УДК 621.762.4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

д.т.н. **Дудяк А.И.**, **Дикан Ж.Г.**

Белорусский уациональный пехнический университет, Минск

Введение. В курсе сопротивления материалов основным изучаемым объектом является стержень, материал которого является однородным и изотропным, это означает, что в любом объеме и в любом направлении свойства материала одинаковы.

Однако в данное время широко начали применять композиционные материалы, в которых основу материала стержня армируют большим количеством стержней из другого материала, отличающегося от основного материала физико-механическими характеристиками. Типичным примером могут быть железобетонные балки. Сечение такой балки составлено из двух материалов с соотношением модулей продольной упругости $E_1 \neq E_2$.

При решении задач о прочности, жёсткости и устойчивости приходится проводить сечение стержня плоскостью и рассматривать некоторые новые геометрические характеристики сечений [1-3]. К таким характеристикам следует отнести статические моменты и моменты инерции плоских фигур.

Сечение стержня из двух разнородных материалов. Если стержни изготавливаются из нескольких материалов, то такие геометрические характеристики как статические моменты и моменты инерции плоских фигур в расчётах использовать нельзя. Для получения геометрических характеристик такого сечения рассмотрим плоское сечение произвольной формы, составленное из двух материалов, отличающихся модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рис.1).

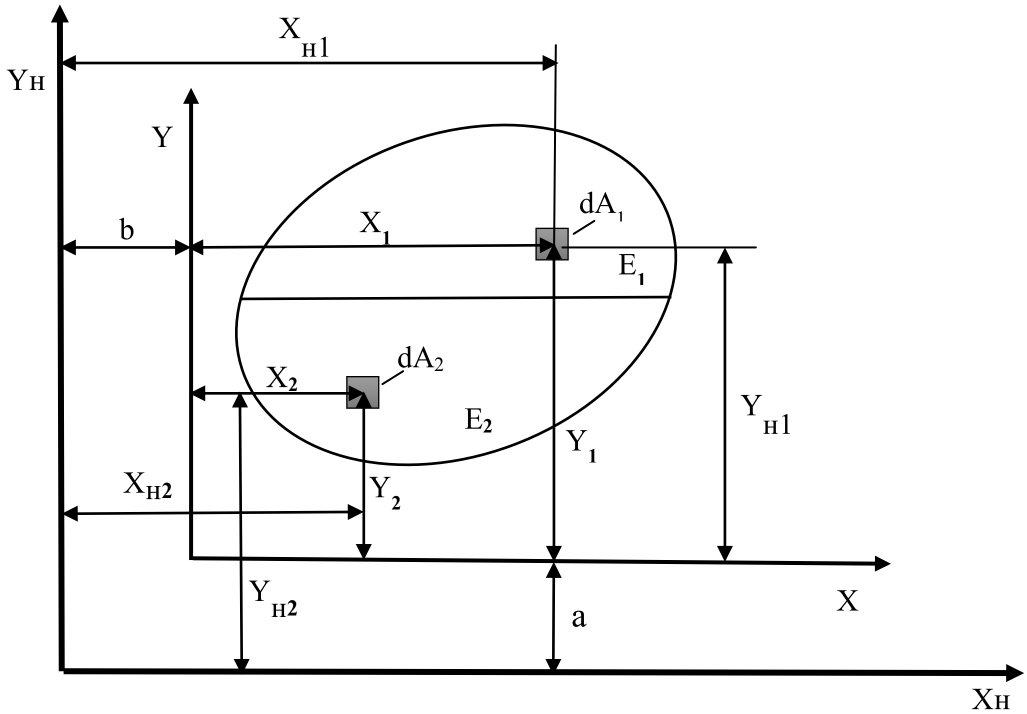

Рис. 1. Осевое сечение стержня произвольной формы, состоящее из прочно соединенных между собой стержней

Формулы для статических моментов площади относительно осей x и y, известные из курса «Сопротивление материалов» имеют вид:

$$S_x = \int_A y dA; S_y = \int_A x dA. \quad (1)$$

По аналогии статические моменты жёсткости сечения, состоящего из двух материалов относительно тех же осей можно представить в виде:

$$ES_x = E_1 \int_{A1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A2} y_2 dA_2, \quad (2)$$

$$ES_y = E_1 \int_{A1} x_1 dA_1 + E_2 \int_{A2} x_2 dA_2. \quad (3)$$

Где: ES_x и ES_y - статические моменты жёсткости сечения относительно осей x и y соответственно.

