

**РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ
И ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ
ДЛЯ ТЕЛА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

к.т.н. ¹Миронов Д.Н., к.т.н. ²Гончаренко В.П., к.ф.-м.н. ¹Чигарева Ю.А.,
асп. ¹Чигарев В.А.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск
²УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

Сфера с наружным радиусом $r = R_2$ и внутренним $r = R_1$ находится под воздействием температурного поля T_2 при $r = R_2$ T_1 на внутренней поверхности $r = R_1$.

Термоупругий потенциал Φ для перемещений

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial i}, \quad (i = x, y, z). \quad (1)$$

Уравнения для Φ в декартовых координатах получаются из уравнений теплопроводности в перемещениях при подстановке в них выражения (1) и известных преобразованиях [1]

$$\Delta \Phi - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T, \quad (2)$$

где μ — коэффициент Пуассона, α — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, G — модуль сдвига.

Подстановка (1) в условия Коши и затем в закон Гука даёт формулы для напряжений через потенциал Φ [2].

$$\sigma_{ik} = 2G \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial k} + \frac{\delta_{ik}}{1-2\mu} [\mu \Delta \Phi - (1+\mu) \alpha T] \right\}. \quad (3)$$

Исключим в (3) температурный множитель $(1+\mu)\alpha T$ используя (2), тогда получим

$$\sigma_{ik} = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial k} - \Delta \Phi \delta_{ik} \right) + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \delta_{ik}. \quad (4)$$

В сферических координатах в случае центральной симметрии из (3) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{4G}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta \Phi \right) + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение для перемещения и в этом случае имеет вид

$$\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial r}. \quad (6)$$

В случае если изменение температуры происходит медленно так, что можно использовать гипотезу Дюамеля, уравнение потенциала перемещений в сферических координатах примет вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1+\mu}{1-\mu} a r^2 T. \quad (7)$$

В уравнении (7) пренебрегаем инерционными силами. Интегрируя (7) по r получим

$$\Phi = \frac{1 + \mu \alpha}{1 - \mu} \frac{r}{3} \int_{R_2}^r \xi(T(\xi, t)) d\xi. \quad (8)$$

Здесь средняя температура сферы в момент времени t в зависимости от r [4]

$$\langle T(t) \rangle = \frac{3}{r^3} \int_{R_2}^r \xi^2 T(t) d\xi. \quad (9)$$

Рассмотрим стационарный случай, когда $T(r, t) = T(r)$, тогда уравнение теплопроводности запишется в виде [5]

$$\frac{\partial^2(r, T_s)}{\partial r^2} = 0, \quad T_s = T_1 \text{ при } r = R_1, \quad T_s = T_2, \text{ при } r = R_2.$$

Непосредственным интегрированием получаем

$$T_s = c + \frac{c_1}{r}, \quad c = \frac{T_1 R_1 - T_2 R_2}{R_1 - R_2}, \quad c_1 = \frac{(T_2 - T_1) R_1 R_2}{R_1 - R_2}. \quad (10)$$

Уравнение теплопроводности в сферических координатах, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}. \quad (11)$$

Пусть в момент времени $t=0$ при $r = R_2$ происходит скачком падение температуры эти T_2 до 0 и при $t > 0$ при $r = R_2$ подогревания нулевая температура. Тога

$$T(r, 0) = T_s(r), \quad T(R_1, t) = T_1, \quad T(R_2, t) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (11) решаем методом разделения переменных

$$T(r, t) = T_{(r)}^{(r)} T_{(t)}^{(t)}. \quad (13)$$

Тогда получим из (11) с учетом (13)

$$\frac{a}{r} \frac{d^2(rT^{(t)})}{dT^{(t)} dr^2} = \frac{dT^{(t)}}{T^{(t)} dt} = \text{const} = A. \quad (14)$$

$$\frac{dT^{(t)}}{T^{(t)} dt} = A.$$

$$T_{(t)}^{(t)} = e^{At+C} = Ce^{At}. \quad (15)$$

Так как при $T(t, r)$ должна убывать, для $T_{(r)}^{(r)}$ получим уравнение по $\frac{A}{d} = -\lambda^2$ и

$$\frac{d^2(rT^{(r)})}{r dr^2} = +\lambda T^{(r)} = 0 \quad (16)$$

Решение (16) запишем в виде

$$T_{(r)}^{(r)} = \frac{1}{r} [C_1(\lambda) \cos \lambda r + C_2(\lambda) \sin \lambda r]. \quad (17)$$

