

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА КОЛЬЦЕВОМ ПРИВОДЕ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

д.т.н. <sup>1</sup>Карпович С.Е., студ. <sup>1</sup>Войтов А.Ю., студ. <sup>1</sup>Кузнецов В.В.,  
маг. <sup>1,2</sup>Поляковский В.В

<sup>1</sup>УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», Минск  
<sup>2</sup>UAB «Industry Consulting Service», Минск

В настоящей работе рассматривается система перемещений с тремя степенями свободы (рисунок 1), построенная на кольцевом гибридном приводе и механизме параллельной кинематики на основе пространственной группы Ассур третьего класса. Представлена разработанная алгоритмизация математической модели позиционирования выходного звена (рабочей платформы) в зависимости от положения трёх автономноуправляемых сегментных модулей движения на кольцевой направляющей гибридного трёхкоординатного привода [1].

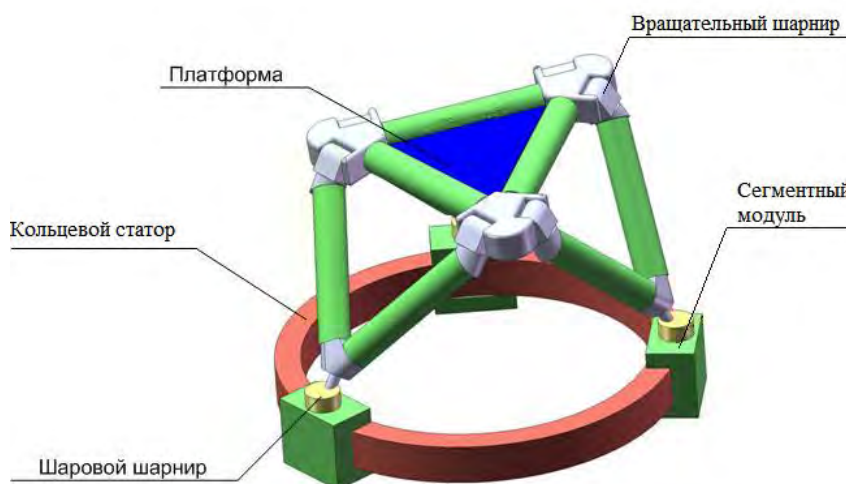


Рис. 1. Система перемещений с тремя степенями свободы

Структурно-кинематическая схема исполнительного механизма параллельной кинематики с трёхкоординатным кольцевым приводом представлена на рисунке 2. Базовыми конструктивными параметрами механизма являются параметры, определяющие его геометрическую конфигурацию:  $R$  – средний радиус кольцевого привода, длины сторон подвижных треугольных звеньев  $AFB$ ,  $ADC$  и  $CEB$ , принятые в работе равными между собой и равными  $a$ . Функции положения ведущих звеньев, определяющие положение во времени каждого из трёх подвижных сегментов, в работе задаются текущими значениями углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , определяющими положение точек, соответственно  $D$ ,  $E$  и  $F$  на кольцевой направляющей (рисунок 3).

В качестве линейных позиционных координат платформы были приняты координаты точки  $O_1$  начала системы координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  в неподвижной системе координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ , а в качестве угловых координат ориентации платформы были приняты углы Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$ , выражаемые через координаты точек  $A, B$  и  $C$  этой треугольной платформы [2].

Целью настоящего исследования является алгоритмизация задачи позиционирования для рассматриваемой пространственной системы перемещений (рисунок 2), заключающаяся в нахождении в системе координат  $S_0$  текущих координат точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  в зависимости от положения ведущих точек  $D$ ,  $E$  и  $F$ , задаваемых переменными углами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  (рисунок 3), параметрическое представление которых во времени позволяет находить в общем случае функции положения всех точек и звеньев исполнительного механизма, координаты положения и ориентации рабочей платформы [3].

