

## ТЕРМОСИЛОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Старовойтов Э.И., д.т.н. <sup>2</sup>Нагиев Ф.Б.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель  
<sup>2</sup>Азербайджанская Государственная Морская Академия, Баку

**1. Введение.** Деформированию и колебаниям композитных элементов конструкций посвящено множество публикаций. Это обусловлено рядом их выдающихся качеств: прочностью и жесткостью при изгибе при минимуме весовых показателей, хорошей защитой от химических, тепловых и радиационных воздействий. Различные механико-математические модели упругих трехслойных конструкций предложены в [1–4]. Задачи квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин рассмотрены в работах [5–8]. Поведение элементов конструкций при импульсных воздействиях и терморadiационных ударах исследованы в [9–10]. Деформирование и колебания цилиндрических оболочек рассмотрено в статьях [11–15]. Здесь рассмотрено влияние температурного поля на деформирование круговой трехслойной цилиндрической оболочки.

**2. Постановка краевой задачи.** Рассматривается замкнутая круговая трехслойная цилиндрическая оболочка средней толщины с различными изотропными слоями. Для тонких несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа–Лява, для жесткого заполнителя используются точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты. Таким образом, учтена работа заполнителя на сдвиг и его поперечное обжатие. На рисунке 1 показаны трехслойный пакет до деформации (а) и распределение тангенциальных перемещений по толщине пакета после деформирования (б).

Перемещения в слоях выражаются через шесть неизвестных функций  $u_\alpha^k(x_\beta, t)$ ,  $w^k(x_\beta, t)$  – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев в направлении правой системы координат  $x, \varphi, z$ , отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя,  $z$  – к внешней нормали ( $k = 1, 2$  – номер слоя,  $\alpha = 1, 2$ ).

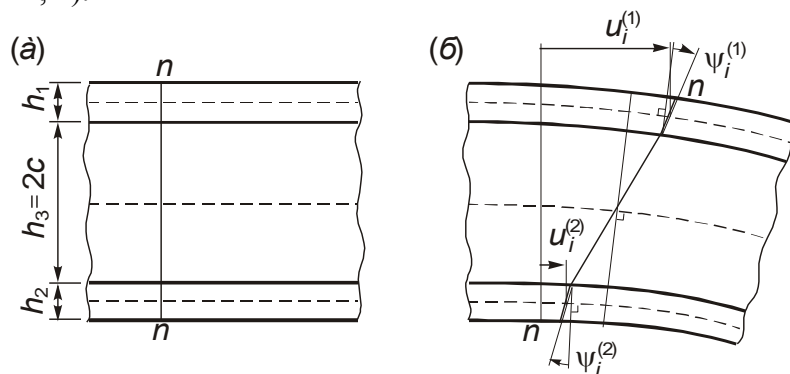


Рис. 1

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной цилиндрической оболочки в усилиях получены вариационным методом Лагранжа. При определении работы внешних сил считаем, что к наружным поверхностям несущих слоев приложены произволь-

ные распределенные нагрузки  $q_\alpha^k, q_3^k$ , а по границам (торцам оболочки) – обобщенные усилия и моменты. Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся следующими соотношениями:

$$T_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (1+k_\gamma z) dz, \quad M_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (z \mp a_k) (1+k_\gamma z) dz,$$

$$T_{i3}^3 = \int_{h_3} \sigma_{i3}^3 (1+k_1 z) (1+k_2 z) dz, \quad M_{\alpha i}^{3\pm} = \int_{h_3} \sigma_{\alpha i}^3 (1 \pm z/c) (1+k_\gamma z) dz \quad (k \neq 3; i = 1, 2, 3; \gamma \neq \alpha). \quad (1)$$

Считаем, что закрепление кромок несущих слоев осуществляется мембраной, установленной на срезах торцов, абсолютно жесткой на растяжение и сдвиг и свободно деформирующейся из своей плоскости.

