

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СТРИГЕРАМИ И ШПАНГОУТОМ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Мухутдинов Р.Ф., к.ф.-м.н. Шигабутдинов Ф.Г.

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань*

**Введение.** Динамическое воздействие ударного типа испытывают многие оболочечные элементы строительной индустрии и машиностроения. В работах [1-4] авторами исследовались волновые продольно - поперечные движения тонкостенных цилиндрических и конических оболочек при продольном ударе в осесимметричной постановке задачи. Эти отклонения носили характер ослабления поперечных сечений или усиления отдельных поперечных сечений оболочки. В работе [5] рассматривались цилиндрические оболочки в неосесимметричной постановке задачи с дефектами, расположенными по угловой координате. В работе [6] исследовались цилиндрические и конические оболочки со стрингерами. В данной работе, являющейся логическим продолжением работ [5-6], исследуются движения изотропной конической оболочки, имеющей одновременно локальные изменения толщины по фиксированной угловой координате, называемые стрингерами и по фиксированной продольной координате, называемые шпангоутами.

Обзор работ в области динамического поведения тонкостенных конструкций до 1972 года можно найти в монографии [7]. обстоятельный обзор более поздних работ с оценкой эффективности и рекомендациями по применению численных методов можно найти в работе [8].

**Постановка задачи:** Пусть в начальный момент времени изотропная коническая оболочка переменной толщины подвергается удару абсолютно твердым телом, ударяющим со скоростью  $v$ . Начало правой системы координат  $Oxyz$  расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось  $Ox$  направлена вправо в массив оболочки, ось  $Oz$  – по внешней нормали к срединной поверхности оболочки. Оболочка лежит в области  $x > 0$ . Геометрия конуса вводится аналогично [7]: определим некоторый “основной” цилиндр длины  $L$  и радиуса  $R_0$  и будем рассматривать коническую поверхность, образующие которой проходят через среднее сечение оболочки под углом  $\alpha$  к образующей цилиндра (рис. 1).

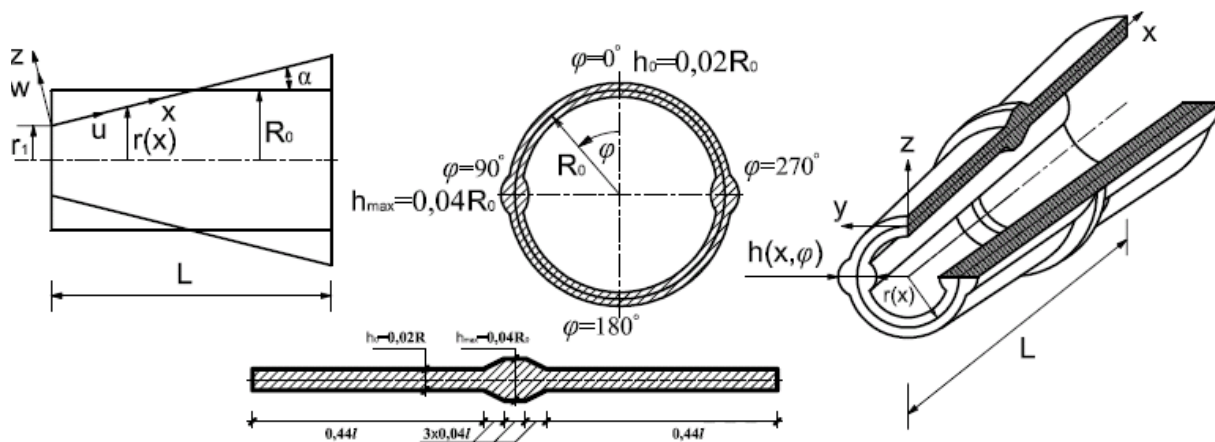


Рис. 1. Геометрия оболочки, общий вид, продольное и поперечное сечения

Так же на рис.1 показаны общий вид, продольное и поперечное сечения оболочки.

