

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

д.ф.-м.н. Яровая А.В., Поддубный А.А.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

При проектировании надежных и долговечных элементов конструкций требуются высокоточные расчетные методики, которые учитывают всевозможные изменения параметров. Для слоистых элементов конструкций такие методики предложили в своих работах Э. И. Старовойтов, Ю. М. Плескачевский, Д. В. Леоненко и др. Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в [1–5]. В монографии [6] изложены постановки и методы решения задач статики широкого класса металлополимерных систем при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Учтены реономные и пластические свойства материалов слоев. Приведен ряд аналитических и числовых решений для трехслойных металлополимерных стержней, пластин и оболочек. В работах [7–9] системно изложены постановки и методы решения задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием. В работе [10] рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием локальных нагрузок с использованием разрывных функций Хевисайда и Дирака.

В данной статье рассмотрен изгиб трехслойной балки с учетом частичного опирания на упругое основание. Решения получены отдельно для двух участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границе.

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная балка длиной l , шириной b_0 и высотой h (рисунок 1).

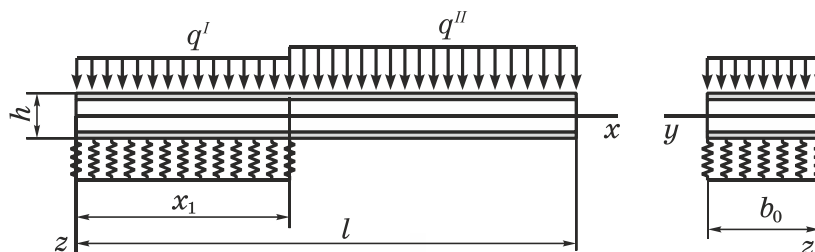


Рис. 1. Схема трехслойной балки, частично опертой на упругое основание

Наружные слои балки являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный наполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте балки и обеспечивает их совместную работу. По длине панели выделяются два участка, на каждом из которых равномерно распределенные нагрузки q^I , q^II могут иметь различную величину, а могут и отсутствовать. Балка частично опирается на упругое основание участком длиной x_1 .

Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии [6]: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях она остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в наполнителе за счет сдвига поворачивается на дополнительный угол. Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Наружные несущие слои упругопластические, а несжимаемый по толщине наполнитель – нелинейно упругий.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомым величин приняты функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в наполнителе за счет

сдвига на n -м участке ($n = I, II$). В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений. Для описания действия упругого основания используется модель Винклера, согласно которой реакция основания пропорциональна прогибу $q_R = \kappa w'(x)$, где κ – жесткость упругого основания.

Заметим, что принятая расчетная схема может быть использована для трехслойной пластины, испытывающий цилиндрический изгиб.

Уравнения равновесия. В работе [5] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа отдельно для каждого участка были получены системы дифференциальных уравнений равновесия сначала в усилиях, затем в перемещениях. Для участка I , связанного с упругим основанием, уравнения равновесия следующие:

$$\begin{aligned} a_1' u'_{,xx} + a_6' \psi'_{,xx} - a_7' w'_{,xxx} &= -p' ; \\ a_6' u'_{,xx} + a_2' \psi'_{,xx} - a_3' w'_{,xxx} - a_5' \psi' &= 0 ; \\ a_1' u'_{,xxx} + a_3' \psi'_{,xxx} - a_4' w'_{,xxx} - \kappa w' &= -q' , \end{aligned} \quad (1)$$

где a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие свойства слоев на n -м участке.

Для участка II , не связанного с упругим основанием, система уравнений имеет вид, аналогичный (1), только вместо индекса I указан индекс II , а в третьем уравнении отсутствует слагаемое, содержащее κ .