В результате получим следующую систему шести линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} & -(RT_{11}^1)_{,1} - (T_{21}^1)_{,2} - (0,5RM_{11}^{3+})_{,1} - (0,5M_{21}^{3+})_{,2} + 0,5c^{-1}RT_{13}^3 = -q_1^1(R+c+h_1), \\ & -(T_{22}^2)_{,2} - \left(\frac{1}{R}c_2^2M_{22}^2\right)_{,2} - (RT_{12}^2)_{,1} - (c_2^2M_{12}^2)_{,1} - (B_{22}M_{22}^{3-})_{,2} - (RB_{22}M_{12}^{3-})_{,1} - \\ & \quad - c^{-1}RB_{22}T_{23}^3 - B_{22}M_{23}^{3-} = -q_2^2(R \pm 0,5h_2c_2^2) \left(1 - (c+h_2)\frac{1}{R}\right), \\ & -(T_{22}^1)_{,2} - \left(\frac{1}{R}c_2^1M_{22}^1\right)_{,2} - (RT_{12}^1)_{,1} - (c_2^1M_{12}^1)_{,1} - (B_{12}M_{22}^{3+})_{,2} - (RB_{12}M_{12}^{3+})_{,1} + \\ & \quad + c^{-1}RB_{12}T_{23}^3 - B_{12}M_{23}^{3+} = -q_2^1(R \pm 0,5h_1c_2^1) \left(1 + (c+h_1)\frac{1}{R}\right), \\ & -(RT_{11}^2)_{,1} - (T_{21}^2)_{,2} - (0,5RM_{11}^{3-})_{,1} - (0,5M_{21}^{3-})_{,2} - c^{-1}0,5RT_{13}^3 = -q_1^2(R-(c+h_2)), \\ & -(RM_{11}^1)_{,11} - (c_2^1M_{12}^1)_{,12} - (M_{21}^1)_{,12} - \left(c_2^1\frac{1}{R}M_{22}^1\right)_{,22} + T_{22}^1 + \left(R\frac{h_1}{4}M_{11}^{3+}\right)_{,11} + \\ & \quad + (RD_{12}M_{12}^{3+})_{,12} + (0,25h_1M_{21}^{3+}) + (D_{12}M_{22}^{3+})_{,22} + \frac{1}{2}M_{22}^{3+} - c^{-1}\left(R\frac{h_1}{4}T_{13}^3\right)_{,1} - \\ & \quad - \frac{1}{2}(RM_{13}^{3+})_{,1} - c^{-1}(RD_{12}T_{23}^3)_{,2} + (D_{12}M_{23}^{3+})_{,2} - \frac{1}{2}(M_{23}^{3+})_{,2} + \frac{1}{2}c^{-1}RT_{33}^3 = \\ & \quad = -\left[q_3^1 + 0,5h_1(q_{1,1}^1 + q_{2,2}^1 R^{-1}c_2^1)\right](R+c+h_1), \\ & -(RM_{11}^2)_{,11} - (c_2^2M_{12}^2)_{,12} - (M_{21}^2)_{,12} - \left(c_2^2\frac{1}{R}M_{22}^2\right)_{,22} + T_{22}^2 - \left(R\frac{h_2}{4}M_{11}^{3-}\right)_{,11} - \\ & \quad - (RD_{22}M_{12}^{3-})_{,12} - \left(\frac{h_2}{4}M_{21}^{3-}\right) - (D_{22}M_{22}^{3-})_{,22} + 0,5M_{22}^{3-} - c^{-1}\left(R\frac{h_2}{4}T_{13}^3\right)_{,1} - \\ & \quad - \frac{1}{2}(RM_{13}^{3-})_{,1} - c^{-1}(RD_{22}T_{23}^3)_{,2} - (D_{22}M_{23}^{3-})_{,2} - \frac{1}{2}(M_{23}^{3-})_{,2} - \frac{1}{2}c^{-1}RT_{33}^3 + \\ & \quad = -\left[q_3^2 - 0,5h_2(q_{1,1}^2 + (q_{2,2}^2)R^{-1}c_2^2)\right](R-(c+h_2)), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_1^k = 1, \quad c_2^k = (1 \pm a_k/R)^{-1}, \quad B_{k1} = 0,5, \quad B_{k2} = 0,5 \mp D_{k2}, \quad D_{k1} = h_k/4, \quad a_k = c + 0,5h_k,$$

$$D_{k2} = 0,25h_k(1 \pm a_k/R)^{-1} R^{-1} \quad (k = 1, 2; \alpha = 1, 2),$$

нижний знак в выражениях  $c_2^k$ ,  $D_{k2}$  соответствует  $k = 2$ .

Напряжения и деформации в слоях оболочки свяжем законом Гука:

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta}^k &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $s_x^{(k)}$ ,  $\varepsilon_x^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования;  $T_k$  – температура;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения материала  $k$ -го слоя.

