено с большими экономическими затратами. Поэтому исследования динамических процессов целесообразней вести на их моделях в лабораторных условиях.

Динамическое подобие выполняется при обеспечении условия [3]:

$$\frac{\chi_i \lambda_i}{\tau_i^2} = \frac{\chi_i \lambda_i}{\tau_i^2}, \quad (1)$$

где χ – безразмерная сила, действующая в МС; λ – безразмерный геометрический параметр; τ – безразмерное время; « n » – индекс натурной МС; « m » – индекс модели МС.

Тогда, представим выражение (1) в виде:

$$\frac{T_i S_i}{t_i^2} \frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}} = \frac{T_i S_i}{t_i^2} \frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}}, \quad (2)$$

где T – действующая сила в текущий момент времени; S – величина геометрического параметра в текущий момент времени; t – текущее время; T_{\max} – максимальное значение силы одинаковое по природе; S_{\max} – максимальное значение геометрического параметра; t_{\max} – время длительности процесса.

Запишем выражение (2) в виде:

$$\frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}} = \frac{C_r C_l}{C_t^2} \frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}}, \quad (3)$$

где C_t – масштаб времени; C_r – масштаб сил; C_l – геометрический масштаб.

Отметим, что

$$\frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}} = \frac{t_{\max i}^2}{T_{\max i} S_{\max i}},$$

тогда на основании (3) связь масштабов подобия можно записать в виде (частный случай):

$$\frac{C_r C_l}{C_t^2} = 1, \quad (4)$$

или в общем виде

$$\frac{C_r C_l}{C_t^2 C_m C_\omega^2} = 1, \quad (5)$$

где C_m – масштаб массы; C_ω – масштаб ускорения.

Приведем два критерия подобия Ne и Sh:

$$\frac{C_m C_l}{C_t^2 C_r} = 1, \quad (6)$$

$$\frac{C_v C_t}{C_l} = 1. \quad (7)$$

Выразим из (7) масштаб скорости $C_v = C_l / C_t$ и подставим его в формулу (6), а из (4) выразим масштаб сил $C_r = C_t^2 / C_l$ и подставим его также в формулу (6) тогда

$$\frac{C_m C_l^2}{C_t^4} = 1. \quad (8)$$

Так как [8], то масштабы MC

$$C_t = C_l^{\frac{5}{4}}, \quad (9)$$

$$C_v = C_l^{-\frac{1}{4}}, \quad (10)$$

$$C_r = C_l^{\frac{3}{2}}. \quad (11)$$

Масштаб ускорения MC $C_\omega = C_l / C_t^2$

$$C_\omega = C_l^{-\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

Из (8) масштаб массы MC

$$C_m = C_l^3. \quad (13)$$

На рис. 1 изображена трехмерная зависимость $C_r = f(C_l, C_t)$. Необходимо отметить, что ошибки моделирования увеличиваются пропорционально уменьшению и увеличению масштаба C_l относительно $C_l = 1$.

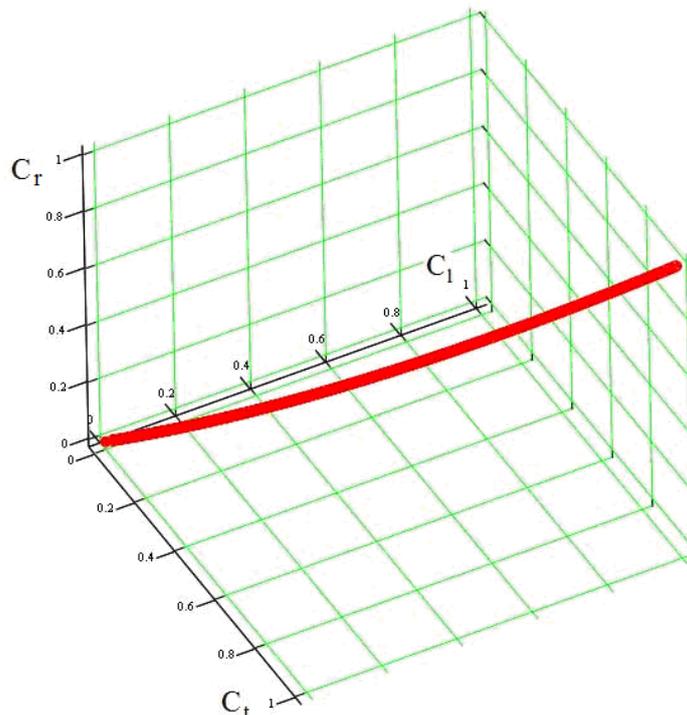


Рис. 1. График трехмерной зависимости $C_r = f(C_l, C_t)$ при $0 \leq C_l \leq 1$

Таким образом, правила (9)-(13) обеспечивают физическое моделирование динамических процессов механических систем. Для обоснования масштабов подобия необходимо первоначально обосновать масштаб C_l исходя из размеров лабораторной установки, затем на основании (9)-(13) определить характеристики модели МС с учетом реализуемости масштабов.

