УДК621.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБНО-КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С ПРОДОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

д.т.н. [1] **Омаров Т.И.,** к.ф.-м.н. [1]**Тулегенова К.Б.,** к.п.н. [2] **Гончарова И.А.,** [2]**Сибилькова Н.П.**

[1]*Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И.Сатпаева, Алма-Ата, Казахстан*
[2]*МЭИ, филиал, Смоленск, Россия*

В технических устройствах и оборудовании с целью облегчения конструкции очень часто применяют стержни, валы и балки с трубчатым поперечным сечением. Рассмотрим задачу определения основных параметров для составления динамической модели колеблющейся балки переменного поперечного сечения с внутренним продольным отверстием постоянного радиуса r_0 (рисунок 1). Этими параметрами являются приведенная масса и приведенная изгибная жесткость балки. Приведение масс осуществляется из условия равенства кинетических энергий исходной (приводимой) системы (рисунок 1) и приведенной (динамической модели) системы (рисунок 2). Показанную на рисунке 1 балку считаем системой с распределёнными параметрами, а на рисунке 2 приведенную систему считаем дискретной, поскольку вся масса балки приводится в одну точку B.

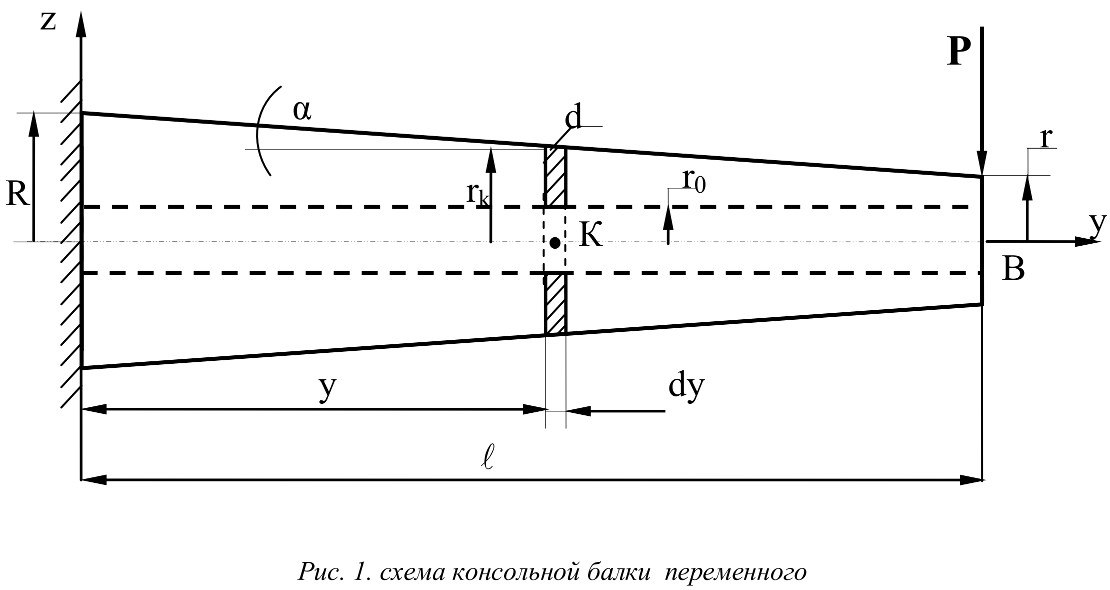

Рис. 1. схема консольной балки переменного поперечного сечения с продольным отверстием

Кинетическая энергия T_B приведенной в т. B дискретной массы равна

$$T_B = \frac{m_B\, v_B^2}{2}, \quad (1)$$

где m_B – приведённая в точку B масса балки;

V_B – скорость поперечных колебаний точки В.

Кинетическую энергию Т исходной системы можно определить используя метод Рэлея [1] из выражения

$$T = \int_0^m \frac{v_k^2 \, dm}{2}, \qquad (2)$$

где dm – масса элементарного выделенного участка; из-за бесконечно малой толщины сечения, занимаемого массой dm и с целью упрощения дальнейших расчетов принимаем, что элементарное сечение имеет форму цилиндрического, а не конуса; вся же масса неравномерно распределена по участку АВ длиной ℓ стержня (балки);

m - масса всего стержня;

v_k – скорость точки К упругой линии прогнутой балки, совпадающей с центром указанного сечения, $v_k = \frac{dz_k}{dt} = \dot{z}_k$.