Перемещения в слоях выражаются через шесть искомых функций  $u_\alpha^k(x_\beta, t)$ ,  $w^k(x_\beta, t)$  – (см. рисунок 1) следующим образом:

- в несущих слоях ( $c \leq z \leq c + h_1$ ,  $-c - h_2 \leq z \leq -c$ )

$$\begin{aligned} u_\alpha^{kz} &= u_\alpha^k + (z \mp a_k) \psi_\alpha^k; \quad a_k = c + 0,5h_k, \\ \psi_1^k &= -w^k_{,1}, \quad \psi_2^k = (R \pm a_k)^{-1} (u_2^k - w^k_{,2}); \end{aligned} \quad (4)$$

- в заполнителе ( $-c \leq z \leq c$ )

$$\begin{aligned} u_1^{3z} &= 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) (u_1^k \pm 0,5h_k w^k_{,1}), \\ u_2^{3z} &= \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) ((0,5 \mp D_{k2}) u_2^k \pm D_{k2} w^k_{,2}), \\ w^{3z} &= 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) w^k, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $D_{k2}$  введено в соотношениях (2).

Деформации в слоях следуют из выражений (4), (5) и соотношений Коши. Разрешающие уравнения в перемещениях деформирования термоупругой круговой трехслойной цилиндрической оболочки, следуют из соотношений (2), после выражения в них внутренних усилий через величины  $u_\alpha^m$ ,  $w^m$  с помощью соотношений (3)–(5). В результате