Таким образом, частное решение уравнение (11) при любом лимеет вид

$$T_{(r,t)}^{(\lambda)} = \left(C_1(\lambda) \frac{\cos \lambda r}{r} + C_2(\lambda) \frac{\sin \lambda r}{r} \right) \exp(-\lambda^2 t), \quad (18)$$

а общее решение представим в виде

$$T_{(r,t)} = \int_0^\infty \left[C_1(\lambda) \frac{\cos \lambda r}{r} + C_2(\lambda) \frac{\sin \lambda r}{r} \right] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda. \quad (19)$$

В выражении (19) $T(r, t)$ представляет собой интеграл от параметров r и t для того, чтобы было возможно дифференцирование по r и t функции $c_1(\lambda)$ и $c_2(\lambda)$ должны стремиться к нулю.

Подставляя (19) в начальное условие (12), поучим

$$T_{(r,0)} = \int_0^{\infty} \left[C_1(\lambda) \frac{\cos \lambda r}{r} + C_2(\lambda) \frac{\sin \lambda r}{r} \right] d\lambda = T_s(r). \quad (20)$$

Считаем, что функция $T_s(r)$ определяя на интервале $0 \leq r \leq \infty$ следующим образом [6]

$$T_s(r) = \begin{cases} T_1 & 0 \leq r \leq R_1 \\ T_s(r) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ T_2 & R_2 < r < \infty \end{cases} \quad (21)$$

и является четкой, тогда запишем $T_s(r)$ в виде

$$T_s(r) = \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_s(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right) \cos \lambda r \right\} d\lambda. \quad (22)$$

Сравнивая (20) и (22) получим, что

$$C_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_s(\xi) \frac{\cos \lambda \xi}{\xi} d\xi, \quad C_2(\lambda) = 0. \quad (23)$$

Представив (23) в (19), получим после преобразований

$$\begin{aligned} T_{(r,t)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} T_s(\xi) \cos \lambda (\xi - r) d\xi \right] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_s(\xi + r) \left[\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2 t) \cos \xi \lambda d\lambda \right] d\xi = \\ &= \left(\lambda = \frac{z}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_s(\xi + r) \left[\int_0^{\infty} \exp(-z^2) \cos \frac{\xi z}{\sqrt{t}} \frac{d\lambda}{\sqrt{t}} \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[T_1 \int_0^{R_1} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi + \int_{R_1}^{R_2} \left(C + \frac{C_1}{\xi + r} \right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi + T_2 \int_0^{R_1} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[T_1 2\sqrt{\pi} \sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{R_1}{2\sqrt{t}}\right) + C 2\sqrt{\pi} \sqrt{t} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{R_2}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{R_1}{2\sqrt{t}}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)}{\xi + r} d\xi + T_2 \int_{R_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[T_1 2\sqrt{\pi t} \operatorname{erf}\left(\frac{R_1}{2\sqrt{t}}\right) + C 2\sqrt{\pi t} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{R_2}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{R_1}{2\sqrt{t}}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + T_2 \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{t}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_2}{2\sqrt{t}}\right) + C_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)}{\xi + r} d\xi \right] = \\ &= \frac{C_1}{\sqrt{\pi t}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)}{\xi + r} d\xi + 2 \left[(T_1 - C) \operatorname{erf}\left(\frac{R_1}{2\sqrt{t}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + C \operatorname{erf}\left(\frac{R_2}{2\sqrt{t}}\right) + T_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{R_2}{2\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^{R_2} \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)}{\xi+r} d\xi = \{\xi+r=z, d\xi=dz\} = \\
& = \int_{R_1+r}^{R_2+r} \frac{\exp\left[-\frac{1}{4t}(z-r)^2\right]}{\xi+r} dz = \int_{R_1+r}^{R_2+r} \frac{\exp\left(-\frac{1}{4t}\right)(z^2-2zr+r^2)}{z} dz = \\
& = \int_{R_1+r}^{R_2+r} \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)}{z} dz + \int_{R_1+r}^{R_2+r} \frac{\exp\left(-\frac{r}{2t}z\right)}{z} dz + \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \int_{R_1+r}^{R_2+r} \frac{dz}{z} = \\
& = \frac{1}{2} Ei\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \Big|_{R_1+r}^{R_2+r} + Ei\left(\frac{r}{2t}z\right) \Big|_{R_1+r}^{R_2+r} + \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \ln|z| \Big|_{R_1+r}^{R_2+r} = \\
& = \frac{1}{2} Ei\left(-\frac{(R_2+r)^2}{4t}\right) - \frac{1}{2} Ei\left(-\frac{(R_1+r)^2}{4t}\right) + Ei\left(\frac{(R_2+r)r}{2t}\right) - \\
& \quad - Ei\left(\frac{(R_1+r)r}{2t}\right) + \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \ln \frac{R_2+r}{R_1+r}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Вычислим упругие напряжения в стационарном случае, используя формулы (5), пренебрегая инерционными членами и используя для $T = T(r)$,