Решив системы уравнений равновесия для каждого участка, получим выражения перемещений. На участке I ($x \leq x_1$), опирающемся на упругое основание средней жесткости

$$\begin{aligned} w'(x) &= C_1' \operatorname{sh}(\lambda_1' x) + C_2' \operatorname{ch}(\lambda_1' x) + C_3' \operatorname{sh}(\lambda_3' x) + C_4' \operatorname{ch}(\lambda_3' x) + \\ &\quad + C_5' \operatorname{sh}(\lambda_5' x) + C_6' \operatorname{ch}(\lambda_5' x) + \frac{q_0'}{\kappa'} ; \\ \psi'(x) &= C_1' b_1' \operatorname{ch}(\lambda_1' x) + C_2' b_1' \operatorname{sh}(\lambda_1' x) + C_3' b_7' \operatorname{ch}(\lambda_3' x) + C_4' b_7' \operatorname{sh}(\lambda_3' x) + \\ &\quad + C_5' b_8' \operatorname{ch}(\lambda_5' x) + C_6' b_8' \operatorname{sh}(\lambda_5' x) + \alpha_9' \frac{q_0'}{\kappa'} x + \alpha_{10}' q_0' x ; \\ u'(x) &= C_1' b_4' \operatorname{ch}(\lambda_1' x) + C_2' b_4' \operatorname{sh}(\lambda_1' x) + C_3' b_9' \operatorname{ch}(\lambda_3' x) + C_4' b_9' \operatorname{sh}(\lambda_3' x) + \\ &\quad + C_5' b_{10}' \operatorname{ch}(\lambda_5' x) + C_6' b_{10}' \operatorname{sh}(\lambda_5' x) + C_8' x + C_9' + \alpha_9' \alpha_{12}' \frac{q_0'}{\kappa'} x + \alpha_{10}' \alpha_{12}' q_0' x . \end{aligned} \quad (2)$$

Для участка II ($x \geq x_1$), где отсутствует упругое основание:

$$\begin{aligned} w''(x) &= C_1'' \left(\frac{\alpha_{18}''}{6} x^3 + \alpha_{17}'' b_{11}'' x \right) + C_2'' b_{14}'' \operatorname{ch}(\beta_3'' x) + C_3'' b_{14}'' \operatorname{sh}(\beta_3'' x) + \\ &\quad + \frac{C_4''}{2} x^2 + C_5'' x + C_6'' + \frac{\alpha_{17}'' b_{11}'' q_0''}{2} x^2 + \frac{\alpha_{18}'' q_0''}{24} x^4 ; \\ \psi''(x) &= C_1'' b_{11}'' + C_2'' \operatorname{sh}(\beta_3'' x) + C_3'' \operatorname{ch}(\beta_3'' x) + b_{11}'' q_0'' x ; \\ u''(x) &= C_1'' (b_{16}'' x^2 + b_{15}'') + C_2'' b_{17}'' \operatorname{sh}(\beta_3'' x) + C_3'' b_{17}'' \operatorname{ch}(\beta_3'' x) + C_4'' \alpha_{13}'' x + C_5'' \alpha_{13}'' + \end{aligned}$$

$$+ C_7'' x + C_8'' + \frac{b_{19}'' \alpha_{18}'' q_0''}{24} x^4 + \frac{\alpha_{13}'' \alpha_{18}'' q_0''}{6} x^3 + \frac{b_{11}'' b_{19}'' \alpha_{17}'' q_0''}{2} x^2 + b_{11}'' b_{18}'' q_0'' x. \quad (3)$$

В выражениях (2), (3) C_i' , C_i'' – константы интегрирования, определяемые из условий сопряжения решений на границе участков и граничных условий на торцах балки; b_i'' , α_i'' , β_i'' , λ_i'' – коэффициенты, связанные с a_i'' и описанные в [5].

Объединяя (2), (3), получаем искомое решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi'(x) + [\psi''(x) - \psi'(x)]H_0(x - x_1), \\ u(x) &= u'(x) + [u''(x) - u'(x)]H_0(x - x_1), \\ w(x) &= w'(x) + [w''(x) - w'(x)]H_0(x - x_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где H_0 – функция Хевисайда.