$$\begin{aligned} L_\alpha^m &= \sum_{k=1}^2 \left[ \left( a_{m\alpha 1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m\alpha 2}^k \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} + a_{m\alpha 3}^k \right) u_\alpha^k + a_{m\alpha 4}^k \frac{\partial^2 u_\beta^k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_{m\alpha 5}^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m\alpha 6}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m\alpha 7}^k \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) w^k \right] = -L_{\alpha q}^m, \\ L_3^m &= \sum_{\alpha, k=1}^2 \left[ \left( a_{m31}^{\alpha k} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} + a_{m32}^k \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{m33}^{\alpha k} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + a_{m34}^k \right) w^k + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_{m35}^{\alpha k} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^3} + a_{m36}^{\alpha k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + a_{m37}^{\alpha k} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2} \right) u_\alpha^k \right] = -L_{3q}^m \quad (m, \alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь коэффициенты выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$\begin{aligned}
a_{k11}^k &= K_k^+ h_k (1 \pm a_k) + K_3^+ c (2 \pm c) / 3, \quad a_{\alpha 11}^k = K_3^+ c / 3, \\
a_{k12}^k &= G_k L N_k + G_3 S_k / 2, \quad a_{\alpha 12}^k = G_3 S_3 / 2, \quad a_{k13}^k = -G_3 / (2c), \\
a_{\alpha 13}^k &= G_3 / (2c), \quad a_{k14}^k = h_k \left( K_k + \frac{1}{3} G_k \right) + \frac{4}{3} B_{k2} c \left( K_3 + \frac{1}{3} G_3 \right), \\
a_{\alpha 14}^k &= \frac{2}{3} \left( K_3 + \frac{1}{3} G_3 \right) B_{k2} c, \quad a_{\alpha 16}^k = \mp \frac{1}{6} K_3^+ h_k c, \\
a_{k15}^k &= K_k^- h_k + K_3 (5c/6 \pm 0,5) - G_3 (\pm h_k / (4c) + 13c/8 \pm 5/6), \\
a_{\alpha 15}^k &= K_3 (\mp 0,5 + c/6) + G_3 (\mp h_k / (4c) + c/18 \mp 1/6), \quad a_{k16}^k = -K_k^+ h_k^3 / 12 \pm K_3^+ h_k c (2 \pm c) / 6, \\
a_{k17}^k &= -G_k (h_k \mp (a_k \pm 1) L N_k) \pm 4 K_3 D_{k2} c / 3 + G_3 (\pm 4 D_{k2} c / 9 \pm h_k S_k / 4), \\
a_{\alpha 17}^k &= \mp \frac{2}{3} K_3 D_{k2} c \mp G_3 \left( \frac{2}{9} D_{k2} c + h_k S_3 / 4 \right), \\
a_{k21}^k &= K_k^+ (2h_k c_2^k + A_k (c_2^k)^2 + (1 \mp 2c_2^k (a_k \pm 1)) L N_k) + 2K_3^+ B_{k2}^2 S_k, \\
a_{\alpha 21}^k &= 2K_3^+ B_{12} B_{22} S_3, \quad a_{\alpha 22}^k = 4G_3 B_{12} B_{22} c / 3, \\
a_{k22}^k &= G_k h_k \left( h_k^2 c_2^k / 6 + (1 \pm a_k) (h_k^2 (c_2^k)^2 / 12 + 1) \right) + 4G_3 B_{k2}^2 c (2 \pm c) / 3, \\
a_{k23}^k &= -2G_3 B_{k2}^2 (1/c + S_k \mp 2), \quad a_{\alpha 23}^k = 2G_3 B_{12} B_{22} (1/c - S_3), \\
a_{k24}^k &= \left( K_k + \frac{1}{3} G_k \right) h_k + 4 \left( K_3 + \frac{1}{3} G_3 \right) B_{k2} c / 3, \\
a_{\alpha 24}^k &= 2 \left( K_3 + \frac{1}{3} G_3 \right) B_{\alpha 2} c / 3, \quad a_{\alpha 26}^k = \mp 2K_3^+ B_{\alpha 2} D_{k2} S_3, \\
a_{k25}^k &= K_k^+ \left( h_k c_2^k + (1 \mp c_2^k (a_k \pm 1)) L N_k \right) + K_3 B_{k2} (S_k \pm 1) + \\
&\quad + G_3 B_{k2} \left( (7/3 \mp 2D_{k2}) S_k + 2D_{k2} (2 \mp 1/c) \mp 5/3 \right), \\
a_{\alpha 25}^k &= K_3 B_{\alpha 2} (S_3 \mp 1) + G_3 B_{\alpha 2} \left( (7/3 \pm 2D_{k2}) S_3 \mp 2D_{k2} / c \mp 1/3 \right), \\