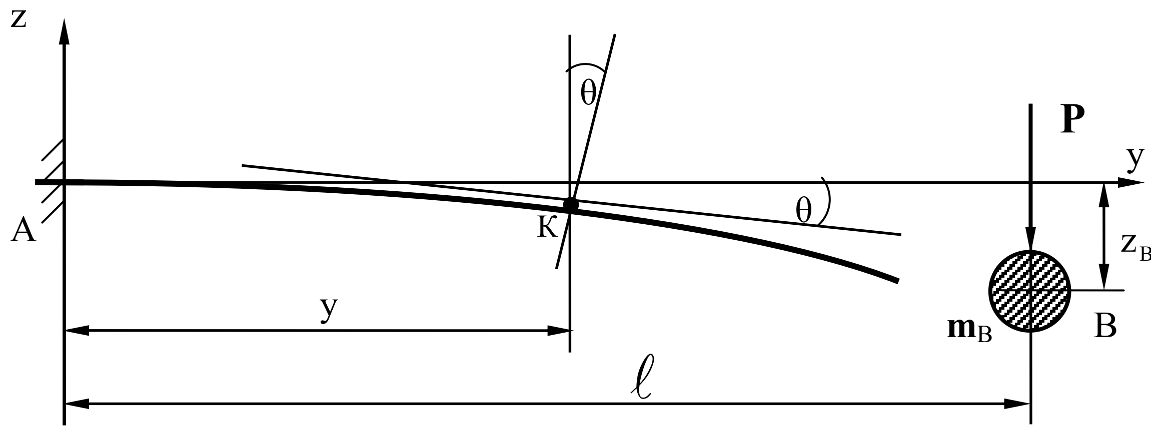

Рис. 2. Расчетная схема консольной балки
с переменным поперечным сечением

Элементарная масса dm определяется как масса элементарного кольца по формуле [2]

$$dm = \pi\rho\left(r_k^2 - r_0^2\right)dy \qquad \text{или} \qquad dm = \pi\rho\alpha^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy,$$

где $r_k = R - y \cdot tg\alpha \approx R - y \cdot \alpha = \alpha\left(\frac{R}{\alpha} - y\right)$ или $r_k = \alpha(b-y)$ – внешний радиус балки в произвольном сечении, находящемся на расстоянии y от начала координат; $a = \frac{r_0}{\alpha}$.

Объем балки $\qquad V = \pi\ell\frac{R^2 + r^2 + Rr - 3r_0^2}{3}.$

Масса балки $\qquad m = \rho\pi\ell\frac{R^2 + r^2 + Rr - 3r_0^2}{3}.$

Из-за неравномерного распределения по длине массы балки её центральный момент инерции сечения величина переменная. В сечении балки, расположенном на расстоянии y от начала осей координат центральный момент инерции сечения определится по формуле

$$I_x(y) = \frac{\pi(2\,r_k)^4}{64} - \frac{\pi(2r_0)^4}{64} \approx 0{,}8\left[\alpha^4(b-y)^4 - r_0^4\right] = 0{,}8\,\alpha^4\left[(b-y)^4 - a^4\right]. \qquad (3)$$

Используя выражение $dm = \pi\rho\alpha^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy$, преобразуем интеграл (2) для определения кинетической энергии исходной системы с распределенными параметрами

$$T = \int_0^m \frac{v_k^2\, dm}{2} = \frac{\pi\rho\alpha^2}{2}\int_0^\ell v_k^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy, \qquad (4)$$

где $\mathbf{v_k}$ – скорость точки упругой линии прогнутой балки, совпадающей с центром указанного сечения, $v_k = \dfrac{dz_k}{dt} = \dot{z}_k$.