$S_{x1} = \int_{A1} y_1 dA_1$; $S_{x2} = \int_{A2} y_2 dA_2$; $S_{y1} = \int_{A1} x_1 dA_1$; $S_{y2} = \int_{A2} x_2 dA_2$ - статические моменты площадей A_1 и A_2 относительно осей x и y.

В соответствии со знаком координат статический момент жёсткости может быть больше или меньше нуля. Поэтому для любого подобного сечения стержня можно определить местоположение координатных осей, относительно которых суммарный статический момент жёсткости сечения будет равен нулю. Допустим, что известны координаты центра жёсткости сечения $x_{ж}$ и $y_{ж}$ относительно принятых осей x и y. В этом случае статические моменты жёсткости сечения ES_x и ES_y можно представить в виде:

$$ES_x = (E_1 A_1 + E_2 A_2) y_{ж}, \quad (4)$$

$$ES_y = (E_1 A_1 + E_2 A_2) x_{ж}. \quad (5)$$

Рассматривая совместно выражения (2), (3), (4) и (5) получим выражение для определения местоположения центра жёсткости сечения:

$$x_{ж} = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad (6)$$

$$y_{ж} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (7)$$

Если поперечное сечение стержня состоит из «n» материалов, отличающихся между собой продольными модулями упругости, то выражение для определения координат жёсткости сечения можно представить в виде:

$$x_{ж} = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2} + \ldots + E_n S_{yn}}{(E_1 A_1 + E_2 A_2 + \ldots + E_n A_n)}, \quad (8)$$

$$y_{ж} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2} + \ldots + E_n S_{xn}}{(E_1 A_1 + E_2 A_2 + \ldots + E_n A_n)}. \quad (9)$$

Анализируя выражения (8) и (9) приходим к выводу, что это выражение будет полностью соответствовать формулам сопротивления материалов для определения центра тяжести сечения из однородного материала, если $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$.

Из курса «Сопротивление материалов» известно, что осевыми моментами инерции для плоских сечений из однородного материала называются интегралы произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до соответствующих осей [1-3] и их можно представить в виде:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \; I_y = \int_A x^2 dA. \quad (10)$$

Центробежный момент инерции представляет собой интеграл вида:

$$I_{xy} = \int_A xydA. \qquad (11)$$

Полярный момент инерции – это интеграл вида:

$$I\rho = \int_A \rho^2 dA. \qquad (12)$$

Где ρ - расстояние от начала координат до элементарной площадки dA.

В случае расчёта на прочность и жёсткость при изгибе и устойчивости стержней, сечения которых состоят из двух или более различных материалов и жёстко соединённых между собой, следует использовать момент инерции жёсткости сечения. Для определения момента инерции жёсткости сечения рассмотрим стержень, состоящий из двух разнородных материалов. Такое сечение показано на рисунке 1. В этом случае момент инерции жёсткости сечения относительно осей X и Y можно представить в виде:

$$(EI_x)_{ж} = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2, \qquad (13)$$

$$(EI_y)_{ж} = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \qquad (14)$$

Центробежный момент инерции жёсткости сечения можно выразить следующим образом:

$$(EI_{xy})_{ж} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \qquad (15)$$

Выражения (13), разделенное на выражение (15), с учётом выражения (10), разделенного на выражение (12), можно представить в виде:

$$(EI_x)_{ж} = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}, \qquad (16)$$

$$(EI_y)_{ж} = E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}, \qquad (17)$$

$$(EI_{xy})_{ж} = E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2}. \qquad (18)$$