a_{k26}^k &= -K_k^+ c_2^k \left( h_k + A_k c_2^k \mp (a_k \pm 1) L N_k \right) \pm 2K_3^+ B_{k2} D_{k2} S_k, \\
a_{k27}^k &= -\frac{1}{12} h_k^3 c_2^k \left( K_k + G_k \left( \frac{4}{3} + c_2^k (1 \pm a_k) \right) \right) \pm \frac{2}{3} B_{k2} c \left( +K_3 h_k + G_3 (2D_{k2} (2 \pm c) + \frac{1}{3} h_k) \right), \\
a_{\alpha 27}^k &= \mp \frac{1}{3} B_{\alpha 2} c \left( K_3 h_k + G_3 \left( 4D_{k2} + \frac{1}{3} h_k \right) \right), \quad a_{k31}^{1k} = -h_k^3 K_k^+ (1 \pm a_k) / 12 - K_3^+ h_k^2 c / 12, \\
a_{k31}^{2k} &= -K_k^+ (c_2^k)^2 A_k - 2K_3^+ D_{k2}^2 S_k, \quad a_{\alpha 31}^{1k} = K_3^+ h_1 h_2 c / 12, \\
a_{k32}^k &= -K_k h_k^3 c_2^k / 6 - G_k \left( h_k^3 c_2^k (2/3 + c_2^k (1 \pm a_k)) / 12 + A_k \right) - \\
&\quad - 4K_3 D_{k2} h_k c / 3 - G_3 \left[ 4D_{k2} c (D_{k2} (2 \pm c) + h_k / 3) / 3 + h_k^2 S_k / 8 \right], \\
a_{\alpha 32}^k &= K_3 c (D_{22} h_1 + D_{12} h_2) / 3 + G_3 \left( c (4D_{22} h_1 + D_{12} h_2 + 12D_{12} D_{22}) / 9 + h_1 h_2 S_3 / 8 \right), \\
a_{k33}^{1k} &= \mp K_3^+ h_k (5c/6 \pm 0,5) + G_3 \left( h_k (5/6 + h_k / (8c)) + c (2/3 \pm c/3 \pm 13h_k / 18) \right), \\
a_{\alpha 33}^{1k} &= K_3 (h_1 (1 - c/3) / 4 + h_2 (1 + c/3) / 4) + \\
&\quad + G_3 \left[ h_1 (1 - c/3) / 12 + h_2 (1 + c/3) / 12 + h_1 h_2 / (8c) + c/3 \right], \quad a_{\alpha 31}^{2k} = 2K_3^+ D_{12} D_{22} S_3, \\
a_{k33}^{2k} &= 2K_k^+ c_2^k \left( h_k \mp (a_k \pm 1) L N_k \right) \mp 2K_3 D_{k2} (S_k \pm 1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +G_3(D_{k2}(10\mp 14S_k)/3+2D_{k2}^2(1/c+S_k\mp 2)+0,5S_k), \\
a_{\alpha 33}^{2k} & =K_3(D_{12}(1-S_3)+D_{22}(1+S_3))+G_3(D_{22}(1+7S_3)/3+ \\
& +D_{12}(1-7S_3)/3+2D_{12}D_{22}(1/c-S_3)+0,5S_3), \\
a_{k34}^k & =-K_k^+LN_k-K_3(0,5S_k+0,5/c\pm 1)-2G_3(S_k+1/c\mp 1)/3, \\
a_{\alpha 34}^k & =-K_3^+(S_3-1/c)/2, \quad a_{k35}^{1k}=K_k^+h_k^3/12\mp K_3^+h_kc(2\pm c)/6, \\
a_{k35}^{2k} & =K_k^+c_2^k(h_k+c_2^kA_k\mp (a_k\pm 1)LN_k)\mp 2K_3^+B_{k2}D_{k2}S_k, \\
a_{\alpha 35}^{1k} & =\mp K_3^+h_ka_c/6, \quad a_{\alpha 35}^{2k}=\mp 2K_3^+B_{k2}D_{\alpha 2}S_3, \\
a_{k36}^{1k} & =-K_k^-h_k-K_3(5c/6\pm 0,5)+G_3(13c/18\pm h_k/(4c)\pm 5/6), \\
a_{k36}^{2k} & =-K_k^+(h_kc_2^k+(1\mp c_2^k(a_k\pm 1))LN_k)-K_3B_{k2}(S_k\pm 1)\pm \\
& \pm G_3(2B_{k2}D_{k2}(1/c\mp 2+S_k)\mp B_{k2}(7S_k\mp 5)/3), \\
a_{\alpha 36}^{1k} & =-K_3(c/6\pm 0,5)-G_3(c/18\pm h_ka_c/(4c)\pm 1/6), \\
a_{\alpha 36}^{2k} & =-K_3B_{k2}(S_3\pm 1)\mp G_3(2B_{k2}D_{\alpha 2}(1/c-S_3)\pm B_{k2}(7S_3\pm 1)/3), \\
a_{k37}^{1k} & =G_k(h_k\mp (a_k\pm 1)LN_k)\mp 4K_3D_{k2}c/3\mp G_3(4D_{k2}c/9+h_kS_k/4), \\
a_{k37}^{2k} & =h_k^3c_2^k/12(K_k+G_k(4/3+c_2^k(1\pm a_k)))+2B_{k2}c/3(\mp K_3h_k\mp G_3(h_k/3+2D_{k2}(2\pm c))), \\
a_{\alpha 37}^{1k} & =\mp 2K_3D_{\alpha 2}c/3\mp G_3(2D_{\alpha 2}c/9+h_ka_c/4), \\
a_{\alpha 37}^{2k} & =\mp K_3B_{k2}h_ka_c/3\mp G_3B_{k2}c(h_ka_c/3+4D_{\alpha 2})/3, \\
LN_1 & =\ln|(1+c+h_1)/(1+c)|, \quad LN_2=\ln|(1-c)/(1-c-h_2)|, \quad LN_3=\ln|(1+c)/(1-c)|, \\
S_\alpha & =\pm(2\mp 1/c)+0,5(1\mp (2\mp 1/c)1/c)LN_3, \\
S_3 & =1/c+0,5(1-1/c^2)LN_3, \quad A_k=\mp h_k(a_k\pm 1)+(a_k^2\pm(2a_k\pm 1))LN_k, \\
K_k^+ & =K_k+4G_k/3, \quad K_k^-=K_k-2G_k/3, \quad (k, \alpha = 1, 2; k \neq \alpha). \tag{7}
\end{aligned}$$