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\frac{4G}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{4G}{r} \left[\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{1}{r^2} \int_{R_1}^r \xi^2 (T(\xi) - T_0) d\xi \right] \\
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta \Phi \right) = \frac{2G}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2G \Delta \Phi
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= 2 \left[-\frac{4G}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] - 2G \left[\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \left(-\frac{2}{r^3}\right) \int_{R_1}^r \xi^2 (T(\xi) - T_0) d\xi + \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (T(\xi) - T_0) \right] = \\
&= -4G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{2}{r^3} \int_{R_1}^r \xi^2 (T(\xi) - T_0) d\xi - \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha 2G (T(\xi) - T_0).
\end{aligned}$$

Обозначим среднюю флуктуацию температуры [7]

$$\langle T(r, t) \rangle = \frac{3}{r^3} \int_{R_1}^r (T(\xi) - T_0) d\xi. \tag{26}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\frac{4}{3} G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{3}{r^3} \int_{R_1}^r \xi^2 (T(\xi) - T_0) d\xi = -\frac{4}{3} G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \langle T(r, t) \rangle \\
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{4G}{3} \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \langle T(r, t) \rangle - \frac{4}{3} G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha G (T(r, t) - T_0).
\end{aligned} \tag{27}$$

Для удовлетворения граничных условий на поверхности $r = R_2$ считаем, что она свободно деформируется, то есть отсутствуют напряжения, а так же считаем, что

$$T_2 = T(R_2). \tag{28}$$

При $r = R_1$ имеет место соотношения

$$\sigma_{\varphi\varphi} \Big|_{r=R_1} = \sigma_{\theta\theta} \Big|_{r=R_1} = -2G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (T(R_1) - T(R_2)). \tag{29}$$

$$\sigma_{rr} = 0 \Big|_{r=R_1}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда учитывается зависимость напряжений температуры во времени и не учитывается зависимость от инерционных членов. Тогда уравнение для потенциала перемещений имеет вид как в статическом случае (2.7), а $T(t, r)$

Как было рассмотрено, $t = 0$ на внешней поверхности сферы $r = R_2$ температуры T скачком изменяется до нуля и затем при $t > 0$ за счёт граничного условия при $r = R_2$ поддерживается нулевая температура.

Рассмотрим упругопластическое поведение сферы при внезапном охлаждении наружной поверхности

Положим, что распределение температуры в сфере при $t = 0$ имеет стационарное распределение T_s , которое вообще говоря зависит от r . При $t = 0$ температура на внешней поверхности сферы падает до нуля и такой поддерживается при $r = R_2$ и $t > 0$. На внутренней поверхности $r = R_1$ поддерживается температура T_1 . Как следует из выражений для напряжений максимальные значения напряжений имеют место на внешней поверхности сферы при $r = R_2$.