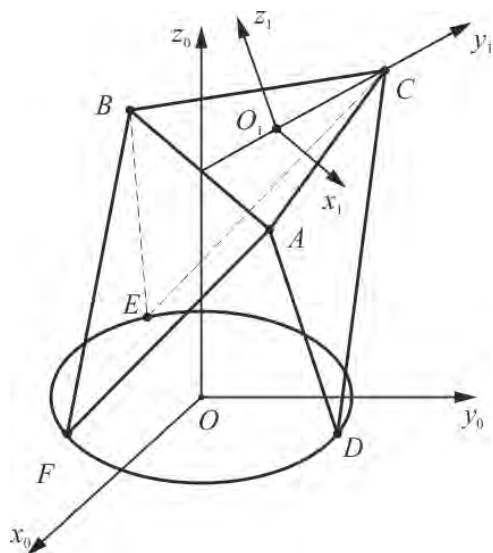


Рис. 2. Расчётная модель системы

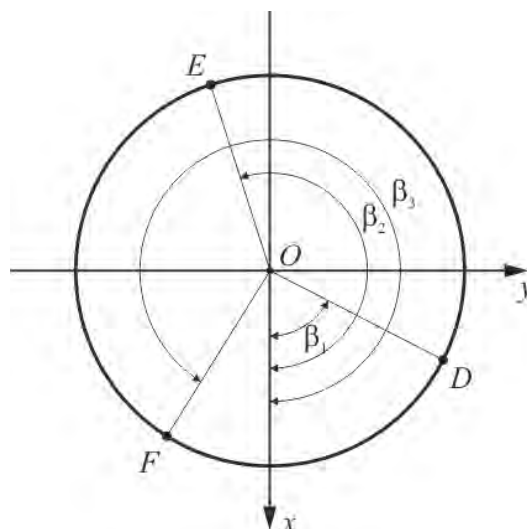


Рис. 3. Угловые положения точек  $D, E, F$

Рассмотрим формирование математической модели решения прямой задачи кинематики исполнительного манипуляционного механизма, по расчётной модели представленной на рисунке 2. Так как этот механизм относится к классу механизмов параллельной кинематики, то при выводе математической модели он допускает фрагментацию по отдельным параллельным кинематическим цепям, в данном случае в виде трёх подвижных треугольников:  $DAF$ ,  $DCE$ ,  $EBF$ . Аналитическое описание любого из этих фрагментов может быть интерпретировано как рекуррентное аналитическое представление и для двух других. Не нарушая общности, рассмотрим фрагмент механизма  $DCE$ .

Здесь  $DC$  и  $CE$  стороны соседних подвижных треугольных звеньев  $ADC$  и  $EBC$ . При изменении положения точек  $D$  и  $E$ , задаваемых углами соответственно  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , подвижных сегментов привода на направляющей окружности статора меняется положение и ориентация треугольника  $DCE$ . В качестве обобщённой координаты, определяющей его положение в переносном движении, выберем угол  $\alpha_1$  наклона треугольника  $DCE$  к плоскости направляющей окружности.

Нетрудно видеть, что положение точки  $C$  в трёхмерном пространстве характеризуется её проекцией  $C'$  на плоскость  $x_0Oy_0$  и её проекцией на ось  $x_0$ , при этом секущая  $OC'$  делит угол  $DOE$  пополам. В результате получаем геометрическое место точек  $O, D, E, C, C'$ , реконфигурируемое в пространстве в зависимости от положения ведущих точек  $D$  и  $E$ . Обобщённая координата  $\alpha_1$  определится из треугольника  $CGC'$  через координаты соответствующих точек.

С учётом расчётной схемы, представленной на рисунке 2, окончательно получим расчётные зависимости для переменных координат точки  $C$  в зависимости от задаваемых углов  $\beta_1, \beta_2$  и обобщённой координаты  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{R}{2}(\cos \beta_1 + \cos \beta_2) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 - 1)} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1; \\
y_C &= \frac{R}{2}(\sin \beta_1 + \sin \beta_2) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 - 1)} \cos \alpha_1 \sin \gamma_1; \\
z_C &= \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 - 1)} \sin \alpha_1.
\end{aligned} \quad (1)$$