Нижний знак выражения ( $\mp$ ) в уравнениях (7) соответствует индексу  $\alpha = 2$ , если этот индекс отсутствует, то  $-$  индексу  $k = 2$ . Правые части уравнений  $L_{iq}^k$  в (6) обусловлены внешними нагрузками  $q_i^k$  и температурой  $T_k$ :

$$\begin{aligned}
L_{1q}^k & =m_kRq_1^k+3R\left[\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_k(1+z/R)dz+0,5\alpha_{03}\int_{h_3}K_3T_3(1\pm z/c)(1+z/R)dz\right]_{,1}, \\
L_{2q}^k & =3\left[\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_kdz+R^{-1}c_2^k\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_k(z\mp a_k)dz+B_{k2}\alpha_{03}\int_{h_3}K_3T_3(1\pm z/c)dz\right]_{,2}+ \\
& \quad +(R\pm 0,5h_kc_2^k)m_kq_2^k, \\
L_{3q}^k & =Rm_k[q_3^k\pm 0,5h_k(q_{1,1}^k+R^{-1}c_2^kq_{2,2}^k)]+ \\
& +3R\left[\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_k(z\mp a_k)(1+z/R)dz\mp 0,25h_k\alpha_{03}\int_{h_3}K_3T_3(1\pm z/c)(1+z/R)dz\right]_{,11}+ \\
& +3\left[R^{-1}c_2^k\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_k(z\mp a_k)dz\mp D_{k2}\alpha_{03}\int_{h_3}K_3T_3(1\pm z/c)dz\right]_{,22}-
\end{aligned}$$

$$-3 \left\{ \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k dz + 0,5 \alpha_{03} \left[ \int_{h_3} K_3 T_3 (1 \pm z/c) dz \pm Rc^{-1} \int_{h_3} K_3 T_3 (1 \pm z/R) dz \right] \right\},$$

$$m_k = 1 \pm (c + h_k) R^{-1}; \quad (k=1,2). \quad (8)$$

Для замыкания краевой задачи о термоупругом деформировании круговой трехслойной цилиндрической оболочки к уравнениям равновесия (6)–(8) необходимо добавить граничные условия. Считаем, что закрепление кромок внешних слоев осуществляется мембраной, установленной на срезах торцов, абсолютно жесткой на растяжение и сдвиг и свободно деформирующейся из своей плоскости.

Силовые граничные условия следуют из принципа Лагранжа. Они формулируются из требования выполнения равенства в каждой точке координатной линии заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам, входящим в выражение контурного интеграла вдоль той же линии. При этом на каждом торце формулируется по восемь граничных условий.

Кинематических условий может быть поставлено также по восемь на каждом торце трехслойной цилиндрической оболочки. Рассмотрим некоторые из них.

*Жесткое закрепление.* В этом случае на торцах цилиндрической оболочки  $x = 0, L$  должны выполняться следующие кинематические условия:

$$u_1^k = u_2^k = w^k = w_{,1}^k = 0 \quad (k=1,2). \quad (9)$$

*Свободное опирание.* Примем условия свободного опирания оболочки по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Граничные условия в сечениях  $x = 0; L$  ( $L$  – длина оболочки) принимают следующий вид:

$$u_2^k = w^k = u_{,1}^k = w_{,1}^k = 0 \quad (k=1,2). \quad (10)$$

Если оболочка находится в температурном поле, то краевые условия (10) перестают быть однородными. В этом случае осуществление перехода к (10) возможно в рамках обобщенного решения, если внести неоднородность, обусловленную тепловым воздействием, в состав внешних сил.

Таким образом, добавив к уравнениям равновесия (6)–(7) термоупругой круговой трехслойной цилиндрической оболочки граничные условия (9)–(10), получим замкнутую краевую задачу.

**3. Аналитическое решение задач термоупругости.** Пусть перпендикулярно поверхности внешнего несущего слоя на оболочку начинает воздействовать тепловой поток интенсивности  $q_t$ . Внутренняя поверхность оболочки ( $z = -h_2 - c$ ) предполагается теплоизолированной. Температурное поле  $T^k$  в оболочке будет описываться известным выражением [3]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (11)$$

$$\tau = at/H^2; \quad s = z/H; \quad a = \lambda/C; \quad \lambda = \lambda_k h_k/H; \quad C = \rho_k C_k h_k/H.$$

где  $a_k = \lambda_k / (C_k \rho_k)$  – теплопроводность  $k$  – го слоя;  $\lambda_k, C_k$  – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости;  $\rho_k$  – плотность материала.