Рассмотрим переход в пластическое состояние на основе использования условия текучести в форме Мизеса [8]

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = k. \quad (30)$$

Здесь k предел пластичности.

Если материал является идеально пластическим, то условие Мизеса выполняется всюду в пластической области.

Уравнения равновесия в случае сферической симметрии имеют вид

$$\frac{r}{2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 0. \quad (31)$$

Интегрируя (25) с учётом (24), получим распределение напряжений в пластической области

$$\sigma_{rr} = \pm 2k \ln \frac{r}{C_1(t)}. \quad (32)$$

где $C_1(t)$ – произвольная функция, зависящая от времени t .

В упругой области согласно формулам (23),(24) имеем

$$\sigma_{rr} = -\frac{4}{3} G \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha (\langle T(r, t) \rangle - T_2). \quad (33)$$

Получаем зависимость k от температуры. Это позволяет говорить о возможности сверх пластичности или ползучести, если напряжения фиксированные. Так как напряжения зависят от разности температур, которая при $r = R_2$ и $t = 0$ будет максимальной, то на поверхности $r = R_2$ при выполнении условия Мизеса начнётся пластическое течение, однако в силу того, что внешняя поверхность сферы может свободно деформироваться должно выполняться условие равновесия на свободной границе, то есть должна начаться разгрузка. В результате, если пластический фронт продвигается внутрь, то есть происходит нагрузка, то вслед за ним идет разгрузка, а следовательно возникают остаточные напряжения вследствие нестабильных деформаций.

Если учесть, что $T_1 > T_2$, то скачок температуры при продвижении будет сглаживаться. Пусть материал сферы несжимаемый, тогда полагая $\mu = 1/2$, имеем

$$e = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) = \alpha (T - T_0). \quad (34)$$

Интегрируя, получим

$$u(r, t) = \alpha r [\langle T(r, t) \rangle - \langle T_0 \rangle] + u(R_1, t). \quad (35)$$

Считая, что внутренняя поверхность $r = R_1$ закреплена, тогда $u(R_1, t) = 0$ / Деформации определяются формулами

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = \alpha [\langle T(r, t) \rangle - \langle T_0 \rangle]. \quad (36)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha [\langle T(r, t) \rangle - \langle T_0 \rangle] + \alpha r \frac{\partial}{\partial r} [\langle T(r, t) \rangle - \langle T_0 \rangle].$$

Пластическое деформирование сферы, которое может возникать при разном изменении температурного поля на поверхности представляет собой сложный ступенчатый процесс, математическая модель которого может быть исследована при ряде предложений. Рассматривается полая сфера или имеющая заменитель, которые создает только температурное поле, обладающее центральной симметрией. Пусть сфера имела некоторые заданные значения температуры на внешней, а внутренней поверхностях так, что при $t = 0$ температура на внешней поверхности скачком падает до нуля и в дальнейшем поддерживается на этом уровне. При достаточно большом скачке температуры на внешней поверхности возможно возникновение пластического состояния, которое однако в силу, того, что внешняя поверхность может свободно деформироваться будет смещаться вглубь сферы вследствие разгрузки внешней поверхности. На внутренней поверхности сферы идет естественное охлаждение вследствие убывания, возникнут области, где произошла разгрузка, охлаждение возникновение остаточных напряжений. Рассматриваются процессы деформирования в переходный период, когда температурное поле зависит от времени.

Материал сферы пластически деформируется, если напряжения удовлетворяет условию пластичности, которое возьмем форме Мизеса

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = \sigma_p, \quad (37)$$

где σ_p предел пластичности не зависящий от температуры.

Подставляя (37) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (38)$$

и интегрируя, получим

$$\sigma_{rr} = \pm 2\sigma_p \ln \frac{r}{c_1}, \quad (39)$$

где c_1 – произвольная постоянная, которая для квазистатического процесса зависит от времени $c_1 = c_1(t)$.