Аналогичные расчётные зависимости могут быть получены для алгоритмизации двух других фрагментов исполнительного механизма *EBF* и *DAF*. Для точки *B* будем иметь:

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{R}{2}(\cos \beta_2 + \cos \beta_3) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_2 \sin \beta_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 - 1)} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2; \\
y_B &= \frac{R}{2}(\sin \beta_2 + \sin \beta_3) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_2 \sin \beta_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 - 1)} \cos \alpha_2 \sin \gamma_2; \\
z_B &= \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_2 \sin \beta_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 - 1)} \sin \alpha_2.
\end{aligned} \quad (2)$$

Для точки *A* аналогично получим:

$$\begin{aligned}
x_A &= \frac{R}{2}(\cos \beta_1 + \cos \beta_3) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 - 1)} \cos \alpha_3 \cos \gamma_3; \\
y_A &= \frac{R}{2}(\sin \beta_1 + \sin \beta_3) + \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 - 1)} \cos \alpha_3 \sin \gamma_3; \\
z_A &= \sqrt{a^2 + \frac{R^2}{2}(\sin \beta_1 \sin \beta_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 - 1)} \sin \alpha_3.
\end{aligned} \quad (3)$$

Выражения (1) – (3), определяющие расчётные координаты точек *A*, *B* и *C*, на основе условия замкнутости трёх параллельных кинематических цепей на треугольник *ABC*, позволяют получить систему трёх уравнений относительно неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в виде

$$\begin{cases}
(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = a^2; \\
(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = a^2; \\
(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = a^2.
\end{cases} \quad (4)$$

Система (4) представляет собой нелинейную трансцендентную систему, решение которой возможно только численными методами. Особенность численного нахождения неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  состоит в том, что, в данном случае, мы располагаем хорошим первым приближением, определяемым известной начальной конфигурацией механизма. Поэтому выбор метода оптимизации не является критичным. Для численного решения системы (4) нами был использован пакет оптимизации программной среды MATLAB. В результате компьютерного численного решения системы (4), могут быть получены текущие значения углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  однозначно соответствующие текущим положениям точек *D*, *E* и *F*, определяющим входные позиционные характеристики управляемых сегментов на кольцевом приводе. Подставляя найденные значения углов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в выражения (1), (2) и (3) получим текущие координаты точек *A*, *B* и *C*, которые полностью характеризуют текущее положение и ориентацию подвижного звена *ABC* в трёхмерном пространстве. В конечном виде текущее состояние платформы не-

обходимо представлять матрицей  $M_{01}$ , характеризующей положение и ориентацию подвижной системы координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  по отношению к неподвижной системы координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ :

$$M_{01} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{O_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_{O_1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_{O_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Положение системы координат  $S_1$  будем характеризовать линейными координатами  $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ , а ориентацию – направляющими косинусами  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Положение начала  $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1})$  системы координат  $S_1$  по найденным координатам вершин треугольника  $ABC$  определим по формулам

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_{O_1} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \quad z_{O_1} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}. \quad (7)$$

Углы Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$ , определяющие ориентацию системы координат  $S_1$  в неподвижной системе координат  $S_0$  (рисунок 2), определяются также через координаты точек  $A, B, C$ . Вначале найдём вектор  $\overrightarrow{O_1A} \parallel x$ :

$$\overrightarrow{O_1A} = (x_A - x_{O_1}, y_A - y_{O_1}, z_A - z_{O_1}). \quad (8)$$

С учётом того, что

$$|\overrightarrow{O_1A}| = \sqrt{(x_A - x_{O_1})^2 + (y_A - y_{O_1})^2 + (z_A - z_{O_1})^2}, \quad (9)$$

получим элементы  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  матрицы  $M_{01}$ , определяющие направляющие косинусы оси  $x_1$  в неподвижной системе координат  $S_0$  в виде:

$$a_{11} = \frac{x_A - x_{O_1}}{|\overrightarrow{O_1A}|}; \quad a_{12} = \frac{y_A - y_{O_1}}{|\overrightarrow{O_1A}|}; \quad a_{13} = \frac{z_A - z_{O_1}}{|\overrightarrow{O_1A}|}. \quad (10)$$

