УДК 539.3/.6

К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

к.т.н. [1]**Якубовский Ч.А.,** к.т.н. [2]**Якубовский А.Ч.**

[1]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[2]*Морская академия, г. Щецин, Польша*

Изгиб является одним из наиболее распространённых видов деформации элементов машин и сооружений. Изучение изгиба стержней представляет собой большую и сложную задачу. Основными направлениями при исследовании деформации изгиба являются:

- выявление внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержня и изучение закона их изменения;
- определение напряжений при изгибе и закона их распределения по сечению;
- исследование изогнутой оси балки и определение линейных и угловых деформаций поперечных сечений стержня.

Силовые факторы в сечении стержня

Для выявления силовых факторов в поперечных сечениях стержня применяется известный из литературы метод сечений [1-2]. Он основан на рассмотрении равновесия отсеченной части стержня, к которой кроме внешних сил прикладываются в сечении силы, равные усилиям внутренних связей. Эти силы приводятся к центру тяжести сечения в виде главного вектора $\boldsymbol{R}$ и главного момента $\boldsymbol{M}$.

Выбираем правостороннюю систему координат xyz и раскладываем главный вектор и главный момент на составляющие вдоль этих осей (рис.1).

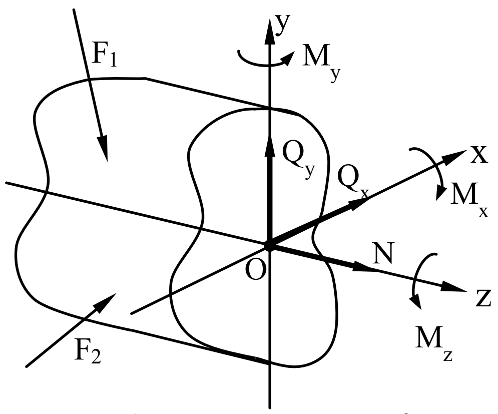

Рис. 1. Внутренние силовые факторы в сечении стержня

Для компонент внутренних сил установлены следующие названия:

N –продольная (нормальная) сила;

Q_x, Q_y – поперечные (перерезывающие) силы;

M_x, M_y – изгибающие моменты;

M_z – крутящий момент.

Эти составляющие главного вектора и главного момента называются внутренними силовыми факторами. Они определяются из уравнений равновесия, составленных для отсечённой части стержня.

Правило знаков внутренних силовых факторов

Для составляющих главного вектора $\boldsymbol{R}$ принимается следующее правило знаков: в сечении стержня, внешняя нормаль к которому совпадает с положительным направлением координатной оси, силы Q_x, Q_y и N считаются положительными, если они совпадают с положительным направлением осей x, y и z. Если внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением оси, то эти силы считаются положительными, если они направлены в сторону соответствующей отрицательной оси.

Для составляющих главного момента $\boldsymbol{M}$ принимается правило знаков вращения, используемое для правосторонней системы координат. Согласно этому правилу момент или вращение относительно оси считается положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки при взгляде со стороны положительного направления соответствующей координатной оси. На рис.1 показаны положительные направления всех внутренних силовых факторов.

В отечественной учебной литературе по сопротивлению материалов, а также в литературе стран СНГ правило знаков внутренних силовых факторов не связывается с координатными осями, а устанавливается произвольно [2-5]. (Исключение составляет лишь учебное пособие [6]). Это, на наш взгляд, является неправомерным, и приводит к определенным противоречиям. Так, например, в указанных источниках при плоском поперечном изгибе поперечная сила Q_y в сечении считается положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть стержня по часовой стрелке. При этом, обоснование выбора именно такого правила в учебной литературе найти невозможно. В то же время, в этом же сечении касательные напряжения τ_y, являющиеся мерой интенсивности внутренних сил Q_y и действующие в их направлении, согласно правилу знаков напряжений, принятому в этих же и других источниках, считаются отрицательными [2, с.с. 23, 31], [7]. Поэтому необходимо принимать общее правило знаков для напряжений и внутренних силовых факторов, связанное с принятой системой координат и зависящее от направления внешней нормали к сечению.

Гипотеза плоских сечений

Точное решение задачи об определении нормальных и касательных напряжений при изгибе представляет собой определённые трудности, поэтому в инженерной практике для определения этих напряжений применяется теория изгиба, построенная на гипотезе плоских сечений, впервые предложенной Я. Бернулли. Согласно этой гипотезе поперечные сечения стержней, плоские и нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации.

Гипотеза плоских сечений является строгой при чистом изгибе (когда $Q_x = 0$ и $Q_y = 0$) и приближённой при поперечном изгибе.