В выражении (4), определяющем кинетическую энергию исходной системы перед определенным интегралом введем массу, сделав следующее преобразование [3]

$$T = \frac{3\,\alpha^2}{2\ell\left(R^2 + r^2 + R\cdot r - 3r_0^2\right)}\frac{\rho\pi\,\ell\left(R^2 + r^2 + R\cdot r - 3r_0^2\right)}{3}\int_0^\ell v_k^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy$$

или

$$T = \frac{3\,\alpha^2}{2\ell\left(R^2 + r^2 + R\cdot r - 3r_0^2\right)}\,m\int_0^\ell v_k^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy. \qquad (5)$$

Для того чтобы решить интеграл $\int_0^\ell v_k^2\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy$ нужно найти выражение для определения скорости v_k. Для этого следует составить и дважды проинтегрировать дифференциальное уравнение упругой линии исследуемой балки.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки [3]

$\dfrac{d^2z}{dy^2} = \dfrac{M_y}{E\,I_x(y)}$, или с учетом формулы (3)

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{P(\ell - y)}{0{,}8E\alpha^4\left[(b-y)^4 - a^4\right]}.$$

Для удобства интегрирования введем новую переменную $x = b - y$.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки примет вид

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{P(\ell - b + x)}{0{,}8E\alpha^4\left[x^4 - a^4\right]}.$$

Первый интеграл, определяющий угол поворота сечения θ

$$\theta = -\frac{P}{3{,}2Ea^3\alpha^4}\left[a\ln\left|\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right| + D_{14}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + 2D_{14}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C_1\right],$$

где обозначено $D_{14} = (\ell - b)$.

Проинтегрировав вышестоящее уравнение угла поворота сечения θ и подставив x = b – y при нулевых начальных условиях [y = 0; θ(0) = 0; z(0) = 0], получим уравнение упругой линии балки или уравнение прогиба в виде функции

$$z = -\frac{P}{3{,}2Ea^3\alpha^4}\left[D_{14}a\ln\left|\frac{a+b-y}{(a-b+y)\left(a^2+(b-y)^2\right)}\right| + a(b-y)\ln\left|\frac{a^2+(b-y)^2}{a^2-(b-y)^2}\right| + \right. \quad (6)$$

$$\left. + D_{14}(b-y)\ln\left|a^2-(b-y)^2\right| - 2\left[D_{14}(b-y)-a^2\right]arctg\frac{b-y}{a} - D_{14}a + D_{15}(b-y) + D_{16}\right]$$

Здесь D_{15} и D_{16} соответствуют постоянным интегрирования C_1 и C_2

$$D_{15} = -\left[a\ln\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right| + D_{14}\ln\left|\frac{a+d}{a-b}\right| + 2D_{14}\mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right] = C_1;$$

$$D_{16} = -\left[D_{14}a\ln\left|\frac{a+b}{(a-b)\left(a^2+b^2\right)}\right| + a\,b\ln\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right| + \right.$$

$$\left. + D_{14}b\ln\left|a^2-b^2\right| - 2\left[D_{14}b-a^2\right]\mathrm{arctg}\frac{b}{a} - D_{14}a + D_{15}(b)\right] = C_2.$$

Из уравнения прогиба (6) найдем приведенную изгибную жесткость балки. Она равна обратной величине коэффициента при силе P при y = ℓ

$$c_u = \frac{3{,}2Ea^3\alpha^4}{D_{17}},$$

где обозначено

$$D_{17} = \left[D_{14}a\ln\left|\frac{a-D_{14}}{(a+D_{14})\left(a^2+D_{14}^2\right)}\right| - aD_{14}\ln\left|\frac{a^2+D_{14}^2}{a^2-D_{14}^2}\right| - \right.$$

$$\left. -D_{14}^2\ln\left|a^2-D_{14}^2\right| - 2\left[D_{14}^2-a^2\right]\mathrm{arctg}\frac{D_{14}}{a} - D_{14}a - D_{14}D_{15} + D_{16}\right].$$

Для определения скорости v_k нужно продифференцировать по времени t уравнение прогиба (6), в котором только сила P зависит от времени. Взяв производную и возведя ее в квадрат, найдем выражение для скорости

$$v_k^2 = \frac{\dot{P}^2}{10{,}24\,E^2 a^6 \alpha^8}\Bigg[D_{14} a \ln\left|\frac{a+b-y}{(a-b+y)\left(a^2+(b-y)^2\right)}\right| + a(b-y)\ln\left|\frac{a^2+(b-y)^2}{a^2-(b-y)^2}\right| +$$

$$+ D_{14}(b-y)\ln\left|a^2-(b-y)^2\right| - 2\left[D_{14}(b-y)-a^2\right]arctg\frac{b-y}{a} - D_{14}a + D_{15}(b-y) + D_{16}\Bigg]^2 \quad (7)$$