Аналогично, в соответствии с рисунком 2 можно записать выражения для расчёта элементов  $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ , определяющих направляющие косинусы оси  $y_1$  в неподвижной системе координат  $S_0$  в виде:

$$a_{21} = \frac{x_B - x_C}{|\overrightarrow{CB}|}; \quad a_{22} = \frac{y_B - y_C}{|\overrightarrow{CB}|}; \quad a_{23} = \frac{z_B - z_C}{|\overrightarrow{CB}|}, \quad (11)$$

где  $|\overrightarrow{CB}| = a$  – сторона равностороннего треугольника подвижной платформы.

Для нахождения оставшихся трёх элементов  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$ , определяющих направляющие косинусы оси  $z_1$  в системе координат  $S_0$ , воспользуемся векторным произведением ортов  $\vec{i}(a_{11}, a_{12}, a_{13})$  и  $\vec{j}(a_{21}, a_{22}, a_{23})$ , в результате найдём орт  $\vec{k}$  по выражению:

$$\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i}_0 & \vec{j}_0 & \vec{k}_0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \cdot \vec{i}_0 - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \cdot \vec{j}_0 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \vec{k}_0. \quad (12)$$

Отсюда получим искомые  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$  в виде:

$$a_{31} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}); \quad a_{32} = (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}); \quad a_{33} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (13)$$

Таким образом, получены все расчётные значения элементов матрицы  $M_{01}$ , определяющей положение и ориентацию платформы через координаты вершин подвижного треугольника  $ABC$ .

На основе разработанной математической модели, построенной на сегментированных алгоритмах кинематики параллельных кинематических цепей рассматриваемого исполнительного механизма, была разработана программа компьютерного имитационного моделирования функций положения, определяющих положение и ориентацию платформы в зависимости от положения ведущих элементов, управляемых сегментов кольцевого привода.

