

## О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛАСТОМЕР

асп. <sup>1</sup>Маевская С.С., д.ф.-м.н. <sup>2</sup>Михасев Г.И.

<sup>1</sup>*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск*  
<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет, Минск*

Тонкостенные слоистые элементы (оболочки, панели, пластины, балки) широко применяются во многих инженерных сооружениях, таких как воздушные и космические транспортные средства, подводные объекты, автомобили и т.п. ([1], [2]). Применяя новые материалы с различными физическими свойствами, можно конструировать «сэндвич-структуры», удовлетворяющие всем современным требованиям, включая высокую жесткость, безопасность и безшумность.

Одной из актуальных проблем, решаемых сегодня, является виброзащита тонкостенных конструкций, испытывающих внешние колебательные нагрузки. Новые возможности для решения данной проблемы открывают многофункциональные материалы с активными и адаптивными свойствами (так называемые «интеллектуальные» материалы). Магнитореологический эластомер (МРЭ) – это «интеллектуальный» материал, упругие свойства которого изменяются в зависимости от величины приложенного магнитного поля ([3], [4]). Благодаря возможности управления вязкоупругими свойствами МРЭ в широком диапазоне можно ожидать, что материал, имеющий встроенный МРЭ между упругих слоев обеспечит для «сэндвича» широкий спектр реологических свойств. В виду этого можно говорить о возможности эффективного использования МРЭ в различных устройствах виброзащиты.

Большинство работ, в которых рассматривается гашение вибраций многослойных тонкостенных конструкции, было сделано для случаев, когда являющийся прослойкой «интеллектуальный» материал был жидкостью ([5], [6], [7], [8]). Однако эластомеры имеют значительное преимущество по сравнению с жидкостями, поскольку они способны сохранять геометрическую форму при низком уровне магнитного поля.

При том, что достаточно много работ посвящено изучению свойств МРЭ и эластомеров (см., например, [4], [9], [7]), лишь только некоторые из них посвящены исследованиям динамического расчета адаптивных «сэндвич» балок, пластин и оболочек, содержащих в качестве вязкоупругого наполнителя МРЭ. Объяснить это можно тем, что реакция композитной конструкции, содержащей МРЭ существенно зависит от соотношения масштаба времени реакции МРЭ и динамических характеристик контролируемой конструкции ([10], [11]). Поэтому большинство авторов изучали адаптивную структуру «сэндвича» в случаях, когда приложенное магнитное поле было стационарным.

К настоящему времени известно лишь несколько работ, посвященных исследованиям динамического расчета «сэндвич-оболочек» с ядром чувствительным к действию магнитного или электрического поля. В [8], была разработана аналитическая модель, адаптированная к дискретному методу конечных элементов, для исследования вибрации и демпфирующих характеристик трехслойной ортотропной цилиндрической оболочки с электрореологическим ядром. Свободные колебания тонких круговых слоистых цилиндров с однородными магнитореологическими слоями при различных уровнях приложенного магнитного поля были исследованы в [12]. Одна из последних работ [13] показала, что применение постоянного магнитного поля может привести к сильному искажению мод, соответствующих низким частотам. В частности, если круговой

цилиндрический «сэндвич», имеющий сильно поляризованное магнитоэологическое ядро, подвергается воздействию однородного стационарного магнитного поля, силовые линии которого образуют различные углы с намагничиваемыми частицами в МРЭ, то моды, соответствующие наименьшим частотам, локализуются вблизи линий, где приведенный модуль сдвига достигает экстремального значения. Работы, посвященные исследованию влияния магнитного поля на собственные частоты и диссипативные свойства слоистых магнитоэологических панелей на данный момент отсутствуют.

Целью данной работы является исследование возможности эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы свободных колебаний трехслойной цилиндрической панели, содержащей МРЭ.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехслойную цилиндрическую панель, внешние слои которой не восприимчивы к магнитному полю, а внутренний представляет собой магнитоэологический эластомер (см. рис 1). Каждый из слоев панели характеризуется толщиной  $h_k$ , плотностью  $\rho_k$ , модулем Юнга  $E_k$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Систему координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  свяжем с серединной плоскостью заполнителя (МРЭ). Здесь  $L_1$  – длина панели,  $L_2$  – ширина панели,  $\varphi_1$  – угол раствора,  $h_1, h_3$  толщины несущих слоев,  $h_2$  – толщина МРЭ. Направления координатных осей указаны на рис. 1.