В силу условия симметрии в сферических координатах два главных напряжения равны $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$.

Граничные условия $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$, что соответствует внешней границе сферы, свободным от напряжений.

Предположим, что материал несжимаем, это обычно выполняется для идеально пластического тела, тогда в соотношениях для связи σ – среднего напряжения и средней деформации e

$$e = \frac{1-2\mu}{E} \sigma + \alpha T, \quad (40)$$

полагаем $\nu = 1/2$ и учитывая, что $e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$, $e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = u/r$, из (40) получим

$$3e = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 3\alpha(T - T_0). \quad (41)$$

Интегрируя (41) при граничном условии

$$u(r, t) = 0 \text{ при } r = R_1 \quad (42)$$

получим

$$u(r, t) = \alpha r \left[\langle T(r, t) \rangle - T_0 \left(1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right) \right], \quad (43)$$

где $\langle T(r, t) \rangle = \frac{3}{r^3} \int_{R_1}^r T(\xi, t) \xi^2 d\xi$ – средняя температура на интервале $[R_1, r]$ сферы.

Из (43) следует, что радиальное перемещение для сферы из несжимаемого материала не зависит от напряженного состояния, а следовательно от появления зон пластичности. Вычислим деформации, соответствующие (43), тогда получим

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha \left[3T(r,t) - 2\langle T \rangle - T_0 - 2T_0 \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right], \quad (44)$$

$$e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \alpha \left[\langle T \rangle - T_0 \left(1 - \frac{R_1}{r} \right)^3 \right].$$

Напряжения вычислим на основании (44) по формулам

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2Ge_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{rr} = 2Ge_{rr}. \quad (45)$$

Подставим (45) в условия пластичности (37), получим для эквивалентного напряжения σ_0

$$\sigma_0 = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2G(e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) = 6G\alpha[\langle T \rangle - T]. \quad (46)$$

Таким образом, появление пластических зон зависит от разности температур. В случае охлаждения должно выполняться

$$\langle T \rangle - T \geq 0 \quad T_0 = T_1. \quad (47)$$

Изменение температуры подчиняется уравнению теплопроводности, которое в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{a}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (48)$$

и решается при начальном условии

$$T(r, t) = T_s(r) \quad \text{при } t = 0 \quad (49)$$

и граничных

$$T(r, t) = 0 \quad \text{при } r = R_2. \quad (50)$$

$$T(r, t) = T_1 e^{-\lambda^2 t} \quad \text{при } r = R_1. \quad (51)$$

Здесь $T_s(r)$ решение стационарной упругой задачи. Если скачок температуры происходит во времени пока процесс не установился, то $T_s(r)$ – значение температуры в момент времени, когда произошел скачок.

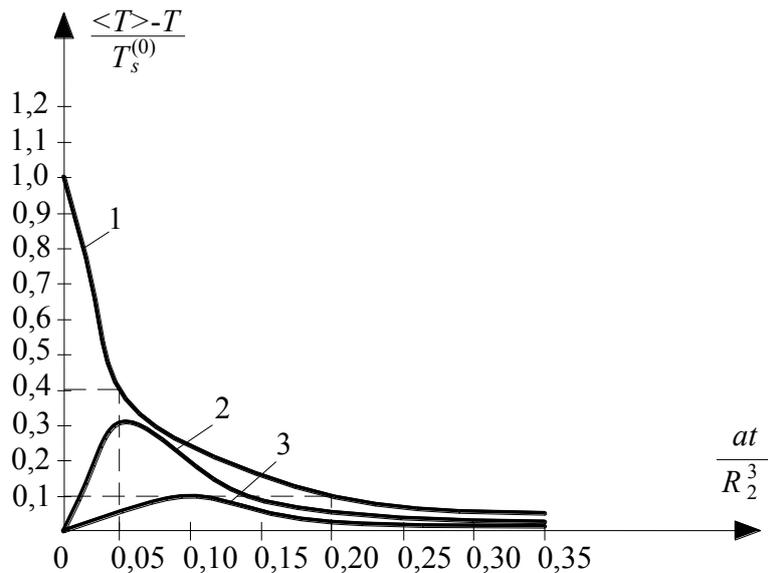


Рис. 1

Максимального значения скачок температуры имеет место при $t = 0$, $r = R_2$ затем он убывает при $r/R_2 < 1$.