Так как температура неоднородна только по толщине пакета, то отличными от нуля компонентами тепловой нагрузки в уравнениях равновесия будут только те, которые входят в  $L_{3q}^k$ . Если внешняя силовая нагрузка нормальна к поверхности оболочки, то  $q_1^k = q_2^k = 0$  и из (8) получаем:

$$L_{1q}^k = L_{2q}^k = 0; \quad L_{3q}^k = Rm_k q_3^k - 3 \left\{ \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k dz + 0,5\alpha_{03} \left[ \int_{h_3} K_3 T_3 (1 \pm z/c) dz \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm c^{-1} \int_{h_3} K_3 T_3 (1 + z/R) dz \right] \right\}. \quad (12)$$

Примем условия свободного опирания рассматриваемой оболочки по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. В этом случае вид решения системы (6), удовлетворяющий граничным условиям (10), будет следующий:

$$u_1^k = \sum_{p,m} U_{1pm}^k \cos \frac{\pi mx}{l} \cos p\varphi, \\ u_2^k = \sum_{p,m} U_{2pm}^k \sin \frac{\pi mx}{l} \sin p\varphi, \\ w^k = \sum_{p,m} W_{pm}^k \sin \frac{\pi mx}{l} \cos p\varphi \quad (k = 1, 2). \quad (13)$$

Внешнюю ненулевую нагрузку в (12) необходимо разложить в двойной тригонометрический ряд:

$$L_{3q}^k = \sum_{p,m} q_{3pm}^k \sin \frac{\pi mx}{l} \cos p\varphi, \quad (14) \\ q_{3pm}^k = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi} L_{3q}^k \sin \frac{\pi mx}{l} \cos p\varphi dx d\varphi.$$

В случае жесткого закрепления решение системы уравнений представляется в виде:

$$u_1^k = \sum_{m,p} U_{1pm}^k \sin \left( \frac{2\pi m}{L} x - \pi m \right) \cos(p\varphi), \\ u_2^k = \sum_{m,p} U_{2pm}^k \left[ (-1)^m - \cos \left( \frac{2\pi m}{L} x - \pi m \right) \right] \sin(p\varphi), \\ w^k = \sum_{m,p} U_{2pm}^k \left[ (-1)^m - \cos \left( \frac{2\pi m}{L} x - \pi m \right) \right] \cos(p\varphi). \quad (15)$$

После подстановки соотношений (13) или (15) с учетом (14) в уравнения равновесия (6) получим систему шести линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $U_{\alpha pm}^k, W_{pm}^k$  ( $k, \alpha = 1, 2$ ).

**4. Численные результаты** получены для трехслойной оболочки с толщинами слоев  $h_1 = 0,01, h_2 = 0,03, h_3 = 0,1$ , интенсивность внешней осесимметричной распределенной нагрузки  $q_0 = 10$  МПа, длина оболочки  $l = 2R$ . Материалы слоев: Д16Т-фторопласт-Д16Т. Номер кривой совпадает с номером слоя, штрих сверху обозначает термосиловое деформирование ( $T_1 = 343$  К).

На рисунке 2 показано изменение прогибов  $w$  ( $a$ ) и тангенциальных перемещений  $u$  ( $b$ ) несущих слоев вдоль оси оболочки при осесимметричном нагружении: 1, 2 – номера слоев. Эффект сжимаемости заполнителя проявляется в сдвиге максимальных прогибов ближе к торцам оболочки. Тангенциальные перемещения в середине оболочки равны нулю и достигают максимума на торцах, причем во втором слое они в два раза больше.

Уменьшение прогибов слоев ( $a$ ) и тангенциального перемещения  $u_2$  при некотором увеличении  $u_1$  ( $b$ ) по середине пролета оболочки ( $x = l/2$ ) с ростом толщины запол-

нителя иллюстрирует рисунок 3: 1, 2 – номера слоев. В соответствии с геометрическими гипотезами модели вблизи  $h_3 = 0$  возникает слабосингулярная особенность, поэтому кривые прогибов построены от некоторого конечного значения толщины заполнителя.

Нагревание оболочки на  $50^\circ$  приводит к увеличению перемещений в обоих случаях примерно на 35 %. Следовательно, тепловое воздействие существенно изменяет величину параметров напряженно-деформированного состояния упругой трехслойной оболочки.