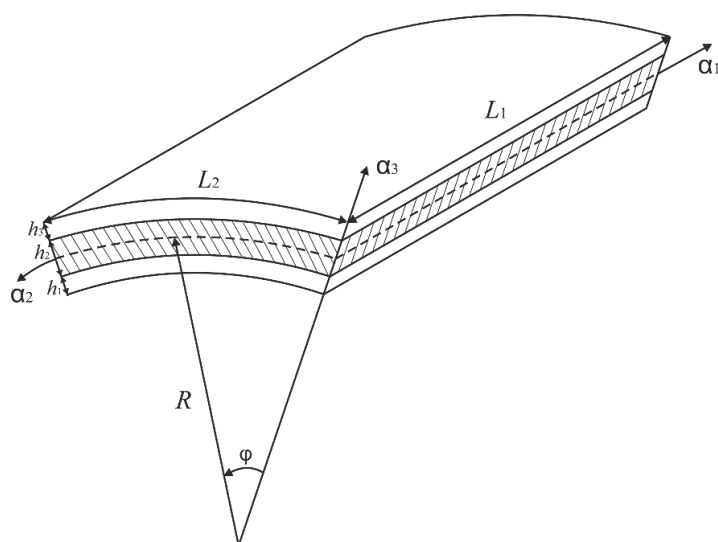


Рис. 1. Трехслойная цилиндрическая панель, содержащая магнитоэологический эластомер

Принимаем, что для панели справедливы гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные в работе [14] Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым.

Для исследования движения цилиндрической панели используем уравнения, описывающие движения многослойной цилиндрической оболочки, приведенные в работе [14].

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)} \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \Delta\right) \Delta^2 \chi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_1^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi &= q_n(\alpha_1, \alpha_2, t), \\ \Delta^2 \Phi - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi &= 0, \\ w &= \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta\right) \chi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$  – оператор Лапласа в криволинейной системе координат;  $E, \nu$  – осредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $h = h_1 + h_2 + h_3$  – суммарная толщина панели,  $h_1 = h_3$  – толщины несущих упругих слоев,  $h_2$  – толщина внутреннего вязкоупругого слоя, изготовленного из МРЭ,  $\rho$  – приведенная плотность «сэндвича»,  $\Phi, \chi$  – функции напряжений и перемещений,  $w$  – нормальный прогиб,  $t$  – время,  $\theta, \beta$  – параметры, зависящие от индукции магнитного поля и характеризующие приведенную жесткость панели.

В нашем случае  $\eta_3, \theta, \beta$  – комплексные параметры, зависящие от индукции  $B$  внешнего магнитного поля [13], определяемые по формулам [14]:

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad \beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{Eh\eta_1}, \quad \rho = \sum_{k=1}^N \rho_k \zeta_k, \quad h = \sum_{k=1}^N h_k, \quad E = \frac{1-\nu^2}{h} \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, \\ \nu &= \sum_{k=1}^N \nu_k \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad h \zeta_k = h_k, \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13} c_{12}, \\ \eta_3 &= 4 \sum_{k=1}^N (\zeta_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \quad h \zeta_n = \delta_n, \quad \gamma_k = \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad c_{12} = \sum_{k=1}^N \zeta_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \\ c_{13} &= \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k, \quad q_{44} = \frac{\left[ \sum_{k=1}^N \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left( \lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \quad G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}, \quad \lambda_k = \frac{\delta_k}{\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0(z) dz}, \\ \lambda_{kn} &= \frac{\delta_k}{\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz}, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{1k} = \frac{\delta_k}{\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz}, \quad g(z) = \int_0^z f_0(z) dz, \quad \frac{1}{12} h^3 \pi_{2k} = \frac{\delta_k}{\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z g(z) dz}, \\ \frac{1}{2} h^2 \pi_{3k} &= \frac{\delta_k}{\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz}, \quad f_0(z) = \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_N - z), \quad f_k(z) = \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z). \end{aligned}$$