Вертикальная ось, проходящая через центр окружности, является осью симметрии поперечного сечения. Угловая координата  $\varphi$  откладывается от вертикального диаметра, при ее значениях  $90^\circ$  и  $270^\circ$  расположены стрингеры. В средней части оболочки, при значении продольной координаты  $x=L/2$  располагается шпангоут.

При сделанных предположениях геометрически нелинейные дифференциальные уравнения продольно поперечных движений тонкой упругой конической оболочки, учитывающие сдвиг, инерцию вращения и переменность толщины (уравнения типа С.П. Тимошенко) могут быть выведены из уравнений, полученных К.З. Галимовым в [9]. В нашем случае они принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} &= \rho \cdot h(x, \varphi) \cdot u \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} &= \rho \cdot h(x, \varphi) \cdot v \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{T_{22}}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{11} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{12}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_{12} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{22}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \rho \cdot h(x, \varphi) \cdot w \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - N_1 &= \frac{\rho \cdot (h(x, \varphi))^3}{12} \cdot \psi_1 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - N_2 &= \frac{\rho \cdot (h(x, \varphi))^3}{12} \cdot \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соотношения физического закона упругости приняты в виде:

$$T_{11} = K \cdot (\varepsilon_{11} + \nu \cdot \varepsilon_{22}); \quad T_{12} = T_{21} = \frac{K \cdot (1 - \nu)}{2} \cdot \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = K \cdot (\varepsilon_{22} + \nu \cdot \varepsilon_{11}); \quad (2)$$

$$M_{11} = D \cdot \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu \cdot \left( \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\psi_1}{r(x)} \cdot \sin \alpha \right) \right); \quad (3)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{D \cdot (1 - \nu)}{2} \cdot \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\psi_2}{r(x)} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right); \quad (4)$$

$$M_{22} = D \cdot \left( \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\psi_1}{r(x)} \cdot \sin \alpha + \nu \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right); \quad (5)$$

$$N_1 = k^2 \cdot \frac{K \cdot (1 - \nu)}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right); \quad N_2 = k^2 \cdot \frac{K \cdot (1 - \nu)}{2} \cdot \left( \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \psi_2 \right). \quad (6)$$

В цилиндрических координатах нелинейные геометрические соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\sin \alpha}{r(x)} + \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \frac{\sin \alpha}{r(x)} + w \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r(x)} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{r(x)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (8)$$

Кроме того в уравнениях (1) - (4) введены обозначения для жесткостей:

$$K = \frac{Eh(x, \varphi)}{1 - \nu^2}; \quad D = \frac{E(h(x, \varphi))^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (9)$$

В системе уравнений (1) – (8) все обозначения общеприняты.  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{12}$  – усилия в срединной поверхности оболочки,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  – изгибающие и крутящий моменты в срединной поверхности оболочки,  $N_1$ ,  $N_2$  – перерезывающие силы.  $k^2$  – коэффициент сдвига в теории оболочек типа Тимошенко.  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки,  $\psi_1$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг касательной к окружности,  $\psi_2$  – угол поворота нормали к

срединной поверхности вокруг нормали к окружности.  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат.

Полученные уравнения учитывают влияние прогибов и деформаций сдвига на тангенциальные компоненты перемещений в срединной поверхности.

**Обсуждение результатов.** Система уравнений (1)-(9) решалась методом конечных разностей. Уравнения (1) и соотношения (2)–(9) записывались в виде явной конечно-разностной схемы. Значения безразмерных шагов сетки принимались  $\Delta\delta=0.005$  – по продольной координате,  $\Delta\varphi=0.063$  – по угловой координате и  $\Delta t=0.0025$  – по временной координате. Значения шагов были выбраны по результатам анализа числовых экспериментов с нелинейной разностной схемой задачи и соответствуют рекомендациям работы [10] – выбранный шаг по продольной координате не превышает трети минимальной толщины оболочки. Для оценки устойчивости разностной схемы проводились расчеты при различных шагах по временной координате:  $\Delta t = 0.005$ ;  $0.0025$ ;  $0.00125$ , шагах  $\Delta\delta=0.01$ ;  $0.005$ ;  $0.0125$  – по продольной координате и шагах  $\Delta\varphi=0.126$ ;  $0.063$ ;  $0.031$  – по угловой координате. С той же целью при тестировании разностной схемы и метода решения счет проводился до значений времени, соответствующего времени девяти пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях наблюдалась устойчивость счета. Схема оставалась устойчивой и при изменении скорости удара.