Для определения кинетической энергии исходной системы полученное выражение для скорости подставляется в (5) под знак интеграла

$$T = B'm\int_0^{\ell}\Bigg[D_{14} a \ln\left|\frac{a+b-y}{(a-b+y)\left(a^2+(b-y)^2\right)}\right| + a(b-y)\ln\left|\frac{a^2+(b-y)^2}{a^2-(b-y)^2}\right| +$$

$$+ D_{14}(b-y)\ln\left|a^2-(b-y)^2\right| - 2\left[D_{14}(b-y)-a^2\right]arctg\frac{b-y}{a} - D_{14}a + D_{15}(b-y) + D_{16}\Bigg]^2 \times$$

$$\times\left[(b-y)^2 - a^2\right]dy. \quad (8)$$

Здесь $B' = \dfrac{3\,\dot{P}^2}{20{,}48\ell\left(R^2+r^2+R\cdot r-3r_0^2\right)E^2 a^6 \alpha^6}$.

Интегрирование выражения (8) в общем виде без конкретных численных значений постоянных величин a, b, D_{14}, D_{15}, D_{16} не целесообразно, поскольку в результате получается сложная зависимость, занимающая несколько страниц текста. При исследовании механических систем с заданными или определенными численными параметрами можно воспользоваться программой «Maple» или «Mathcad» и получить конкретное численное значение определенного интеграла.

В данном случае формула кинетической энергии исходной системы (8) запишется в виде

$$T = \frac{3\,\dot{P}^2 D_{18} m}{20{,}48\ell\left(R^2+r^2+R\cdot r-3r_0^2\right)E^2 a^6 \alpha^6}\ , \quad (9)$$

где через D_{18} обозначено прогнозируемое значение определенного интеграла.

Для определения кинетической энергии приведенной системы определяется скорость точки B из уравнения (6) при $y = \ell$

$$v_B = -\frac{\dot{P}}{3{,}2\,Ea^3\alpha^4}D_{17}.$$

Тогда формула кинетической энергии приведенной системы (1) примет вид

$$T_B = \frac{\dot{P}^2 m_B}{20{,}48\,E^2 a^6 \alpha^8}D_{17}^2. \quad (10)$$

Приравняв правые части выражений кинетических энергий исходной (9) и приведенной (10) систем получаем формулу для определения приведенной массы консольной балки переменного поперечного сечения с продольным отверстием постоянного диаметра

$$m_B = \frac{3\,D_{18}\alpha^2}{\ell\left(R^2 + r^2 + R\cdot r - 3r_0^2\right)D_{17}^2}\,m.$$

Полученные формулы для определения приведенной массы и приведенной изгибной жесткости могут быть использованы для составления динамической модели консольной балки переменного поперечного сечения с продольным отверстием.

РЕЗЮМЕ

В технических устройствах и оборудовании часто применяют стержни, валы и балки с трубчатым поперечным сечением. В работе рассматривается задача определения основных параметров для составления динамической модели колеблющейся балки переменного поперечного сечения с внутренним продольным отверстием постоянного радиуса. Данная задача решается с целью облегчения конструкции оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука; Лейпциг: Тойбнер, 1981. – 720 с.
3. Омаров, Т.И. Составление динамической модели для исследования колебаний консольной балки переменного поперечного сечения / Т.И. Омаров, К.Б. Тулегенова, Л.В. Кончина, И.А. Гончарова // Сб. тр. II межд. научн. конф. Энергетика, информатика, инновации, т.1, Смоленск, 2012, с. 289-293.

SUMMARY

Rods, shafts and beams with tubular cross section are often used in the technical devices and equipment. The problem of determining the basic parameters for drawing up a dynamic model of a vibrating beam with variable cross-section and an inner longitudinal bore of constant radius are reviewed in this article. This problem is solved in order to facilitate equipment design.

E-mail: omarov_tim@list.ru
kuralay.t@mail.ru
goncharovainnaa@yandex.ru
sibilkova@mail.ru

Поступила в редакцию 23.10.2015