УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

к.т.н. **Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.**

УО «Брестский государственный технический университет»

При решении несвязанных краевых задач термоупругости дифференциальное уравнение теплопроводности выделяется из системы уравнений термоупругости, т.к. не учитывается эффект связанности температурного поля и поля деформаций, и решается отдельно. Рассмотрим основные аспекты вывода интегральных уравнений осесимметричных теплопроводности при разного рода граничных условиях.

Пусть дано тело вращения, ограниченное поверхностью *S*. Дифференциальное уравнение теплопроводности для нестационарной осесимметричной задачи при отсутствии внутренних источников тепла представим в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

где $T=f(r,\varphi,z,t)$ - температура как функция координат r, φ, z цилиндрической системы отсчета и времени t, $a=\dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность материала, c - удельная теплоемкость, *t* - время.

Пусть на *S* задана осесимметричная функция температуры Т. В такой постановке будем иметь нестационарную задачу Дирихле. В зависимости от того, следует ли искать решение внутри области *D*, ограниченной поверхностью *S*, или вне области, рассматривается внутренняя или внешняя краевая задача Дирихле.

Ввиду осевой симметрии области *D* и функции *T* достаточно рассмотреть ее меридиональное сечение. Решение внутренней задачи разыскиваем в виде теплового потенциала:

$$W(x,t)=W(\rho_x,z_x,t)=\int_L \mu(y,\tau)\cdot K(y,x,t-\tau)dl, \tag{1}$$

где $K(y,x,t-\tau)=\mathrm{e}^{\left(-\frac{z_y^2+\rho_x^2+\rho_y^2}{4a(t-\tau)}\right)}\left[cI_1(B)-BI_0(B)\right],$

x, *y* — фиксированная и текущая точки интегрирования, μ — плотность потенциала W, *L* — контур, ограничивающий область *D*,

$B=\dfrac{2\rho_y\rho_x}{4a(t-\tau)}$, I_1, I_0 — сомножители функции Бесселя.

При этом учтем, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности представляется согласно [1] функцией:

$$T^*\left(x,t,y,\tau\right)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a\left(t-\tau\right)}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}, \qquad (2)$$

где r (x,y) — расстояние между точками x и y.

В цилиндрической системе координат $r=\sqrt{Z^2+\rho_x^2+\rho_y^2-2\rho_x\rho_y\cos\theta}$; $Z=z_y-z_x, \theta=\vartheta_y-\vartheta_x, \tau$ — текущее время на интервале интегрирования.

Предположим, что на контуре L распределены двойные тепловые источники (1) с плотностью μ=(y, τ). При этом от совокупности воздействия источников внутри области D^+ получилось распределение температуры, переходящее на границе области непрерывно в f(y, τ)=F_T.

Таким образом, с учетом формул разрыва для теплового потенциала двойного слоя [2] получаем:

$$-\frac{1}{2}\mu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\mu(y,\tau)K(y,x,t-\tau)\rho dl_y=F_T. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является линейным интегральным уравнением второго рода в двумерном измерении L, t. Оно носит Фредгольмов характер по переменной L и имеет признак уравнения Вольтера по переменной t. Ядро этого уравнения имеет сингулярную особенность в точке $x=y$. Решением уравнения будет плотность μ (y,τ), с помощью которой можно найти температуру в любой точке области D, в любое время t.

Подобным образом можно поставить и решить краевую задачу во внешней области D^-. На основании проведенных выкладок было получено интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}\mu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\mu(y,\tau)K(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_T. \qquad (4)$$

Реализация этого уравнения позволяет найти значение температуры в любой точке внешней области D^-.

В инженерной практике часто приходится иметь дело с заданными тепловыми потоками (производными от температур в определенных направлениях), то есть речь идет о задаче типа Неймана [3]. Для решения таких задач используем тепловой потенциал простого слоя:

$$V(x,t)=\frac{2a}{\pi}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^3}\int_L\nu(y,\tau)P(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y, \qquad (5)$$

где $P\left(y,x,t-\tau\right)=e^{-\frac{z^2+\rho_y^2+\rho_x^2}{4a(t-\tau)}\cdot I_0(B)}$, ν (y,τ) — плотность потенциала простого слоя.