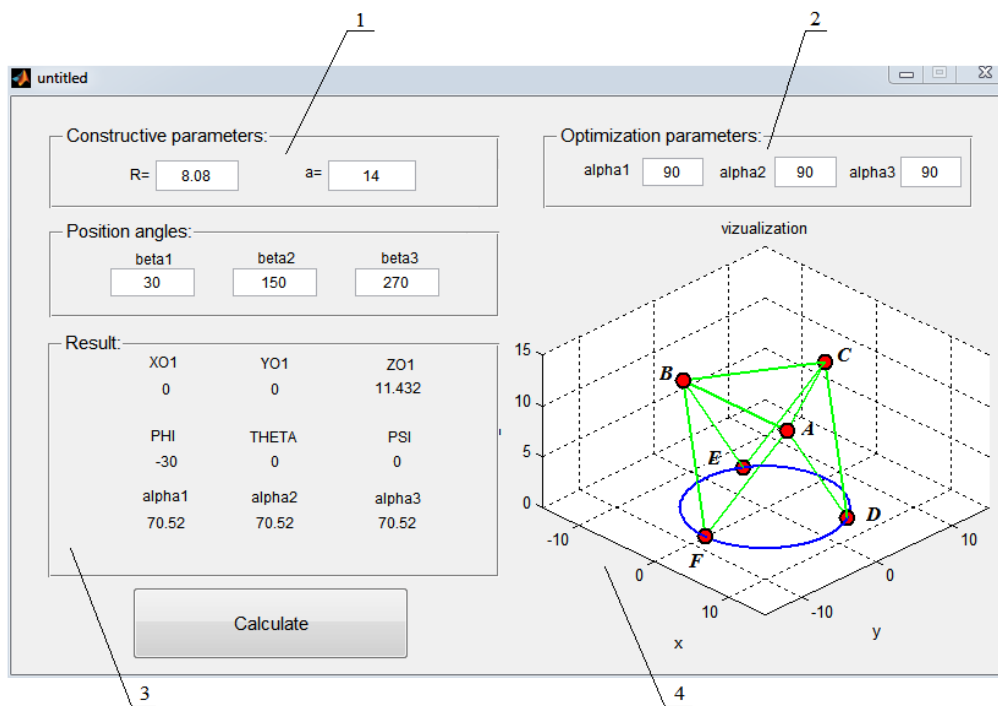


Рис. 4. Интерфейс программы моделирования

Программа кинематического исследования построена на разработанных алгоритмах решения прямой задачи кинематики. Интерфейс программы, показанный на рисунке 4, разработан в среде MATLAB с помощью инструмента GUI. Он включает окна 1, 2 задания конструктивных параметров и начальных значений расчётных параметров, панели 3 результатов моделирования и панели 4 визуализации исполнительного механизма. Для численных расчётов были приняты следующие базовые конструктивные размеры (рисунок 2): размер стороны равностороннего треугольника  $ABC$  рабочей платформы равен  $a=14$ , размеры сторон подвижных равносторонних треугольников  $ADC$ ,  $AFB$  и  $BEC$ , кинематически связанных с управляемыми сегментами привода равны  $a=14$ . Радиус кольцевого привода, определяющий траекторию движения сегментов, был принят равным радиусу описанной окружности равностороннего треугольника рабочей

платформы  $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 8.08$ . В этом случае при равномерном расположении сегментов через  $120^\circ$  проекция треугольной платформы вписывается в окружность радиуса  $R$ . Для тестового примера были проведены компьютерные исследования шести функций положения рабочей платформы, включая линейные:  $x_{o_1}(\beta_1), y_{o_1}(\beta_1), z_{o_1}(\beta_1)$  и угловые:  $\varphi(\beta_1), \theta(\beta_1), \psi(\beta_1)$ , полученные при изменении  $\beta_1$  от  $30^\circ$  до  $150^\circ$ .

Анализ результатов показывает, что для выбранной конструктивной схемы перемещение платформы вдоль оси  $x_0$  лежит в пределах от 0 до 7.39, перемещение платформы вдоль оси  $y_0$  лежит в пределах от 0 до 1.47, перемещение платформы вдоль оси  $z_0$  лежит в пределах от 11.43 до 10.77. При этом угловые диапазоны перемещений лежат в пределах:  $\varphi = 0 \dots 32^\circ$ ;  $\theta = 0 \dots 7^\circ$ ;  $\psi = 0 \dots 18^\circ$ .

Были также исследованы функции взаимного влияния и связанности выходных координат платформы, включая  $\psi(\varphi), \theta(\varphi), \theta(\psi), y_{o_1}(x_{o_1}), z_{o_1}(x_{o_1}), z_{o_1}(y_{o_1})$ . Эти зависимости имеют большое значение при разработке конструкции системы перемещений, так как позволяют находить передаточные функции между координатами и их учитывать при разработке программного обеспечения системы управления комплекса в целом.

## РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрены математическая модель и алгоритмизация решения прямой задачи кинематики для системы перемещений с тремя степенями свободы, построенной на механизме параллельной кинематики в виде раскрывающегося тетраэдра и кольцевого привода прямого действия с тремя автономно-управляемыми сегментными модулями движения. Разработано программное обеспечение, позволяющее проводить компьютерное имитационное моделирование рассмотренной системы перемещений в среде Matlab.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прецизионная система перемещений для оптико-механического оборудования микроэлектроники / И.В. Дайняк [и др.] // Наука и техника. – 2015. – № 4. – С. 24–32.
2. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.
3. Tsai, L.W. Robot Analysis. The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators / L.W. Tsai. – John Wiley & Sons, Maryland, 1999.

## SUMMARY

*This paper considers model and algorithms for solving of direct kinematic problems of parallel manipulation mechanism with 3 degrees of freedom on the basis of rotary segment direct drive. The worked out software can be used for modeling of mechanism within MATLAB environment.*

**E-mail:** [mmts@bsuir.by](mailto:mmts@bsuir.by)  
[vip@ic-service.by](mailto:vip@ic-service.by)

Поступила в редакцию 25.09.2015