При чистом изгибе изгибающий момент постоянен по длине стерня. Поэтому любой выделенный элемент длиной dz будет нагружен симметричной нагрузкой (моментами M_x). Следовательно, срединное сечение этого элемента после деформации вследствие симметрии остается плоским и нормальным к его деформированной оси.

При поперечном изгибе в плоскости yz картина нагружения выделенного элемента будет иной (рис. 2).

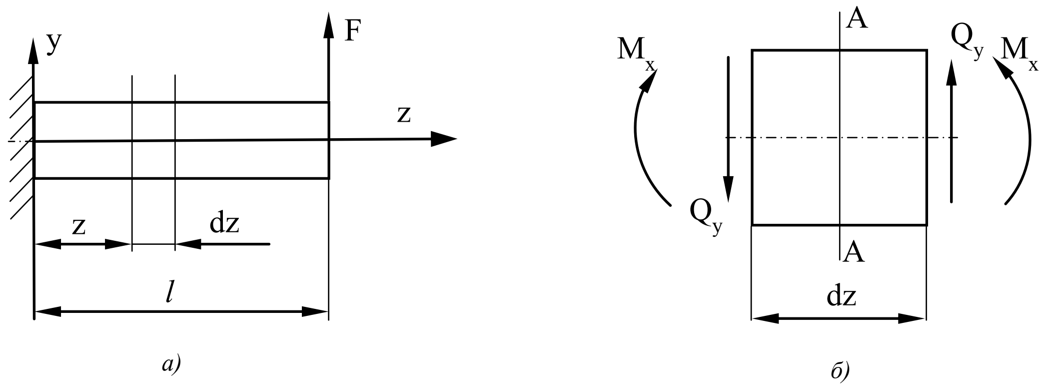

Рис. 2. Поперечный изгиб стержня: а – расчётная схема, б – выделенный элемент

Элемент стержня (рис. 2, б) нагружен несимметрично. Поэтому он будет и деформироваться несимметрично относительно срединного сечения $A-A$, и это сечение не останется плоским после деформации. Однако при постоянном значении Q_y по длине стержня постоянного сечения его поперечные сечения хотя и будут искривляться, но совершенно одинаковым образом. Поэтому картина деформации продольных волокон стержня будет такой же, как и при чистом изгибе. Лишь при изгибе стержней переменного сечения, а также при изменении поперечной силы Q_y вдоль участка стержня гипотеза плоских сечений является приближенной. Однако для стержней большой длины погрешность вычислений нормальных напряжений по формулам чистого изгиба относительно мала.

Вывод формулы нормальных напряжений

Рассмотрим стержень, подвергающийся чистому изгибу. Это наиболее простой случай, который позволяет изучить основные особенности деформации изгиба. В этом случае поперечные силы $Q_x = Q_y = 0$. Также отсутствуют деформации сдвига, т.е.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \text{ и } \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (1)$$

Согласно гипотезе о ненадавливании продольных волокон друг на друга можно также записать:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \text{ и } \tau_{xy} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, из шести напряжений, определяющих напряженное состояние в точке, отличной от нуля является лишь нормальное напряжение σ_z, действующее перпендикулярно плоскости сечения стержня. Поэтому в упругой стадии нагружения оно может быть определено из закона Гука при растяжении:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z. \quad (3)$$

Сформулируем гипотезу плоских сечений по-другому: все точки поперечного сечения стержня и после деформации лежат в одной плоскости. Поэтому перемещение произвольной точки А поперечного сечения (рис. 3) вдоль оси z должно удовлетворять уравнению плоскости:

$$w = a + bx + cy, \quad (4)$$

где a, b и c являются функциями одной лишь переменной z. При этом величина a представляет собой перемещение вдоль оси z точек, лежащих на оси стержня. Обозначим $a = w_0$.

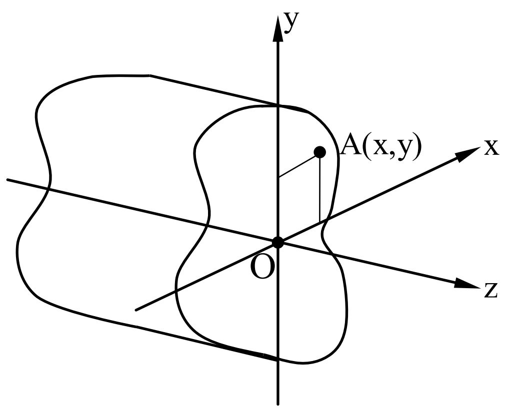

Рис. 3. Упругое смещение точек поперечного сечения стержня при изгибе

Запишем известные формулы Коши, связывающие между собой деформации и перемещения точек упругого тела [7]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (5)$$

где u, v, w – проекции на координатные оси x, y, z перемещения точки;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – линейные деформации вдоль координатных осей x, y, z.