Потенциал (5) зависит только от положения параметрической точки x и это обстоятельство учитываем при определении производной теплового потенциала по нормали n_x, опущенной из точки x к поверхности S. Выполняя дифференцирование получим:

$$\frac{dV(x,t)}{dn_x}=\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y, \qquad (6)$$

где $P^*\left(y,x,t-\tau\right)=\mathrm{e}^{\left(-\frac{z^2+\rho_y^2+\rho_x^2}{4a(t-\tau)}\right)}\left[cI_0(B)+dI_1(B)\right]$,

$c=\alpha_{zx}z_1-\alpha_{\rho_x}\rho_x; d=\alpha_{\rho_x}\cdot\rho_y, \alpha_{zx}, \alpha_{\rho_x}$ — направляющие косинусы.

Считаем, что температурный режим приведен к однородному. Тогда тепловой процесс представляем происходящим от некоторого теплового слоя с плотностью ν (y,t), распределенного по контуру L с учетом заданных краевых условий.

Используя формулы скачка [2], получим:

- для внутренней задачи:

$$\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_p, \tag{7}$$

где $F_p=f_1$(y,t) — тепловой поток;

- для внешней задачи:

$$-\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_p. \tag{8}$$

Кроме рассмотренных выше случаев существенное значение в инженерной практике имеет конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой. Здесь имеют место следующие граничные условия:

$$\lambda_T\frac{\partial T(y,t)}{dn}=h\left[T_0-T(y,t)\right], \tag{9}$$

где λ_T — коэффициент теплопроводности, h — коэффициент теплопередачи, n — нормаль к поверхности S.

Исследуя величины условия (9) очевидно, что решения данной задачи можно получить с помощью теплового потенциала (5).

Таким образом, с учетом формул скачка [2] получаем интегральные уравнения для неизвестной плотности ν(y,t):

$$\begin{aligned}&\pm\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y+\\&+\frac{ab_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)P(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=b_0T_0,\end{aligned} \tag{10}$$

где $b_0=\frac{2h}{\lambda_T}$, знак «+» используется для внутренней задачи, «-» — для внешней.

Ядра полученных интегральных уравнений имеют сложный характер. В них имеется произведение показательной функции на модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого или первого порядка. Наличие двойных интегралов усложняет численную реализацию соответствующей краевой задачи на ПЭВМ. Для преодоления указанных трудностей были выведены соответствующие разрешающие уравнения.

Таким образом, решение краевых осесимметричных задач теплопроводности сводится к решению соответствующих интегральных уравнений (3), (4), (7), (8), (10). При этом пространственная задача теплопроводности сводится к интегрированию по контуру меридионального сечения области D, что существенно облегчает численную реализацию задачи с высокой степенью точности на ПЭВМ. Для достижения этой цели разработан соответствующий алгоритм решения [4].

Результаты решения полученных сингулярных интегральных уравнений краевой задачи теплопроводности, вычисления температурных добавок перемещений и фиктивной поверхностной температурной нагрузки используются в задаче термоупругости по определению осесимметричных термоупругих перемещений и напряжений [5].

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена развитию метода потенциала на решение осесимметричных краевых задач нестационарной теплопроводности, описываемых дифференциальными уравнениями параболического типа, в цилиндрических координатах с различными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов, Л.А. Самарский. — М.: Наука, 1974.
2. Хижняков, А.В. К расчету температурных полей для тел вращения. В ст. «Проектирование металлических конструкций». ЦИНИС Госстроя СССР, 1973, вып. 3, с 47.
3. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее приложение к задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. - М.-Л., ГТТИ, 1953.
4. Веремейчик, А.И. Об алгоритме численного решения краевых задач нестационарной термоупругости / А.И. Веремейчик, В.М. Хвисевич // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. научн.-техн. конф.: В 2 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Могилев. обл. исполн. ком., Нац. акад. наук Респ. Беларусь, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: И.С. Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев, Белорус.-Рос. ун-т, 2011. – Ч. 1. – С. 100.
5. Веремейчик, А.И. Решение осесимметричной задачи термоупругости для однородных изотропных тел методом бигармонических потенциалов / А.И. Веремейчик, В.М. Хвисевич // Прикладные задачи математики и механики: материалы XVI Междунар. научно - техн. конф., Севастополь, 15–19 сентября 2008 г. / СевНТУ. – Севастополь, 2008. – С. 36–38.

SUMMARY

The article is devoted to the development of the method development for the solution of axisymmetric boundary-value problems of nonstationary heat conduction, described by the differential equations of parabolic type, in cylindrical coordinates with various boundary conditions.

E-mail: vai_mrtm@tut.by

Поступила в редакцию 13.10.2015