В качестве объекта исследования в примере расчета рассматривалась коническая оболочка, левый ударяемый край которой опирается на шарнирно подвижную опору, а правый край жестко заделан. В начальный момент оболочка считается недеформированной. Длина «основного» цилиндра принималась равной  $2m$ , радиус –  $1m$ . Угол наклона образующей конической оболочки составлял  $10^\circ$ . Отношение массы оболочки к массе ударяющего тела принималось равным  $0.1$ , скорость ударяющего тела составляла  $10$  м/с. Изучались движения оболочки в течении времени, соответствующего девяти пробегам продольной волны вдоль оболочки. На рис.2,3 представлены картины волнообразования в двух продольных сечениях оболочки. Значение угловой координаты  $90^\circ$  соответствует расположению стрингера, т.е. максимальной толщине оболочки.

По оси абсцисс отложена безразмерная длина оболочки, по оси ординат безразмерные прогибы (отнесенные к толщине  $h_0$ ). В расчетах толщина оболочки принималась  $h_0=0.02$  м. В зоне стрингера и шпангоута толщина оболочки увеличивалась линейно вдвое и составляла  $h=0.04$  м. Безразмерное время  $T=t/t_0$  получено делением времени  $t$ , истекшего с момента удара, на время  $t_0$ , равному времени однократного пробега продольной волны вдоль длины оболочки. Сплошными линиями по четыре графика показаны прогибы для четырех моментов времени  $T=2,25$ ;  $2,5$ ;  $2,75$ ;  $3,0$ . То есть показаны прогибы, когда продольная волна третий раз «бежит» по оболочке (от ударяемого торца к заделанному). На графиках показаны прогибы, когда волна распространилась на четверть оболочки ( $T=2,25$ ), на половину оболочки ( $T=2,5$ ), на три четверти длины оболочки ( $T=2,75$ ) и, наконец, дошла до заделанного торца ( $T=3,0$ ). Штрих пунктирными линиями для сравнений на тех же рисунках показаны формы движения конической оболочки постоянной толщины. При этом на всех приведенных рисунках меньшему моменту времени соответствует ниже лежащий график.

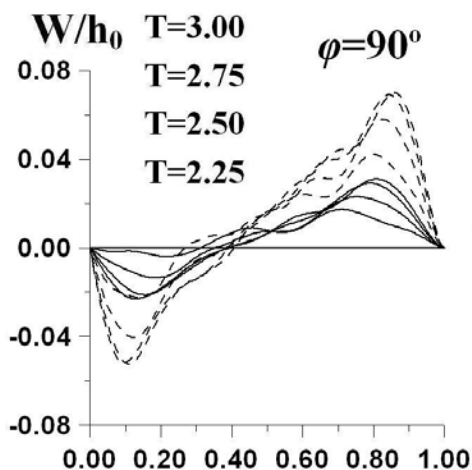


Рис. 2. Прогибы оболочки при  $\varphi = 90^\circ$

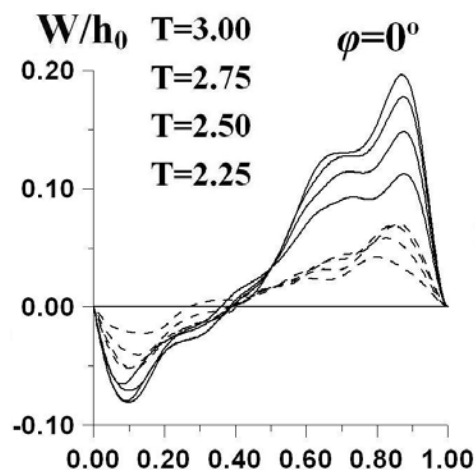


Рис. 3. Прогибы оболочки при  $\varphi = 0^\circ$

Рис.2 соответствует значению угловой координаты  $\varphi = 90^\circ$ , где оболочка имеет утолщение по круговой координате. Толщина стрингера, как отмечалось, составляет две толщины оболочки и равна  $h = 0.04$  м. Локальное усиление оболочки уменьшает величину относительного прогиба на 50-60% как на ударяемом, так и на заделанном торце оболочки, но качественный характер распределения прогибов остается прежним. Наблюдается тенденция к изменению числа полуволн.