Так как $\gamma_{yz} = 0$, то получим

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Из выражения (4) находим $\frac{\partial w}{\partial y} = c$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial z} + c = 0$; $c = -\frac{\partial v}{\partial z}$.

Аналогично получим $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial w}{\partial x} = b$; $b + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $b = -\frac{\partial u}{\partial z}$.

Подставляя значения a, b и c в уравнение (4), запишем

$$w = w_0 - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot x - \frac{\partial v}{\partial z} \cdot y. \tag{7}$$

Дифференцируя по z, получим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \varepsilon_0 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y, \tag{8}$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\partial w_0}{\partial z}$ – относительная деформация точек, лежащих на оси стержня.

Рассматривая совместно выражения (3) и (8), запишем

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_0 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y\right). \tag{9}$$

Обозначим $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_y$; $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = k_x$. Тогда выражение (9) принимает вид:

$$\sigma_z = E(\varepsilon_0 - k_y \cdot x - k_x \cdot y). \tag{10}$$

Для определения величин ε_0, k_x и k_y (так называемых параметров деформации) свяжем напряжение σ_z с внутренними силовыми факторами.

Как известно, в поперечном сечении стержня возникают только нормальные напряжения при условии чистого изгиба или центрального растяжения. Поэтому рассмотрим общий случай, когда в поперечном сечении стержня действуют изгибающие моменты и продольная сила (рис. 4).

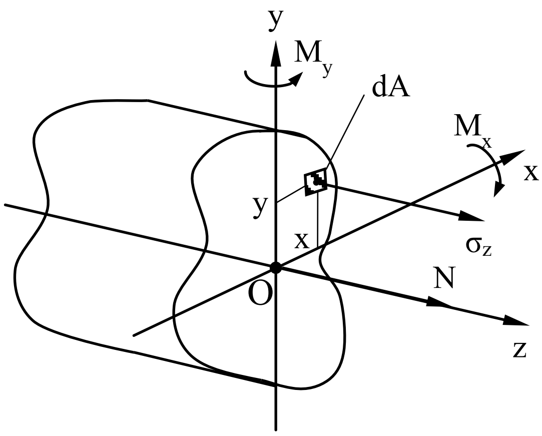

Рис. 4. Связь нормальных напряжений с внутренними силовыми факторами

Выражая внутренние усилия через напряжения σ_z, запишем

$$N = \int_A \sigma_z dA; \; M_x = \int_A \sigma_z y dA; \; M_y = -\int_A \sigma_z x dA. \tag{11}$$

Знак „–“ в последнем равенстве указывает на то, что момент элементарной силы $\sigma_z dA$ относительно оси y противоположен положительному направлению вращения, т.е. положительно направленному моменту M_y (рис. 4).

Подставляя выражение (10) в соотношения (11), получим

$$N = E\left(\varepsilon_o \int_A dA - k_y \int_A x dA - k_x \int_A y dA\right);$$

$$M_x = E\left(\varepsilon_o \int_A\ ydA - k_y \int_A\ xydA - k_x \int_A\ y^2 dA\right); \qquad (12)$$
$$-M_y = E\left(\varepsilon_o \int_A\ xdA - k_y \int_A\ x^2 dA - k_x \int_A\ xydA\right).$$

В этих формулах интегралы представляют собой геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$\int_A\ dA = A; \ \int_A\ xdA = S_y; \ \int_A\ ydA = S_x;$$
$$\int_A\ xydA = J_{xy}; \ \int_A\ y^2 dA = J_x; \ \int_A\ xdA = J_y. \qquad (13)$$

Если оси xy являются центральными осями, то статические моменты относительно этих осей обращаются в ноль:

$$S_x = \int\limits_A ydA = 0; \ \ S_y = \int\limits_A xdA = 0.$$

С учетом вышеизложенного формулы (12) принимают вид:

$$N = E\varepsilon_0 A; \ \varepsilon_0 = \frac{N}{EA}; \ M_x = E\left(-k_y \cdot J_{xy} - k_x \cdot J_x\right); \ -M_y = E\left(-k_y \cdot J_y - k_x \cdot J_{xy}\right). \qquad (14)$$