На рисунке 1 изображена зависимость $[\langle T \rangle - T] / T_s^{(0)}$ в зависимости от at / R_2^2

$$1 - r/R_2 = 1; \quad 2 - r/R_2 = 0,8; \quad 3 - r/R_2 = 0,5$$

В тех зонах, где $\sigma_0 = \sigma_p$ наступает пластическое течение, т.е. выражается условие

$$\sigma_0 = \sigma_p \quad \text{при} \quad \langle T \rangle - T \geq \frac{\sigma_p}{6G\alpha}. \quad (52)$$

Условием продолжающегося пластического деформирования будет неубывание σ_0 , что соответствует условию $\frac{\partial}{\partial t}(\langle T \rangle - T) \geq 0$. При убывании σ_0 наступает разгрузка, что соответствует условию $\frac{\partial}{\partial t}(\langle T \rangle - T) < 0$. Изменение напряжений при разгрузке происходит в соответствии с законом Гука.

Так как внешняя поверхность сферы деформируется свободно, то вслед за достижением напряжениями максимальных значений удовлетворяющих, условию Мизеса должна начаться разгрузка, которая движется от внешней поверхности внутрь вслед за пластической зоной.

Пусть в момент времени t на сферической поверхности $r = \rho$ наступает пластичность, тогда $\rho(t)$ находится из условия

$$\langle T(\rho, t) \rangle - T(\rho, t) = \frac{\sigma_p}{6G\alpha}. \quad (53)$$

На рисунке 2 изображен график ρ / R_2 в зависимости от r / R_2 и at / R_2^2

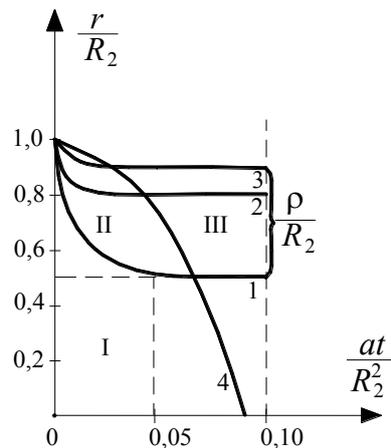


Рис. 2

Так как σ_p выражается через предел текучести при растяжении K по формуле $\sigma_p = \chi K$, то график соответствует значениям χ : $1 - \chi = 0,1$, $2 - \chi = 0,7$.

Обозначим через $\tau(r)$ – момент времени, в который в точке s координатной r нагрузка, тогда $\tau(r)$ находится из условия

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle T \rangle - T) = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau. \quad (54)$$

График зависимости at / R_2^2 изображен на рисунок 2 кривая 4.

Из рисунок 2 следует, что при охлаждении сферы вначале существуют при области:

I – область упругого деформирования,

II – область пластического деформирования, где $\frac{\partial}{\partial t}(\langle T \rangle - T) > 0$,

III – область разгрузки, где $\frac{\partial}{\partial t}(\langle T \rangle - T) = 0$.

Причем выполняются:

$$\text{Для области I: } \sigma_0 = 6G\alpha \left[\langle T \rangle - T + T_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right].$$

$$\text{Для области II: } \sigma_0 = \sigma_p.$$

$$\text{Для области III: } \sigma_0 = \sigma_p - 6G\alpha [\langle T \rangle - T - \langle T \rangle + T].$$

Область II исчезает, а граница между зонами II и III определяется из соотношения

$$r = \rho_0 = \rho(\tau). \quad (55)$$

Для достаточно больших t в пределе решение стремится к стационарному решению для сферы, у которого на внутренней поверхности поддерживается температура T_1 , а на внешней поверхности поддерживается температура $T = 0$. Результатом пластического деформирования является возникновение остаточных напряжений в сферической полости.