Следует отметить, что моделирование динамических процессов справедливо при условии (5)

$$C_m C_\omega^2 = 1. \quad (14)$$

Отметим, что динамический коэффициент вязкости жидкости (воды) μ связан

$$\frac{C_r}{C_l^2} = C_\mu \frac{C_v}{C_l}, \quad (15)$$

где C_μ – масштаб динамического коэффициента вязкости жидкости; C_v - масштаб кинематического коэффициента вязкости жидкости.

Так как

$$C_\mu = C_v C_\rho, \quad (16)$$

с учетом масштаба плотности воды $C_\rho \approx 1$ (для воды), тогда для моделирования в воде

$$C_\mu \approx C_v. \quad (17)$$

С учетом (9) - (11), (16) выразим из (15) масштаб C_v . Можно масштаб C_v выразить и из критерия Рейнольдса [4]

$$C_\mu \approx C_v = C_l^{\frac{3}{4}}. \quad (18)$$

Рассмотрим критерий изгибной жесткости в индикаторном виде

$$\frac{C_{EI}}{C_\rho C_l^4 C_v^2} = 1, \quad (19)$$

где C_{EI} – масштаб изгибной жесткости.

Примем $C_\rho \approx 1$ или $C_\rho = C_l^0$ (для воды), тогда с учетом масштаба C_v (10) определим масштаб изгибной жесткости

$$C_{EI} = C_l^{\frac{14}{4}} = C_l^{\frac{7}{2}}. \quad (20)$$

Аналогично рассмотрим критерий упругости в индикаторном виде

$$\frac{C_r}{C_E C_l^2} = 1. \quad (21)$$

где C_E – масштаб упругости материала (среды).

С учетом масштаба скорости C_v (10) и силового масштаба C_r (11) определим масштаб упругости материала (среды)

$$C_E = C_l^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{C_l}}. \quad (22)$$

На основании (19) видно, что с уменьшением масштаба геометрических характеристик (линейного масштаба) C_l уменьшается масштаб изгибной жесткости C_{EI} , таким образом, необходимо для модели подбирать материалы с меньшей изгибной жесткости EI , и на основании (21) видно, что с уменьшением масштаба C_l увеличивается масштаб упругости материала (среды) C_E .

На основании (19) и (21) масштаб геометрического момента инерции C_I равен

$$C_I = \frac{C_{EI}}{C_E} = C_l^4. \quad (23)$$

С учетом критерия Эйлера

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = 1, \quad (24)$$

определим масштаб давления для среды ($C_\rho \approx 1$)

$$C_p = C_v^2 = C_l^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{C_l}}, \quad (25)$$

также можно получить масштаб давления C_p из формулы давления

$$p = \frac{R}{A}, \quad (26)$$

где R – сила; A – площадь.

В индикаторном виде выражение (25) с учетом (11) представим в виде

$$C_p = \frac{C_r}{C_A} = \frac{1}{\sqrt{C_l}}, \quad (27)$$

где C_A – масштаб площади.

Представим в индикаторном виде критерий трения [5]

$$\frac{C_v C_b C_p}{C_l C_\rho} = 1. \quad (28)$$

Подставим в (28) масштабы C_v , C_b , C_p и $C_\rho \approx 1$, получим

$$\frac{C_l^{-\frac{1}{4}} C_l^{\frac{3}{4}}}{C_l C_l^{-\frac{1}{2}}} = C_l^0 = 1,$$

что справедливо.

И при физическом моделировании вращательных движений имеем критерий подобия

$$C_{\omega\delta} C_l \sqrt{\frac{C_p}{C_E}} = 1, \quad (29)$$

где ω_δ – частота вращения (1/с), и имеем масштаб частоты вращения

$$C_{\omega\delta} = \frac{1}{C_l} \sqrt{\frac{C_E}{C_p}}, \quad (30)$$

при условии (22) или $C_E = C_l^{-1/2}$, имеем

$$C_{\omega\delta} = C_l^{\frac{5}{4}}, \quad (31)$$

так как $\omega_{\delta}=1/t$, имеем с учетом (9)

$$C_{\omega\delta} = \frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_l^{\frac{5}{4}}} = C_l^{-\frac{5}{4}}, \quad (32)$$

что справедливо.