Решая совместно два последних уравнения, находим

$$k_y = \frac{M_x \cdot J_{xy} + M_y \cdot J_x}{E(J_x \cdot J_y - J_{xy}^2)}; \ \ k_x = -\frac{M_x \cdot J_y + M_y \cdot J_{xy}}{E(J_x \cdot J_y - J_{xy}^2)}. \qquad (15)$$

Подставляя значения ε_0, k_x и k_y в уравнение (10), получим

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_x \cdot J_{xy} + M_y \cdot J_x}{J_x \cdot J_y - J_{xy}^2} \cdot x + \frac{M_x \cdot J_y + M_y \cdot J_{xy}}{J_x \cdot J_y - J_{xy}^2} \cdot y. \qquad (16)$$

Формула (16) справедлива для произвольных центральных осей поперечного сечения стержня. В практических расчетах чаще всего используют главные оси сечения, которые можно получить путем поворота заданных центральных осей xy на определенный угол α. При этом угол α выбирают таким, чтобы центробежный момент инерции в главных осях XY обращался в ноль, т.е.

$$J_{XY} = \int_A\ XYdA = 0. \qquad (17)$$

Способ нахождения положения главных осей хорошо известен. Известно также, что если хотя бы одна из центральных осей xy является осью симметрии сечения, то условие (17) заведомо выполняется. В этом случае оси xy являются главными центральными осями.

Подставляя в формулу (16) $J_{XY} = 0$, получим

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{M_x}{J_x} \cdot y. \qquad (18)$$

Выражения (15) также значительно упрощаются:

$$k_y = \frac{M_y}{E \cdot J_y}; \ \ k_x = -\frac{M_x}{EJ_x}. \qquad (19)$$

Физический смысл параметров деформации k_x и k_y заключается в том, что они выражают кривизны проекций изогнутой оси стержня на координатные плоскости *xoz* и *yoz* соответственно. При этом

$$k_y = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \ \ k_x = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad (20)$$

Знак ,,–” в последнем равенстве (19) указывает на то, что при положительном значении изгибающего момента M_x кривизна изогнутой оси отрицательна.

Таким образом, при малых деформациях кривизна изогнутой оси стержня в плоскости, содержащей его продольную ось, равна второй производной от прогиба в этой плоскости по длине стержня.

Формула (18) является одной из основных формул в сопротивлении материалов. Она в полной мере применима к задачам о внецентренном растяжении или сжатии, когда внешняя сила не совпадает с осью стержня, а проходит через точку, называемую полюсом, оставаясь параллельной его оси. В этой формуле первое слагаемое выражает напряжение от растяжения или сжатия, два других слагаемых – напряжения от изгиба стержня.

Если в сечении продольная сила отсутствует, а изгибающий момент приложен не в главной плоскости, то такой вид изгиба, как известно, называется косым изгибом. В этом случае формула (18) принимает вид:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot x. \quad (21)$$

При $M_y = 0$ получим известную формулу для определения нормальных напряжений при плоском изгибе [8]:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y. \quad (22)$$

Заключение. Получены формулы для определения нормальных напряжений при совместном действии на стержень продольных сил и изгибающих моментов. Вывод формул основан на представлении гипотезы плоских сечений в аналитической форме в виде уравнения плоскости, преобразованного с использованием известных из теории упругости формул Коши, связывающих между собой деформации и перемещения точек упругого тела. При этом, формула (16) позволяет решать задачу изгиба в произвольных центральных осях, а формула (18) – в главных центральных осях сечения стержня.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача изгиба стержней. Предложен метод вывода формулы для определения нормальных напряжений изгиба, основанный на представлении гипотезы плоских сечений в аналитической форме в виде уравнения плоскости. Применяя формулы Коши, связывающие деформации и перемещения точек упругого тела, получены выражения для определения нормальных напряжений в произвольных центральных осях, а также в главных осях поперечного сечения стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ, 1999. – 591 с.
2. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. – М.: Физматлит, 2002. – 544 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
5. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник / А.В. Дарков, В.И. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1962. – 744 с.
6. Биргер, И.А. Сопротивление материалов: учебник / И.А. Бергер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
7. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.
8. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов: учебник / Н.М. Беляев. – М.: Физматлит, 1976. – 856 с.

SUMMARY

The task of bars bending is considered. The method of conclusion of the formula of normal stress determination of bending is offered, based on presentation of hypothesis of plane sections in an analytical form as equalization of plane. The expressions for determination of normal stress in arbitrary central axes of bar cross-sectional and also in the main axes are got applying formulas Cauchy, relating the deformations and displacement of points of resilient body.

E-mail: r4a@mail.ru
yak73@mail.ru

Поступила в редакцию 25.09.2015