

СМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ЖИДКОГО ГРУЗА И ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЕМКОСТЯХ ПОЖАРНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

¹Кулаковский Б.Л., к.ф.-м.н. ²Мартыненко Т.М., ³Лахвич В.В.

¹ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск
²Белорусский национальный технический университет, Минск

Форма поперечного сечения и размерно-весовые параметры емкости во многом зависят от компоновки и назначения пожарных аварийно-спасательных автомобилей (ПАСА) и в свою очередь оказывают влияние на устойчивость автомобиля против опрокидывания. На вооружении подразделений по чрезвычайным ситуациям находятся разнообразные ПАСА для перевозки огнетушащих веществ: воды, пенообразователя, порошка. Эти вещества перевозятся в емкостях различной формы:

- прямоугольного и эллиптического сечения, которые принимаются на пожарных автоцистернах;
- цилиндрического сечения – на автомобилях порошкового пожаротушения.

Выполним анализ влияния размерно-весовых параметров, степень заполнения емкости эллиптической формы на устойчивость пожарной автоцистерны при движении на повороте.

Основные математические зависимости

Из работы [1] известно, что устойчивость автоцистерны против опрокидывания при движении на повороте оценивается величиной коэффициента поперечной устойчивости против опрокидывания, который определяется по формуле:

$$\eta_{\beta\psi}^{\zeta} = \frac{G_a \frac{B}{2} (C_{\psi} - G_K h_{\psi}) - G_{\Gamma} y C_{\psi}}{G_a h_a (C_{\psi} - G_K h_{\psi}) + G_K^2 h_{\psi}^2 + G_{\Gamma} z C_{\psi}}, \quad (1)$$

где G_a – общая сила веса автомобиля (Н);

C_{ψ} – суммарная угловая жесткость подвески автомобиля (кг*м/рад);

B – колея автомобиля (м);

G_K – сила веса подрессоренной массы (кузова) автомобиля (Н);

h_{ψ} – плечо крена кузова (м);

G_{Γ} – сила веса жидкого груза (м);

y и z – соответственно смещения центра тяжести жидкого груза в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Исходя из анализа формулы (1) видно, что поперечная устойчивость автоцистерны против опрокидывания зависит от величины смещения центра тяжести жидкого груза в горизонтальной и вертикальной плоскостях. С увеличением этих смещений устойчивость автоцистерны снижается.

В связи с этим представляет интерес оценка поперечной устойчивости против опрокидывания автоцистерн с емкостью эллиптической формы с определением вели-

$$z = 2(R - z_c) \sin \frac{\alpha + \psi}{2} \sin(\alpha - \psi). \quad (4)$$

Для вывода формул нахождения величины смещения центра тяжести жидкости в эллиптической цистерне сравним уравнения окружности и эллипса:

$$\text{уравнение окружности} \quad \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1, \quad (5)$$

$$\text{уравнение эллипса} \quad \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{(\alpha k)^2} = 1. \quad (6)$$

где α – большая полуось эллипса,
 k – коэффициент сжатия эллипса,
 αk – малая полуось эллипса.

В уравнении эллипса перейдем к новой системе координат (рис. 2)