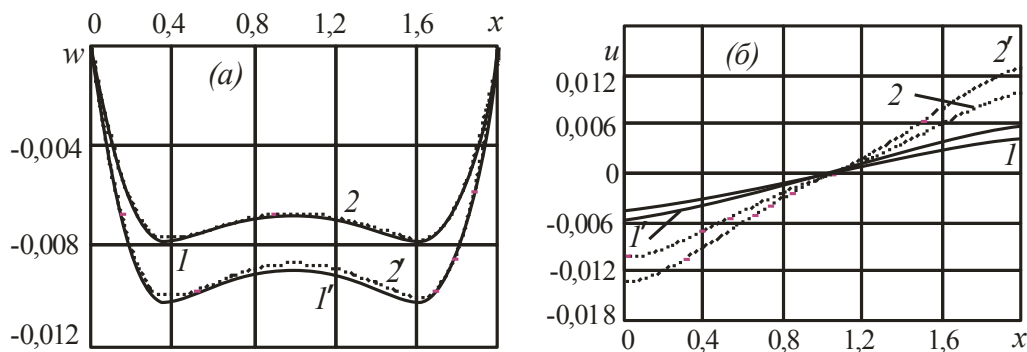


Рис. 2,3. Изменение вдоль оси оболочки прогиба – а, тангенциального перемещения – б при нагревании на  $50^\circ$

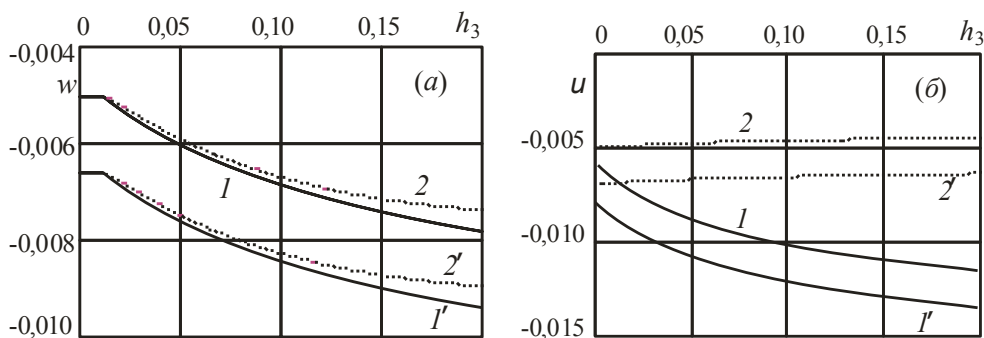


Рис. 4,5. Изменение перемещений в зависимости от толщины заполнителя

**5. Выводы.** Предложенные уравнения равновесия упругих трехслойных круговых цилиндрических оболочек позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние при нагружении в температурном поле. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на перемещения в оболочке.

### РЕЗЮМЕ

Рассмотрено влияние температурного поля на деформирование круговой трехслойной цилиндрической оболочки. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель сжимаемый. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения задач и проведен численный анализ решений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.



3. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
4. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
5. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44, № 5. P. 744–755.
6. Leonenko, D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. Vol. 46, № 2. 2011. P. 291–298.
7. Старовойтов, Э.И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э.И. Старовойтов, А.В. Попченко, Д.В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-техн. сборник. Вып. 28.– Мн.: 2013. – С. 23–26.
8. Старовойтов, Э.И. Термосиловое деформирование трехслойных упругопластических стержней / Э.И. Старовойтов, Д.М. Савицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 51–57.
9. Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47, N 1. P. 111–118.
10. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics: Vol. 47, N 5, 2011. – P. 580–589.
11. Sofiyev, A.H. Vibration and Stability of Composite Cylindrical Shells Containing a FG Layer Subject to Various Loads / A.H. Sofiyev // Structural Engineering and Mechanics: An International Journal. – 2007. – 27. – pp. 365–391.
12. Hufenbach, W. Vibration and damping behavior of multi-layered composite cylindrical shells / W. Hufenbach, C. Holste, L. Kroll // Composite Structures.– 2002. – 58 (1). – pp. 165–174.
13. Viswanathan, K. K. Free vibration of multi-layered circular cylindrical shell with cross-ply walls, including shear deformation by using spline function method / K. K. Viswanathan, K. S. Kim, J. H. Lee, H. S. Koh, and J. B. Lee // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2008. – Vol. 22, no. 11. – pp. 2062–2075.
14. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50, № 3. P. 359-366.
15. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials, Vol. 51, No. 5, November, 2015. – P. 561–570.

#### SUMMARY

*The influence of temperature field on deformation of the three-layer circular cylindrical shell is consider. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypothesis's broken normal. Filler is compressible. The analytical decisions a problem are received and their numeric analysis is conducted.*

**E-mail:** [edstar@mail.by](mailto:edstar@mail.by)  
[faik\\_nagiyev@yahoo.com](mailto:faik_nagiyev@yahoo.com)

Поступила в редакцию 17.09.2015