Рассмотрим вычисление остаточных напряжений. Запишем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r} \sigma_0 = 0 \quad (56)$$

и проинтегрируем его с учетом краевого условия $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$, тогда получим

$$\sigma_{rr} = -2 \int_r^{R_2} \frac{\sigma_0(\xi, t)}{\xi} d\xi, \quad (57)$$

где напряжение $\sigma_0(r, t)$ находится из соотношений (57).

Так как при $t \rightarrow \infty$ $T \rightarrow 0$, то радиальные остаточные напряжения запишем в виде

$$\sigma_{rr}^{(0)} = 12G\alpha \int_{r_0}^{R_2} \left\{ \langle T(\xi, \tau(\xi)) \rangle - T(\xi, \tau(\xi)) \right\} \frac{d\xi}{\xi} - 2\sigma_p \ln \frac{R_2}{r_0}$$

при $r \leq r_0$,

$$\sigma_{rr}^{(0)} = 12G\alpha \int_{r_0}^{R_2} \left\{ \langle T(\xi, \tau(\xi)) \rangle - T(\xi, \tau(\xi)) \right\} \frac{d\xi}{\xi} - 2\sigma_p \frac{R_2}{r_0} \quad (58)$$

при $r \geq r_0$.

Используя условие пластичности вычислим окружные остаточные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_0 \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} \quad \text{при } r \leq r_0 \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(0)} - 6G\alpha \left\{ \langle T(r, \tau(r)) \rangle \right\} \quad r \geq r_0. \end{aligned} \quad (59)$$

После полного остывания внутренний сферический слой $R_1 \leq r \leq r_0$ будет находиться в соответствии всестороннего равномерного растяжения.

Будем считать, считать что при этом предел текучести не достигается.

Как было сказано выше момент времени $t = 0$ скачок температуры $\langle T(x, t) - T(x, t) \rangle$ имеет скачок при $r = R_2$, равный T_2 . Из условия пластичности (59) в этом случае следует

$$|\sigma_0|_{\max} = |\sigma_p - 6G\alpha T_2| = (1 - \chi)K = \frac{1 - \chi}{\chi} \sigma_p. \quad (60)$$

Эта величина, в силу сделанного предложения не должна превосходить значения предела текучести при сжатии $\sigma_p^{(-)}$. Как известно из эксперимента предел текучести при повышении температуры убывает, то $\sigma_p^{(-)} > \sigma_p$. Если $\sigma_p^{(-)} = \sigma_p$, то условием отсутствия повторного пластического течения будет $\frac{1}{2} \leq \chi < 1$. При $\chi > 1$ сфера остается в упругом состоянии и остаточные напряжения не возникают.

Обозначим в формулах

$$\int_{r/R_2}^1 \left(\frac{\langle T \rangle - T}{T_2} \right)_{\max} \frac{d\xi}{\xi} = \sigma_{(r)}^{(r)}. \quad (61)$$

График функций $\sigma_{(r)}^{(r)}$ и $\frac{\langle T \rangle - T}{T_2}$ изображены на рисунках 3 и 4 соответственно