$$y = \frac{\alpha}{R_1} y_1, \quad z = \frac{\alpha k}{R_1} z_1 \quad (7)$$

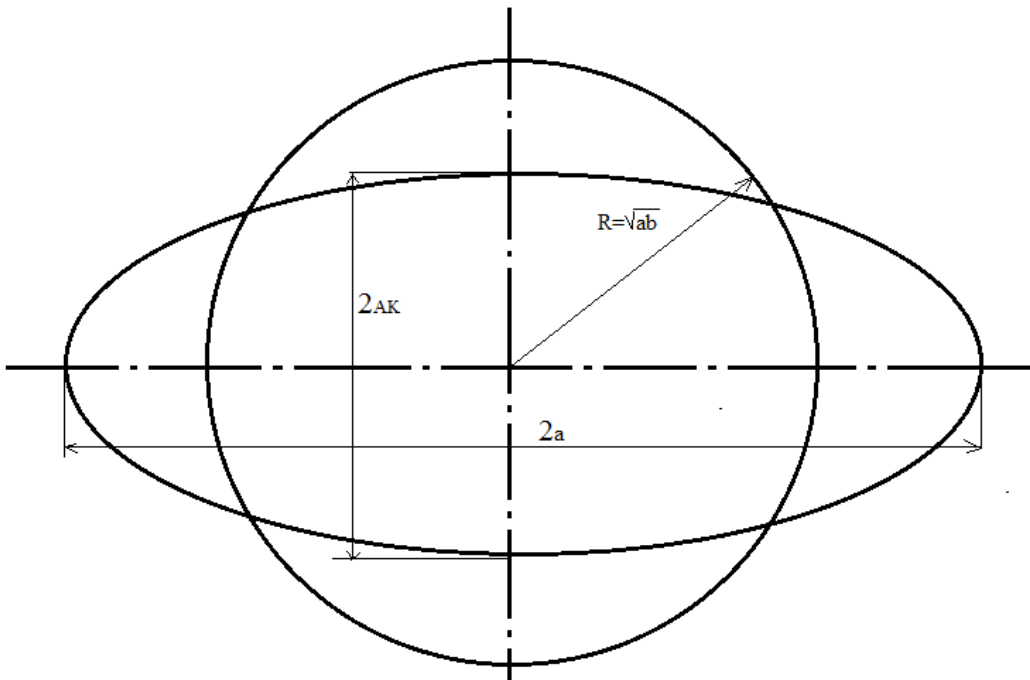


Рис. 2. Схема преобразования круга в эллипс

Подставим значение (7) в уравнение (6), имеем:

$$\frac{y_1^2}{R_1^2} + \frac{z_1^2}{R_1^2} = 1.$$

То есть, получено уравнение окружности в системе координат $y_1 O z_1$ где

$$y_1 = \frac{R_1}{\alpha} y, \quad z_1 = \frac{R_1}{\alpha k} z \quad (8)$$

Все формулы, выведенные для окружности в системе координат $y O z$, справедливы и для системы координат $y_1 O z_1$, т.е. для эллипса, если вместо значения y и z

ставить их значения (8). При этом исходя из равенства площадей поперечного сечения эллипса и окружности, получим следующее соотношение:

$$R_1 = \alpha \sqrt{k} \quad (9)$$

Подставляя это равенство в формулу (8) получим:

$$y_1 = \sqrt{k} y; \quad z_1 = \frac{z}{\sqrt{k}}. \quad (10)$$

Определим глубину h_1 для равновеликой цилиндрической цистерны с радиусом R_1 :

$$h_1 = R_1 + z_1. \quad (11)$$

Решая совместно равенства (9) и (10) получим:

$$z_1 = \frac{z\alpha}{R_1} \quad (12)$$

Подставляя значения z_1 (12) в равенство (11) получим:

$$h_1 = R_1 + \frac{\alpha z}{R_1}, \text{ откуда } z = \frac{R_1 h_1 - R_1^2}{\alpha} \quad (13)$$

Так как для эллипса

$$z = h - \alpha k \quad (14)$$

то приравнявая (13) и (14) получим: $h_1 = \frac{h}{\sqrt{k}}$.

Величина высоты центра тяжести жидкости в эллиптической цистерне с учетом цилиндрической будет равна:

$$z_c = z_{c1} \sqrt{k}. \quad (15)$$

Следовательно, при равном заполнении глубина жидкости в эллиптической цистерне h к глубине h_1 и высота тяжести жидкости в равновеликой цилиндрической цистерне будет находиться в соотношении (15). Углы, заключенные между свободной поверхностью жидкости и горизонтом α в равновеликих цистернах имеют следующие соотношения:

– для эллиптической цистерны: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{y}$;

– для цилиндрической цистерны: $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{z_1}{y_1} = \frac{z}{ky}$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}$;

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}. \quad (16)$$

Следовательно, расчет величины смещения центра тяжести жидкости в эллиптической цистерне необходимо делать согласно формулам (10):

$$y_1 = \sqrt{k} y; \quad z_1 = \frac{z}{\sqrt{k}}, \text{ где } y, z - \text{ величины смещения центра тяжести жидкости}$$

в эллиптической цистерне; y_1, z_1 – величина смещения центра тяжести жидкости в цилиндрической цистерне.