Если стержень состоит из «n» разнородных материалов, то моменты инерции жёсткости такого сечения будут иметь вид:

$$(EI_x)_{ж} = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + ... + E_n I_{xn}, \qquad (19)$$

$$(EI_y)_{ж} = E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + ... + E_n I_{yn}, \qquad (20)$$

$$(EI_{xy})_{ж} = E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2} + ... + E_n I_{xnyn}. \qquad (21)$$

Величины осевых моментов инерции жёсткости всегда будут положительны. В зависимости от положения осей X и Y центробежный момент жёсткости сечения может быть положительным и отрицательным, а также равен нулю.

Рассмотрим особые свойства моментов жёсткости плоских сечений. Установим формулы связи между моментами жёсткости при параллельном переносе осей. Оси Xн и Yн параллельны первоначальным осям X и Y. Статические моменты жёсткости сечения относительно осей Xн и Yн можно
представить в виде:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} y_{н_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{н_2} dA_2, \qquad (22)$$

$$ES_{yн} = E_1 \int_{A_1} x_{н_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{н2} dA_2. \qquad (23)$$

Так как $y_{н1} = y_1 + a$; $y_{н2} = y_2 + a$, то выражение (22) можно представить в виде:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} (y_1 \ + a) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 \ + a) dA_2 . \tag{24}$$

Раскрывая круглые скобки после некоторых математических преобразований и с учётом того, что величина «a» расстояние между осями X и Xн постоянная, получим:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} y_1 \ dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2 + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot a . \tag{25}$$

С учётом выражения (2) окончательно выражение (25) примет вид:

$$ES_{xн} = ES_x + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot a . \tag{26}$$

Рассматривая аналогично выражение (23) получим величину $ES_{yн}$,которая примет вид:

$$ES_{yн} = ES_y + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot b . \tag{27}$$

Если поперечное сечение стержня состоит из «n» материалов, отличающихся между собой продольными модулями упругости, формулы для определения статического момента жёсткости при параллельном переносе осей будут иметь вид:

$$ES_{xн} = ES_x + a \sum_{i=1}^{n} E_i A_i , \tag{28}$$

$$ES_{yн} = ES_y + a \sum_{i=1}^{n} E_i A_i , \tag{29}$$

где: $E_i A_i$ - жёсткости соответствующих частей сечения при растяжении или сжатии. ES_x и ES_y - статические моменты жёсткости сечения относительно первоначальных осей X и Y.

Геометрические характеристики при параллельном переносе осей. Аналогично определяем свойства моментов инерции жёсткости при параллельном переносе осей в соответствии с рисунком 1.

Моменты инерции жёсткости сечения относительно осей $x_н$ и $y_н$, используя выражения (13) и (14) представим в виде:

$$(EI_x)_{жн} = E_1 \int_{A_1} y_{н_1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{н_2}^2 dA_2 , \tag{30}$$

$$(EI_y)_{жн} = E_1 \int_{A_1} x_{н_1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{н2}^2 dA_2 . \tag{31}$$

Выражение (30) с учётом того, что $y_{н1} = y_1 + a; y_{н2} = y_2 + a$ можно представить в виде:

$$(EI_x)_{жн} = E_1 \int_{A_1} (y_1 + a)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + a)^2 dA_2 . \tag{32}$$

После ряда математических преобразований получим:

$$(EI_x)_{жн} = E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + 2a\left(\int_{A_1} y_1 \ dA_1 + \int_{A_2} y_2 dA_2\right) + a^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2]. \tag{33}$$

С учётом выражений (2) и (16) выражение (33) можно представить в виде:

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_ж + 2a(ES_x) + a^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2]. \tag{34}$$

Аналогично рассматривая выражение (31) получим:

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_ж + 2b(ES_y) + b^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2]. \tag{35}$$