Рис.3 соответствует значению угловой координаты  $\varphi = 0^\circ$ . Здесь  $h = h_0 = 0.02$  м. В этом сечении возникают максимальные прогибы. Величины прогибов на обоих торцах оболочки увеличиваются. На ударяемом торце на 30-40%, На заделанном торце увеличения прогибов весьма значительны и превышают в три раза прогибы оболочки постоянной толщины. Другими словами, при ударе стеснение оболочки в одних сечениях, вызывает интенсивное деформирование в других сечениях. Сильное влияние здесь оказывает шпангоут, расположенный в среднем поперечном сечении оболочки. Исследования оболочки имеющей лишь стрингеры показывают увеличение прогибов лишь на 40-50% в области заделанного торца.

Для наглядности общей картины прогибов по всей поверхности оболочки, на рис.4 представлена пространственная «развертка» картины волнообразования к моменту времени  $T=3$ , то есть к моменту времени, когда продольная волна во второй раз достигла заделанного торца оболочки (продольная волна три раза пробежала вдоль оболочки). По одной из осей откладывается продольная координата  $x$ , по другой – угловая координата  $\varphi$  (от 0 до  $2\pi$ ). Шаг по координате  $\varphi$  соответствует на графике  $57^\circ$ . Относительные прогибы оболочки откладываются по вертикальной оси. Значение продольной координаты  $x=0$  соответствует ударяемому торцу,  $x=1$  - правому заделанному торцу оболочки. Отчетливо видна симметричность картины прогибов по угловой координате, обусловленная симметричностью поперечного сечения относительно вертикальной оси. В момент времени  $T=3$  коническая оболочка имеет прогибы в обе стороны.

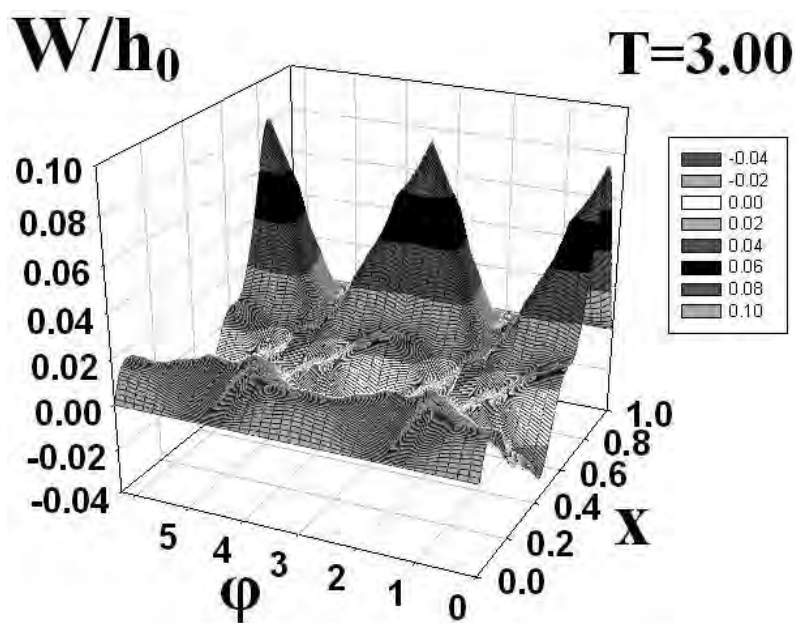


Рис. 4. Прогибы по всей поверхности оболочки к моменту  $T=3$

Вблизи торца, воспринимающего удар, прогибы имеют отрицательный знак, т.е. направлены внутрь оболочки, вблизи заделанного торца прогибы положительные, т.е. направлены во внешнюю сторону. Пространственная картина позволяет качественно оценить поведение оболочки при ударе, отражает влияние изменения толщины на места образования максимальных и минимальных прогибов. Наглядно представлено образование поперечных волн.