Таким образом, имея аналитические зависимости по определению величин смещения центра тяжести жидкости в равновеликой цилиндрической цистерны y_1, z_1 (3) и

(4) значения z_{c1} (15) с учетом отношений между углами, получим следующие аналитические выражения:

$$y = 2 \left(\alpha + \frac{\frac{2}{3k^2} (\sqrt{2\alpha kh - h^2})^3}{\frac{\pi\alpha^2 k}{2} - \alpha^2 k \arcsin\left(1 - \frac{h}{\alpha k}\right) - \frac{\alpha k - h}{k} \sqrt{2\alpha kh - h^2}} \right) \times \\ \times \sin \frac{\arctg \frac{tg\alpha}{k} + \arctg \frac{tg\psi}{k}}{2} \cos \left(\arctg \frac{tg\alpha}{k} - \arctg \frac{tg\psi}{k} \right), \quad м. \quad (17)$$

$$z = 2 \left(\alpha k + \frac{\frac{2}{3k} (\sqrt{2\alpha kh - h^2})^3}{\frac{\pi\alpha^2 k}{2} - \alpha^2 k \arcsin\left(1 - \frac{h}{\alpha k}\right) - \frac{\alpha k - h}{k} \sqrt{2\alpha kh - h^2}} \right) \times \\ \times \sin \frac{\arctg \frac{tg\alpha}{k} + \arctg \frac{tg\psi}{k}}{2} \sin \left(\arctg \frac{tg\alpha}{k} - \arctg \frac{tg\psi}{k} \right), \quad м. \quad (18)$$

Найденные значения y и z подставляются в формулу (1) определения коэффициента устойчивости автоцистерны.

Полученные аналитические зависимости определения коэффициента статической устойчивости автомобильных цистерн позволяют провести анализ устойчивости автомобиля при движении по кругу, а также использовать при расчете устойчивости автоцистерны в процессе ее проектирования.

Выполненный расчет величины смещения центра тяжести жидкости в емкостях цилиндрической и эллиптической форм. В зависимости от степени заполнения при движении автоцистерны на повороте показали следующее. Сравнение величин смещения центра тяжести жидкости в горизонтальной плоскости показал, что эта величина в эллиптической цистерне значительно больше по сравнению с цилиндрической и разница увеличивается с возрастанием коэффициента сжатия эллиптической емкости. Такое соотношение расчетных величин приводит к увеличению ударных нагрузок взаимодействия жидкого груза и боковых стенок эллиптической емкости, увеличивают показатели величины опрокидывающегося момента и в конечном итоге к снижению устойчивости автоцистерны и долговечность самой емкости.

В связи с этим представляет интерес определения нормальных перемещений оболочек емкостей пожарных автоцистерн. Дело в том, что при движении автоцистерны на поворотах, по неровной дороге, возникает ударная нагрузки жидкого груза на стенки емкости, которые в пределах пропорциональности выполняет колебательное движения. При этом возникает усталостные трещины, нарушение герметичности емкости. При проектировании ПАСА эллиптические оболочки применяются наравне с цилиндрическими и прямоугольными, однако обладают более сложными геометрическими параметрами и их расчет представляет определенный интерес.

Зададим эллиптическую оболочку произвольного поперечного очертания. Линиями главной кривизны в данном случае будут направляющие S и образующие x цилиндра, которые и примем в качестве криволинейных координат поверхности. При этом криволинейная координата x будет изменяться вдоль образующих от одного из

оснований цилиндра, а криволинейная координата S – вдоль направляющих от одной из образующих цилиндра.

Для решения такой задачи привлечем общую теорию тонких оболочек. При этом имеется в виду, что конструкция оболочки удовлетворяет условиям существования без моментного напряженного состояния, согласно которым эллиптическая оболочка должна быть достаточно короткой, иметь поперечное сечение плавного очертания с плавно изменяющимися толщиной, радиусом кривизны сечения и плавным изменением нагрузки, действующей на оболочку.

Перемещения u , v и w отсчитываются по направлениям касательных к криволинейным координатам x , s и по нормали \bar{e}_n . Если длина оболочки L , тогда ее торцевые сечения будут определяться координатами $x = 0$ и $x = L$. Обозначим радиус кривизны поперечного сечения оболочки через $r(s)$. Этот радиус будет функцией только криволинейной координаты s . Оболочка нагружена равномерным давлением p . Под действием этого давления в оболочке возникают усилия, T_1 – направлено вдоль по образующей, а усилие T_2 – по касательной к направляющей, $S(x; s)$ – обобщенные растягивающие и касательные силы.

Для определения возникающих в оболочке усилий воспользуемся системой дифференциальных уравнений равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии. Подставим в эту систему дифференциальных уравнений значения параметров Ляме срединной поверхности некруговой цилиндрической оболочки $A_1 = A_2 = 1$, а также значения главных радиусов кривизны $R_1 = \infty$, $R_2 = r(s)$.

В результате приходим к следующей системе уравнений [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} + q_2 = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (19)$$

Полученная система интегрируется в замкнутом виде. При этом одно из основных усилий безмоментной оболочки T_2 дается в явном виде. Это усилие не зависит от x , т. е. по длине оболочки не меняется.