Центробежный момент инерции жёсткости сечения относительно осей $x_н$ и $y_н$, используя выражение (15) получим:

$$(EI_{xy})_{жн} = E_1 \int_{A_1} \mathrm{x}_{\mathrm{H}1} \mathrm{y}_{\mathrm{H}1} \, dA_1 + E_2 \int_{A_2} \mathrm{x}_{\mathrm{H}2} \mathrm{y}_{\mathrm{H}2} \, dA_2 . \quad (36)$$

Подставив значения $\mathrm{x}_{\mathrm{H}1}, \mathrm{x}_{\mathrm{H}2}, \mathrm{y}_{\mathrm{H}1}, \mathrm{y}_{\mathrm{H}2}$, выраженные через координаты относительно первоначальных осей x и y с учётом расстояний между новыми осями a и b получим:

$$(EI_{xy})_{жн} = E_1 \int_{A_1} (\mathrm{x}_1 + \mathrm{b})(\mathrm{y}_1 + a) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (\mathrm{x}_2 + \mathrm{b})(\mathrm{y}_2 + a) dA_2 . \quad (37)$$

После ряда математических преобразований выражение (37) имеет вид:

$$\begin{gathered}(EI_{xy})_{жн} = E_1 \int_{A_1} \mathrm{x}_1 \mathrm{y}_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} \mathrm{x}_2 \mathrm{y}_2 dA_2 + a[E_1 \int_{A_1} \mathrm{x}_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} \mathrm{x}_2 dA_2] + \\ + b[E_1 \int_{A_1} \mathrm{y}_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} \mathrm{y}_2 dA_2] + ab\left[E_1 A_1 + E_2 A_2\right]. \end{gathered} \quad (38)$$

С учётом выражений (2), (3) и (15) выражение (38) окончательно примет следующий вид:

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a(ES_y) + b(ES_x) + a \cdot b[E_1 A_1 + E_2 A_2] . \quad (39)$$

Центральными осями жёсткости назовём оси, проходящие через центр жёсткости сечения, координаты которых определяют из выражений (8) и (9). Очевидно, это статические моменты жёсткости относительно этих осей ES_x и ES_y будут равны нулю. Если за оси отсчёта взять центральные оси жёсткости, то выражения (34), (35) и (39) примут следующий вид:

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_{ж} + a^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2], \quad (40)$$

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_{ж} + b^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2], \quad (41)$$

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a \cdot b[E_1 A_1 + E_2 A_2] . \quad (42)$$

Если сечение представлено в виде «n» разнородных материалов, то выражение (40), разделенное на выражение(42) можно представить в виде:

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_{ж} + a^2 \sum_{i=1}^{n} E_i A_i , \quad (43)$$

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_{ж} + b^2 \sum_{i=1}^{n} E_i A_i , \quad (44)$$

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a \cdot b \sum_{i=1}^{n} E_i A_i . \quad (45)$$

Из выражений (43) и (44) следует, что осевой момент инерции жёсткости сечения относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции жёсткости этой фигуры относительно центральной оси жёсткости плюс произведение суммы жёсткостей отдельный частей сечения при осевом растяжении или сжатии на квадрат расстояния между соответствующими осями.

Пример. Для сечения, показанного на рис. 2, состоящего из стальной, медной и алюминиевых пластин, определить место положения центральных осей жёсткости $x_{ж}$ и $y_{ж}$, а также момент инерции жёсткости относительно этих осей. Сталь $E_1 = 2 \cdot 10^5 \, МПА$, медь $E_2 = 1{,}2 \cdot 10^5 \, МПА$, алюминий $E_3 = 0{,}7 \cdot 10^5 \, МПА$