В качестве граничных условий рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$\chi = \Delta \chi = \Delta^2 \chi = \Phi = \Delta \Phi = 0; \quad \alpha_1 = 0, L_1; \quad \alpha_2 = 0, L_2. \quad (2)$$

Рассмотрим свободные колебания, для которых в (1) положим  $q_n(\alpha_1, \alpha_2, t) = 0$ . С учетом граничных условий (2) собственные формы колебаний задаются функциями:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_A \exp(i\Omega t) \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2}, \\ \Phi &= \Phi_A \exp(i\Omega t) \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L_1} \sin \frac{\pi m \alpha_2}{L_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n, m$  – число волн в продольном и окружном направлении соответственно,  $\Omega = \omega + i\alpha$  – искомая комплексная собственная частота колебаний,  $L_1$  – длина панели,  $L_2$  – ширина панели.

Подставив вид решения (3) в систему уравнений (2) получили соотношение для комплексной собственной частоты колебаний:

$$\Omega^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left[ \frac{\eta h_*^2}{12} \Delta_{nm}^2 \frac{[1 + \theta K \Delta_{nm}]}{[1 + K \Delta_{nm}]} + \frac{R^4 n^4}{L_1^4 \Delta_{nm}^2} \right], \quad (4)$$

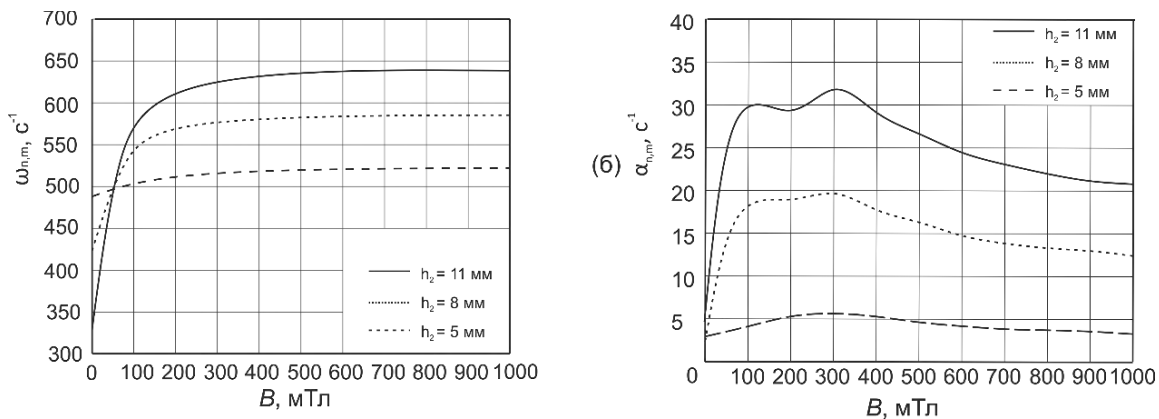
где

$$K = \frac{\pi^2 h_*^2}{\beta}, \quad \eta = \frac{\pi^4 \eta_3}{(1 - \nu^2)}, \quad \Delta_{nm} = \left( \frac{Rn}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{Rm}{L_2} \right)^2.$$

**Анализ результатов и примеры.** В качестве примера рассмотрим цилиндрическую трехслойную панель с параметрами  $R = 0,5$  м;  $L_1 = 1$  м,  $\varphi_1 = 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$ , внешние слои которой характеризуются параметрами  $h_1 = h_3 = 0,5$  мм;  $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$ ;  $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^9$  Па;  $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а для МРЭ-ядра параметрами:  $\rho_2 = 2,65 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_2 = 0,42$ ,  $h_2 = 5; 8; 11$  мм. Для определения  $E_2$  и  $G_2$  были использованы результаты экспериментально установленных зависимостей этих параметров от индукции магнитного поля [13]. Зависимость действительной ( $G'$ ,  $E'$ ) и мнимой ( $G''$ ,  $E''$ ) частей модуля сдвига  $G_2$  и модуля Юнга  $E_2$  для МРЭ от индукции магнитного поля  $B$  представлена следующими формулами [13]:

$$\begin{aligned} G_{MP} &= (4,500 + 14,978 \cdot B) \text{ кПа}, \quad G'_{MP} = (17,000 + 3,680 \cdot B) \text{ кПа}, \\ E_{MP} &= 13,230 + 45,040 \cdot B \text{ кПа}, \quad E'_{MP} = 50,000 + 10,920 \cdot B \text{ кПа}. \end{aligned} \quad (5)$$