### РЕЗЮМЕ

Одновременное наличие стрингеров и шпангоутов в конических оболочках при продольном ударе ведет к перераспределению поперечных волн: приводит к уменьшению относительных прогибов в усиленном сечении, но одновременно значительно увеличивает прогибы в сечениях оболочки не имеющих усиления. Картина изгибания оболочки существенно зависит от напряженного состояния оболочки в конкретный момент времени. В целом можно заключить, что при проектировании оболочек с усилениями необходимо проводить полное обследование конструкции на предмет перераспределения деформаций.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шигабутдинов, Ф.Г. Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной серединной поверхности / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, 2011 г., том IV, Часть 5, с. 2374 – 2376.
2. Шигабутдинов, Ф.Г. Влияние несимметрично расположенных шпангоутов на поперечное волнообразование ортотропных цилиндрических оболочек конечной длины при продольном ударе / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды X международной Четаевской конференции, Казань, 12-16 июня 2012 г. Том 1. Аналитическая механика. / Казань: КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева. - 2012 г. – с. 521-528.
3. Мухутдинов, Р.Ф. Влияние местных дефектов на волнообразование в ортотропных цилиндрических оболочках конечной длины при продольном ударе / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // Вестник МГСУ, №10, 2013 г., с. 60-67.

4. Мухутдинов, Р.Ф. Поперечные волны в ортотропных конических оболочках с локальными изменениями толщины при продольном ударе / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // Материалы Всероссийской конференции посвященной 100-летию со дня рождения проф. М.Т. Нужина «Обратные краевые задачи (ОКЗ) и их приложения», Казань, 20-24 октября 2014года. – Казань: Из - во Казанского (Поволжского) Федерального ун-та, 2014г. – 1 электрон. опт. диск. – текстографические материалы. (CD-ROM, объем ЭИ:51Мб). Электр. Ресурс. –<http://kpfu.ru/math/konferencii-instituta/vserossijskaya-nauchnaya-konferenciya-39obratnye/materialy>.
5. Мухутдинов, Р.Ф. Моделирование нелинейного выпучивания цилиндрической оболочки со стрингерами при продольном ударе с учетом неосесимметричности деформирования / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // Международном научно – техническом сборник «Теоретическая и прикладная механика». – Минск: БНТУ, 2015, вып. 30, с.88-93.
6. Мухутдинов, Р.Ф. Моделирование выпучивания неосесимметричных цилиндрических и конических оболочек с локальными изменениями толщины при продольном ударе / Ф.Г. Шигабутдинов, Р.Ф. Мухутдинов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015, с.200.
7. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М., Наука, 1972, 432с.
8. Баженов, В.Г. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Изв. РАН, МТТ, 2001, №5, с. 156-173.
9. Галимов, К.З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К.З. Галимов и др. – Казань: Изд-во КГУ, 1977, с. 3-132.
10. Гордиенко, Б.А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей / Б.А. Гордиенко // Изв. АН СССР, МТТ, 1970, №3, с. 143-148.

#### SUMMARY

*The presence of stringers and frames in conical shells under longitudinal impact, leads to a redistribution of shear waves: reduces relative deflections in the reinforced cross-section, but at the same time significantly increases deflections in the sections of the shell without reinforcement. Picture bending membrane depends on the stress state of the shell. In General, we can conclude that the design of membranes with the reinforcements necessary to conduct a full examination of the structure.*

**E-mail:** [ktm80@yandex.ru](mailto:ktm80@yandex.ru)  
[shigfg@mail.ru](mailto:shigfg@mail.ru)

Поступила в редакцию 15.09.2015