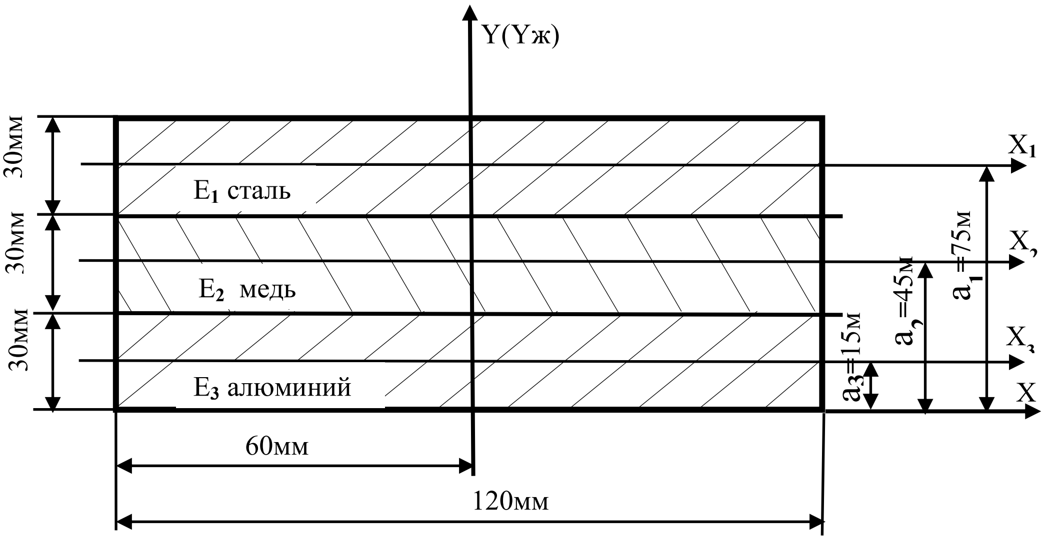

Рис. 2. Осевое сечение стержня, состоящее из стального, медного и алюминиевого стержней

Ось у является осью симметрии сечения, и поэтому она является центральной осью жёсткости сечения.

Где: a_1, a_2, a_3 - расстояния от оси отсчёта х до центра тяжести сечений из стали, меди и алюминия соответственно.

Используя выражение (9) находим координату $y_{ж}$, которая определяет место положения центральной оси жёсткости х.

$$y_{ж} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2} + E_3 S_{x3}}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3}.$$

Так как статический момент площади S_x - это произведение площади на расстояние от оси отсчёта до центральной оси отдельной фигуры, то будем иметь

$$y_{ж} = \frac{E_1 A_1 a_1 + E_2 A_2 a_2 + E_3 A_3 a_3}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3}.$$

Подставив численные значения в полученное выражение будем иметь:

$$y_{ж} = \frac{2\cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120 + 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120 \cdot 45 + 0{,}7 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120 \cdot 15}{2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120 + 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120 + 0{,}7 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 120} = 55мм.$$

На рис. 3 показано сечение с полученными центральными осями жёсткости сечения.