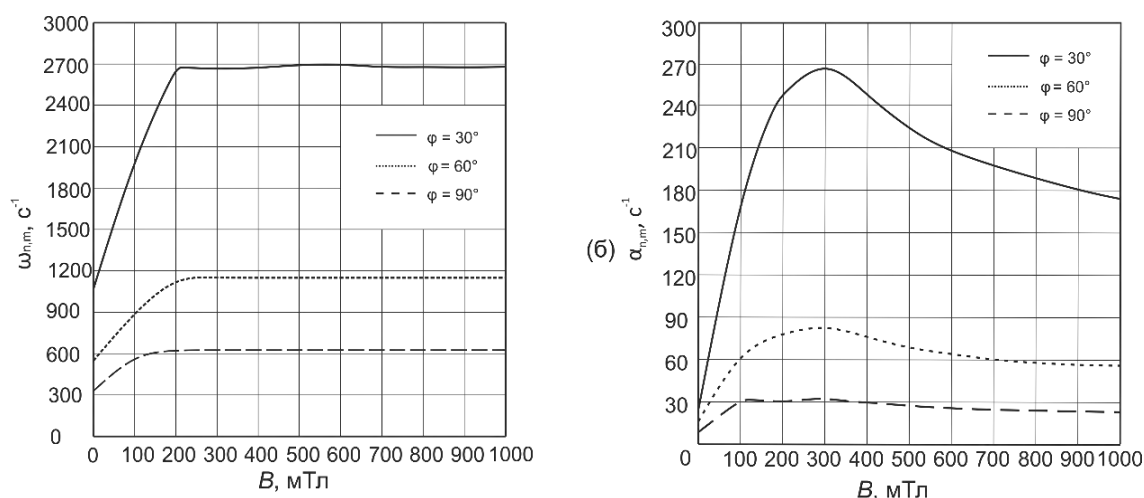
На рис 2 представлены зависимости действительной и мнимой частей собственной частоты колебаний от индукции магнитного поля  $B$  для трех толщин внутреннего слоя  $h_2$  с углом раствора  $\varphi_1 = 90^\circ$  при  $n = 1, m = 6$ .



Из рисунка 2 (а) видно, что увеличение индукции магнитного поля до уровня  $B = 200$  мТл приводит к быстрому увеличению значений собственных частот колебаний  $\omega_{nm}$ . Дальнейшее увеличение не оказывает существенного влияния на значения собственных частот  $\omega_{nm}$ . Заметно, что для меньших толщин ( $h_2 = 5; 8$  мм) возрастание собственных частот колебаний выражено менее явно, чем для толщины  $h_2 = 11$  мм, что объясняется слабой зависимостью действительной части приведенного модуля упругости «сэндвича» с меньшей толщиной МРЭ от магнитного поля. Рисунок 2 (б) показывает, что на отрезке от  $B = 0$  мТл до  $B = 300$  мТл происходит увеличение значений декремента  $\alpha_{nm}$ , однако дальнейшее увеличение интенсивности магнитного поля приводит к зна-

чительному снижению значений декремента  $\alpha_{nm}$ , что объясняется «насыщением» МРЭ [15].

На рис 3 представлены зависимости действительной и мнимой частей собственной частоты колебаний от индукции магнитного поля  $B$  для трех углов раствора  $\varphi_1 = 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$  при толщине внутреннего слоя  $h_2 = 11$  мм.