Сделав аналогичную подстановку A_1 , A_2 и R_1 , R_2 в систему, получим систему дифференциальных уравнений для определения перемещений безмоментной цилиндрической оболочки [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E\delta} (T_1 - \mu T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\omega}{r(s)} = \frac{1}{E\delta} (T_2 - \mu T_1); \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E\delta} S. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученная система также интегрируется в замкнутом виде.

Поскольку на оболочку действует только равномерное давление, в полученных уравнениях (19) и (20) следует положить $q_1 = q_2 = 0$; $q_n = p$. Тогда вместо системы (19) будем иметь:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (21)$$

Рассмотрим статически определимый вариант граничных условий на торцевых сечениях некруговой оболочки, прежде чем производить интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений (20) и (21) примем:

$$T_1 = 0, \nu = 0, \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L \quad (22)$$

Теперь произведем интегрирование системы (21). Из третьего уравнения системы (21) усилие T_2 уже определено и равно:

$$T_2 = pr(s). \quad (23)$$

Подставляя (23) в уравнение (21), получим $\frac{\partial S}{\partial x} + p \frac{dr}{ds} = 0$.

Проинтегрировав полученное равенство по x , придем к следующему выражению для касательного усилия S , $S = -px \frac{dr}{ds} + f_1(s)$ где $f_1(s)$ неизвестная функция.

В силу симметрии оболочки, граничных условий и нагрузки относительно среднего сечения $x = \frac{L}{2}$, касательные усилия в этом сечении должны отсутствовать, что

дает основание записать $-p \frac{L}{2} \frac{dr}{ds} + f_1(s) = 0$.

Таким образом, функция $f_1(s)$ определена, и касательное усилие будет равно:

$$S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (24)$$

Взяв производную по s от (24) и подставив ее в уравнение (21), получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{d^2 r}{ds^2} = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство по x , будем иметь:

$$T_1 = -p \left(x \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} + f_2(s) \right) \quad (25)$$

где $f_2(s)$ - вторая неизвестная функция.

Используя граничные условия (4), из выражения (7) находим $f_2(s) = 0$, и усилие T_1 оказывается равным:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} \quad (26)$$

Таким образом, при данном варианте граничных условий мы определили все усилия, не прибегая к определению перемещений оболочки. Однако это не всегда оказывается возможным. Выпишем окончательные формулы для усилий цилиндрической оболочки при статически определимом варианте граничных условий:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2}; \quad T_2 = pr(s); \quad S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (27)$$

Формулы (27) при заданной форме поперечного сечения и размерах оболочки дают возможность определить усилия в любой точке оболочки.

Примем следующие обозначения: a – большая полуось эллипса, b – малая полуось эллипса; φ – угол, образуемый нормалью к эллипсу с его малой осью, $r(\varphi)$ – радиус кривизны эллипса, ε – эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon^2 = -\frac{b^2}{a^2}$, F – фокус эллипса.

Радиус кривизны эллипса $r(\varphi)$ определяется по выражению, известному из аналитической геометрии [4]:

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

Продифференцируем выражение (28) от радиуса кривизны r по s до четвертого порядка включительно, принимая во внимание соотношение $ds = r d\varphi$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}; \quad \frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ \frac{d^3 r}{ds^3} &= -\frac{6a^2}{b^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi; \\ \frac{d^4 r}{ds^4} &= -\frac{6a^3}{b^6} \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \left(\left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставив соотношения (29) в зависимости (27), придем к следующим формулам для усилий:

$$\begin{aligned} T_1 &= -px \frac{L-x}{2} \frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ T_2 &= p \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}; \\ S &= -p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как при расчетах нас интересуют наибольшие значения усилий, напряжений и перемещений, то и произведем их определение.

Усилие T_2 достигает максимума при наибольшем значении r , т. е. в концах малой полуоси эллипса $\varphi = 0$, $T_2 = p \frac{b^2}{a}$.