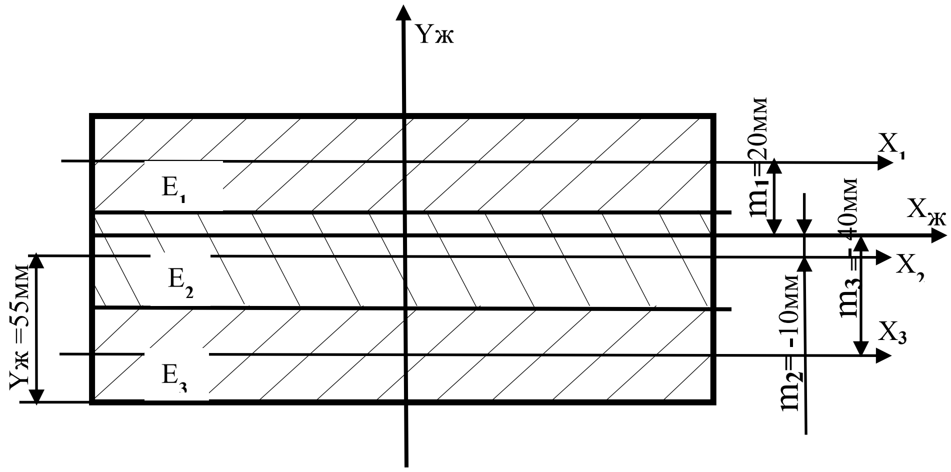

Рис. 3. Осевое сечение стержня с координатами центра жесткости сечения Хж и Уж

Проверим правильность определения места положения центральной оси жесткости. Относительно оси Хж статический момент жесткости сечения должен быть равен нулю. m1, m2 и m3 – расстояния от центральной оси жесткости до центральных осей отдельных фигур.

$$EIx_{ж} = E_1 A_1 m_1 + E_2 A_2 (-m_2) + E_3 A_3 (-m_3).$$

Подставив численные значения, получим:

$$EIx_{ж} = 2*10^5*30*120*20 + 1{,}2*10^5*30*120*(-10) + 0{,}7*10^5 30*120*(-40) =$$
$$= 144000*10^5 - 43200*10^5 - 100800*10^5 = 144*10^8 - 144*10^8 = 0$$

Полученное значение $EIx_{ж}$ показывает, что местоположение центральной оси жесткости установлено правильно. Определим момент инерции жесткости сечения относительно оси Хж, используя выражение (16), которое в расширенном виде представим:

$$(EIx)_{ж} = E_1\left(\frac{b_1 h_1}{12}^3 + b_1 h_1 m_1^2\right) + E_2\left(\frac{b_2 h_2}{12}^3 + b_2 h_2 m_2^2\right) + E_3\left(\frac{b_3 h_3}{12}^3 + b_3 h_3 m_3^2\right).$$

где b_1, b_2, b_3 - ширина каждого сечения, равная 120мм; $h_{1,} h_2, h_3$- высота каждого сечения, равная 30мм.Подставив численные значения в последнее выражение, получим:

$$(EIx)_{ж} = 2*10^5\left[\frac{120*30^3}{12} + 120*30*20^2\right] + 1{,}2*10^5\left[\frac{120*30^3}{12} + 120*30*(-10)^2\right] +$$
$$+ 0{,}7*10^5\left[\frac{120*30^3}{12} + 120*30*(-40)\right] = 2*10^5\left(27*10^4 + 144*10^4\right) +$$
$$+ 1{,}2*10^5\left(27*10^4 + 36*10^4\right) + 0{,}7*10^5\left(27*10^4 + 576*10^4\right) =$$
$$= 342*10^9 + 75{,}6*10^9 + 422*10^9 = 839{,}7*10^9\ Нмм^2.$$

Определим момент инерции жесткости сечения относительно оси Yж, используя выражение (17).

$$(EIy)_{ж} = E_1 Iy_1 + E_2 Iy_2 + EIy_3.$$

Подставив значения Yx_1, Yx_2, Yx_3 последнее выражение, получим:

$$(EIy)_{ж} = E_1 \frac{h_1 b_1}{12}^3 + E_2 \frac{h_2 b_2}{12}^3 + E_3 \frac{h_3 b_3}{12}^3 .$$

Подставив численные значения в последнее выражение, получим:

$$(EIy)_{ж} = 2*10^5 * \frac{30*120^3}{12} + 1{,}2*10^5 * \frac{30*120^3}{12} + 0{,}7*10^5 * \frac{30*120^3}{12} =$$
$$= 3{,}9*10^5 * \frac{30*120^3}{12} = 1684{,}*10^9\ Нмм^2.$$

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах на прочность такого стержня при изгибе, растяжении и сжатии, устойчивости и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов/В.И. Феодосьев.- Москва: Наука, 1972. – 541с.
2. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Ачирёв, А.Л. Квитки. – Киев: Техника, 1967. – 783с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва : Наука, 1972.– 559с.

E-mail: dudjak@mail.ru
dikanz@tut.by

Поступила в редакцию 11.10.2015