Из рисунка 3 видно, что чем меньше угол раствора панели, тем быстрее увеличиваются значения собственных частот  $\omega_{nm}$  и декрементов  $\alpha_{nm}$ . Заметно, что для больших углов раствора ( $\varphi_1 = 60^\circ; 90^\circ$ ) возрастание собственных частот и декрементов колебаний выражено менее явно, чем для угла  $\varphi_1 = 30^\circ$ .

### РЕЗЮМЕ

Рассматриваются свободные колебания цилиндрической трехслойной панели, содержащей магнитореологический эластомер. Анализируется влияние внешнего постоянного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний при различных толщинах магнитореологического ядра и различных углах раствора панели.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Korjakin, A. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells / A. Korjakin, R. Rikards, A. Chate, H. Altenbach // Composite Structures. – 1998. – №41. – P. 39–47.
2. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / M.S. Qatu // Composite Structures. – 2010. – № 93(1). – P. 14–31.
3. Jolly, M.R. Properties and applications of comercaal magnetorheological fluids / M.R Jolly, J.W. Bender, D.J. Carlson // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1999. – №10. – P 5–13.
4. Ginder, G.M. Rheology controlled by magnetic fields / G.M Ginder // Encyclopedia of Applied Physics. – 1996. – Vol.16. – P. 487–503.
5. Park, D.W. Shape control of an electrorheological fluid based smart plate / D.W. Park, S.B. Choi, S.B. Jung // Proc. SPIE. 3329. – 1998. – P. 824–835.

6. Shaw, J. Hybrid control of cantilevered ER sandwich beam for vibration suppression. / J. Shaw // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2000. – № 11. – P. 26–31.
7. Yalcintas, M. Magnetoreological and electroreological materials in adaptive structures and their performance comparison / M. Yalcintas, H. Dai // Smart Materials and Structures. – 1999. – № 8. – P. 560–573.
8. Yeh, J.-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer / J.-Y. Yeh // Aerospace Science and Technology. – 2008 doi:10.1016/j.jsv.2008.02.012.
9. Korobko, E.V. Rheological properties of magnetoelectrorheological fluids with complex disperse phase / E.V. Korobko, M.A. Zhuravski, Z.A. Novikova, V.A. Kuzmin // Journal of Physics: Conference Series. – 2009. – № 149. – P. 12–65.
10. Choi, Y.T. Assessment of time response characteristics of electrorheological and magnetorheological dampers / Y.T. Choi, N.M. Wereley // Proc. SPIE. 4331 – 2001. P. 92–102.
11. Mikhasev, G.I., On suppression of vibrations of three-layered beam containing magnetorheological composite / G.I. Mikhasev, E.V. Korobko, Z.A. Novikova // Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. – 2010 – № 4(13). – P. 49–53.
12. Mikhasev G.I. Theory of Thin Adaptive Laminated Shells Based on Magnetorheological Materials and its Application in Problems on Vibration Suppression. / G.I. Mikhasev, M.G. Botogova, E.V. Korobko // Shelllike Structures / Advanced Structured Materials; Eds. H. Altenbach and V. Eremeyev. – Springer, 2011. – Vol. 15, Chapter 48. – P. 727–750.
13. Mikhasev, G.I., On the influence of the magnetic field on the eigenmodes of thin laminated cylindrical shells containing magnetorheological elastomer / G.I. Mikhasev, H. Altenbach, E.A. Korchevskaya // Composite Structures. – July, 2014. – Vol. 113. – P. 186–196.
14. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288с.
15. Korobko, E.V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological Elastomer / E.V. Korobko, G.I. Mikhasev, Z.A. Novikova, M.A. Zhuravski // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol. 23, № 9. – P. 1019 – 1023.

#### SUMMARY

*Free vibrations of a cylindrical sandwich panel containing magnetorheological elastomer are considered. The influence of the external stationary magnetic field on the natural frequencies and damping ratio for different thicknesses of the MRE-core and different opening angles of the panel is analyzed.*

**E-mail:** [svetlanamaevskaya@yandex.ru](mailto:svetlanamaevskaya@yandex.ru)  
[mikhasev@bsu.by](mailto:mikhasev@bsu.by)

Поступила в редакцию 23.10.2015