Касательное усилие достигает наибольшего значения в торцевых сечениях оболочки $x = 0$ и $x = L$. Определим, в какой точке направляющей этих сечений касатель-

ное напряжение имеет максимальное значение. Поскольку усилие S пропорционально $\frac{dr}{ds}$ то и максимум S соответствует максимуму $\frac{dr}{ds}$. Взяв производную по s от $\frac{dr}{ds}$ и приравняв ее нулю, определим значение φ , при котором усилие S имеет максимум. Получим

$$\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi = 0. \text{ Откуда } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}.$$

Подставляя эти значения в формулу (30), находим $S_{\max} = -\frac{3}{4} pL \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$. Что касается усилия T_1 , то оно достигает наибольшего значения в среднем поперечном сечении оболочки $x = \frac{L}{2}$. По длине направляющей эллипса усилие T_1 четырежды меняет свой знак при значениях угла φ , лежащих между 0 и 2π . При этом экстремальные значения усилие принимает в концах (точка A) и (точка B) полуосей, оказываясь при этом равным

$$T_{1\max} = \frac{3}{8} \frac{paL^2}{b^2} \varepsilon^2, \quad T_{1\min} = -\frac{3}{8} \frac{paL^2}{b} \varepsilon^2.$$

Из перемещений наибольший интерес представляет перемещение ω (прогиб оболочки). Это перемещение можно определить, подставив зависимости (29) в выражение (27). В результате получим следующие значения этого перемещения в конце большой $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и малой $\varphi = 0$ полуосей:

$$\omega_a = \frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(-\frac{b^6}{a^6} + \frac{3}{4} \frac{L^2 b^2}{a^4} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^2 b^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \right);$$

$$\omega_b = -\frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{L^2}{a^2} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right). \quad (31)$$

Из формул (31) видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета. Таким образом полученные зависимости позволяют предусмотреть соответствующие инженерные решения при конструировании эллиптических оболочек повышенной прочности как например применение вертикальных ребер жесткости из композитных материалов (см. рис. 3).

B: Copy of Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1
01.11.2013 20:53

ANSYS
14.0

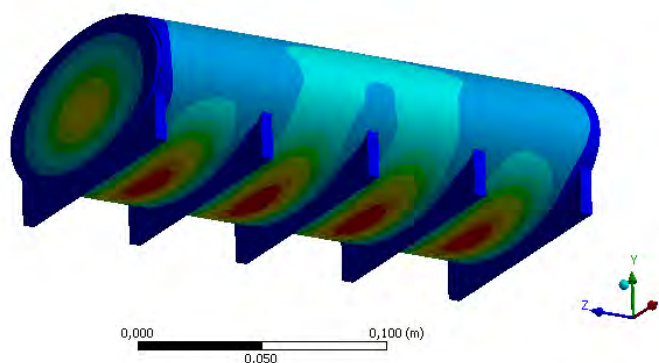
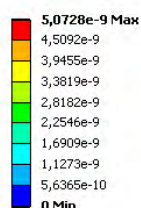


Рис. 3. Распределение деформации в эллиптической оболочке

Расчет показал, что для упрочнения конструкций оболочки заданной длины необходимо предусмотреть пять ребер жесткости.

РЕЗЮМЕ

Проведено исследование цистерны эллиптической формы, получены аналитические зависимости по определению смещения центра тяжести. Выполнен расчет смещения центра тяжести жидкого груза в эллиптических цистернах различной степени заполнения. Результаты показали, что величина смещения центра тяжести жидкого груза в горизонтальной плоскости в эллиптической цистерне значительно больше чем в цилиндрической цистерне имеющей такие же размерно-весовые параметры. С увеличением коэффициента сжатия эта разница возрастает. В связи с этим является актуальной решенная задача по определению перемещения жидкого груза в цистерне эллиптической формы. Полученные аналитические зависимости, позволяют в процессе проектирования автоцистерн обеспечивать требуемые прочностные характеристики емкостей эллиптической формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаковский, Б.Л. Эксплуатационные свойства пожарных автоцистерн / Б.Л. Кулаковский. – Мн.: Минсктиппроект, 2006. – 210 с.
2. Белов, Н.Н. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов// Томск: STT, 2004. – 465 с.
3. Bangash, M.Y.H. Explosion-Resistant Building Structures / M.Y.H. Bangash, T. Bangash // Design, Analysis and Case Studies. Springer, Berlin, 2006. – 450 с.
4. Власов, В.З. Общая теория оболочек / В.З. Власов. – М.-Л.:Физматгиз, 1949. – 784 с.
5. Белкин, А.Е. Расчет пластин методом конечных элементов / А.Е. Белкин, С.С. Гаврюшин. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 232 с.

Summary

The analysis of the influence of size and weight parameters, the degree of filling of tanks elliptical shape of liquid cargo fire tanker stability when cornering. Analytical dependences to determine the displacement of the center of gravity of the elliptical tank. Analytical dependences to determine the strength characteristics in the design capacity of the tanker having an elliptical shape. Based on analysis of the distribution of the deformation of the elliptic shell provides recommendations for its strengthening.

E-mail: elena.taras@gmail.com

Поступила в редакцию 20.09.2015