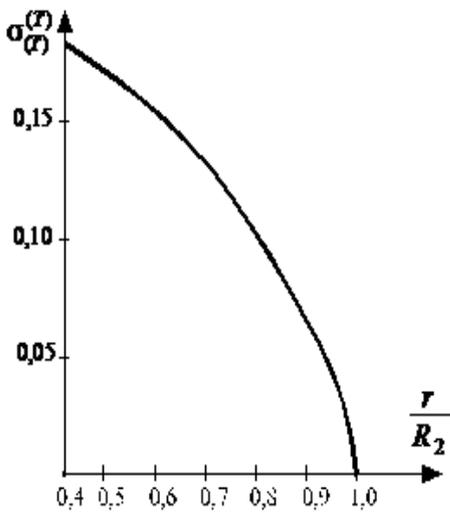


Рис. 3

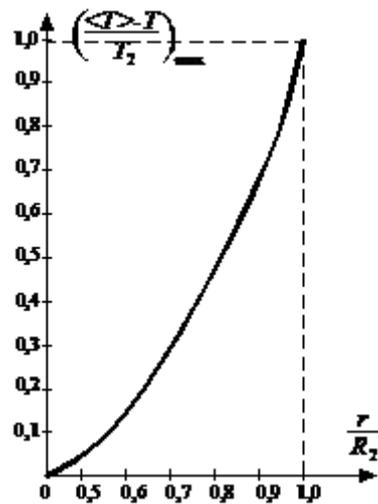


Рис. 4

В соответствии с формулами (59) графики остаточных напряжений $1 - \sigma_{rr}^{(0)}/K$, $2 - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}/K$ представлены на рисунке 5.

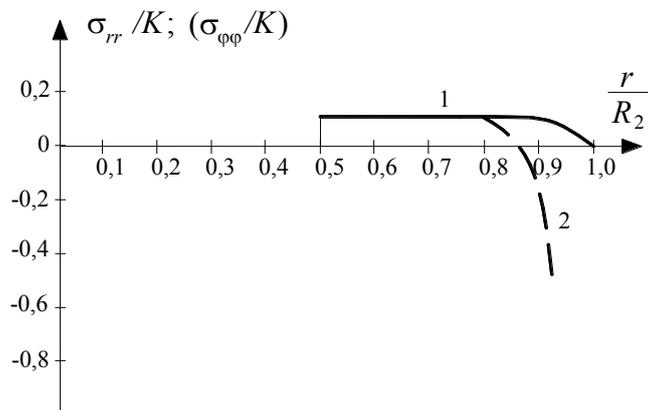


Рис. 5

Из рисунка 5 следует, что радиальные остаточные напряжения почти по всему сферическому слою остаются постоянными, обращаясь в ноль на внешней поверхности. Окружные остаточные напряжения равны радиальным в большей части внутренне-

го сферического слоя, вблизи свободной поверхности напряжения убывают до нуля и меняют знаки на противоположный, достигая на свободной границе существенных значений.

РЕЗЮМЕ

В работе показано, что если результате каких-либо чрезвычайных ситуаций происходит резкое падение температуры внешней поверхности сферы до нуля и далее этот режим поддерживается до полного остывания сферы, причем считается, что температура на внутренней поверхности также убывает, тогда в сфере возникают значительные остаточные напряжения, которые обязательно необходимо учитывать при повторных температурных и силовых нагружениях сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А.В. Оптимальное оценивание функции поврежденности материала по измерению АЭ «Акустическая эмиссия материалов и конструкций» / А.В. Чигарев, В.И. Юринок. – Ростов-на-Дону: сб. тер. докл. I Всесоюзная конференция, часть II, 1984. – с. 182-184.
2. Gubernatis, J.E. Long-wave approximation for the scattering of elastic waves from flows with application to ellipsoidal voids and inclusions / J.E. Gubernatis // J. Appl. Phys. v. 50, №6. – 1979, pp. 4046-4058.
3. Чигарев, А.В. Распространение скачков напряжений акустической эмиссии в неоднородных средах/ А.В. Чигарев. – Ростов-на-Дону: сб. тер. докл. I Всесоюзная конференция «Акустическая эмиссия материалов и конструкций», часть I, 1984. – с. 15-16.
4. Чигарев, А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде / А.В. Чигарев. – М.: Прикладная механика, т. 8. вып. 5, 1972 – с. 69-74. 5.
5. Труэлл, Р. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. – М.: Мир, 1972. – 307с.
6. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: «Наука», 1970. – 939с.
7. Справочник по специальным функциям. – М.: «Наука», 1979. – 832.
8. Астафьев, Л.В. Нелинейная механика разрушения / Л.В. Астафьев. – Самара: «Самарский университет», 2001. – 631с.

SUMMARY

In work the decision of a stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for a body of the spherical form is considered. The decision of a stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for a body of the spherical form has been done.

E-mail: mironov_Diman@mail.ru
goncharbelarussia@tut.by
chigarev@rambler.ru
juliaChigareva@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.12.2013