Представим закон Гука в виде [6]

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad (33)$$

где σ - напряжение; ε - относительное удлинение.

Так как при физическом моделировании $\varepsilon=idem$, тогда масштаб касательных напряжений

$$C_{\sigma} = C_A = C_l^{-\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

При этом масштаб C_{σ} можно определить и из выражения

$$C_{\sigma} = \frac{C_r}{C_A} = C_l^{\frac{3}{2}} C_l^{-2} = C_l^{-\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Представим потенциальную энергию в виде [7]

$$U = \frac{T^2 l}{2EA}, \quad (36)$$

или в индикаторном виде

$$C_U = \frac{C_r^2 C_l}{C_E C_A} = \frac{C_l^{\frac{6}{2}} C_l}{C_l^{-\frac{1}{2}} C_l^2} = C_l^{\frac{5}{2}}. \quad (37)$$

Или масштаб потенциальной C_U и кинетической энергий C_{T_n} представим в виде

$$C_U = C_{T_n} = C_m C_v^2 = C_l^3 C_l^{-\frac{1}{2}} = C_l^{\frac{5}{2}}. \quad (38)$$

Запишем критерий подобия Вебера

$$We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma_n}, \quad (39)$$

где $\sigma_n = F/l$ – поверхностное натяжение.

Или в индикаторном виде критерий Вебера (39)

$$\frac{C_{\rho} C_v^2 C_l}{C_{\sigma n}} = 1. \quad (40)$$

где $C_{\sigma n}$ – масштаб поверхностного натяжения.

Выразим выражение (40) через масштаб C_l ($C_{\rho}=1$ - масштаб плотности воды)

$$\frac{C_l^{-\frac{1}{2}} C_l}{C_l^2} = C_l^0 = 1,$$

что справедливо.

* Работа выполнялась в рамках гранта РФФИ №15-08-00464-а «Математическое, физическое и имитационное моделирование сетных орудий рыболовства и аквакультуры».

РЕЗЮМЕ

Физическое моделирование как научный метод познания интересующих нас явлений или процессов имеет давнюю историю и успешно применяется во всех областях науки. Действительно, изучая динамические процессы, протекающие с техническими узлами и агрегатами сложных динамических систем в натуральных условиях, можно получить данные по функциональным зависимостям, связывающих все элементы системы, но при этом не установить, что и как влияет на характеристики каждого элемента в отдельности. Испытание натуральных механических систем сопряжено с большими экономическими затратами. Поэтому исследования динамических процессов целесообразней вести на их моделях в лабораторных условиях. При этом необходимо руководствоваться правилами динамического подобия. Получен новый критерий динамического подобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике/ Л.И. Седов. Гос. изд. технико-теор. лит. М: 1957. 376 с.
2. Ногид, Л.М. Теория подобия и размерности/ Л.М. Ногид. Судпромгиз. Ленинград: 1959. 96 с.
3. Недоступ, А.А. Физическое моделирование орудий и процессов рыболовства/ А.А. Недоступ. Монография. Калининград: Издательство ФГБОУ ВПО «КГТУ», 2012. - 375 с.
4. Розенштейн, М.М. Механика орудий рыболовства/ М.М. Розенштейн, А.А. Недоступ. Гриф УМО. М. - Моркнига. - 2011. 528 с.
5. Хебда, М. Справочник по триботехнике/ М. Хебда, А.В. Чичинадзе. В 3 т. - Т. 1. - Теоретические основы. М. - Машиностроение. - 1989. - 400 с.
6. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности/ Г.С. Варданян. Учебник. М. - Издательство АСВ. - 1995. - 568 с.
7. Михалев, М.А. Физическое моделирование гидравлических явлений/ М.А. Михалев. Учебное пособие. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. - 2010. - 443 с.

SUMMARY

Physical modeling as a scientific method of cognition of interest phenomena or processes has a long history and has been used successfully in all areas of science. Indeed, studying dynamic processes proceeding with the technical units and apparatus of complex dynamical systems in natural conditions, it is possible to obtain data on the functional relationships linking all the elements of the system, but it does not establish that the effect on the characteristics of each element separately. Testing of natural mechanical systems associated with high economic costs. Therefore, the study of dynamic processes is expedient to their models in the laboratory. It should be guided by the rules of dynamic similarity. Get a new criterion of dynamic similarity.

E-mail: nedostup@klgtu.ru
progacpp@live.ru

Поступила в редакцию 10.10.2015