Внутренние усилия выражаются через функции перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} N^n(x) &= b_0(a_1'' u''_{,x} + a_6'' \psi''_{,x} - a_7'' w''_{,xx}); \quad H^n(x) = b_0(a_6'' u''_{,x} + a_2'' \psi''_{,x} - a_3'' w''_{,xx}); \\ Q^n(x) &= b_0 a_5'' \psi''; \quad M^n(x) = b_0(a_7'' u''_{,x} + a_3'' \psi''_{,x} - a_4'' w''_{,xx}), \end{aligned} \quad (5)$$

Условия сопряжения на границе участков предполагают равенство внутренних усилий и перемещений в сечении $x = x_1$. С использованием выражений (5) получаем:

$$\begin{aligned} N'(x_1) = N''(x_1) &\Rightarrow (a_1' u'_{,x} + a_6' \psi'_{,x} - a_7' w'_{,xx} - a_1'' u''_{,x} - a_6'' \psi''_{,x} + a_7'' w''_{,xx})|_{x=x_1} = 0; \\ M'(x_1) = M''(x_1) &\Rightarrow (a_7' u'_{,x} + a_3' \psi'_{,x} - a_4' w'_{,xx} - a_7'' u''_{,x} - a_3'' \psi''_{,x} + a_4'' w''_{,xx})|_{x=x_1} = 0; \\ M'_{,x}(x_1) = M''_{,x}(x_1) &\Rightarrow (a_7' u'_{,xx} + a_3' \psi'_{,xx} - a_4' w'_{,xxx} - a_7'' u''_{,xx} - a_3'' \psi''_{,xx} + a_4'' w''_{,xxx})|_{x=x_1} = 0; \\ H'(x_1) = H''(x_1) &\Rightarrow (a_6' u'_{,x} + a_2' \psi'_{,x} - a_3' w'_{,xx} - a_6'' u''_{,x} - a_2'' \psi''_{,x} + a_3'' w''_{,xx})|_{x=x_1} = 0; \\ w'(x_1) &= w''(x_1); \quad u'(x_1) = u''(x_1); \quad \psi'(x_1) = \psi''(x_1); \\ w'_{,x}(x_1) &= w''_{,x}(x_1). \end{aligned} \quad (6)$$

В частном случае, при жестко защемленном левом торце и свободном правом граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0; \quad w'_{,x}(0) = 0; \quad u'(0) = 0; \quad \psi'(0) = 0; \\ N''(l) = 0 &\Rightarrow (a_1'' u''_{,x} + a_6'' \psi''_{,x} - a_7'' w''_{,xx})|_{x=l} = 0; \\ M''(l) = 0 &\Rightarrow (a_7'' u''_{,x} + a_3'' \psi''_{,x} - a_4'' w''_{,xx})|_{x=l} = 0; \\ M''_{,x}(l) = 0 &\Rightarrow (a_7'' u''_{,xx} + a_3'' \psi''_{,xx} - a_4'' w''_{,xxx})|_{x=l} = 0; \\ H''(l) = 0 &\Rightarrow (a_6'' u''_{,x} + a_2'' \psi''_{,x} - a_3'' w''_{,xx})|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия сопряжения участков (6) и граничные условия (7) образуют систему из 16 алгебраических уравнений, позволяющую найти константы интегрирования.

С помощью программного комплекса Mathcad была составлена электронная модель (ЭМ) «Напряженно-деформированное состояние трехслойной балки, частично опертой на упругое основание» [11], включающая компьютерные программы для численного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных балок, опирающихся на упругое основание одним или двумя участками. Эти программы позволя-

ют определять перемещения, деформации и напряжения в трехслойных балках с различными геометрическими и механическими характеристиками слоев, при жестком и шарнирном закреплении или без него, наличии и отсутствии диафрагм на торцах, различных видах нагрузок, жесткости упругого основания, размерах участков опирания и оценивать прочность и жесткость балок. С использованием ЭМ были численно исследованы перемещения консольной балки при различных нагрузках и длинах участка опирания на упругое основание.

Нагрузка $q = 2500$ Па была приложена к балке со следующими параметрами: $l = 2$ м; $h_1 = h_2 = 0,005$ м, $h_3 = 0,05$ м. На рисунке 2 изображены графики изменения прогиба w по длине балки при различной жесткости упругого основания при длине участка опирания $x_1 = 0,2l$. На рисунке 3 показаны прогибы w при различных длинах участка опирания на упругое основание с $\kappa = 4$ МН/м. На рис.4 изображены изменения максимального прогиба по длине балки с увеличением жесткости упругого основания.

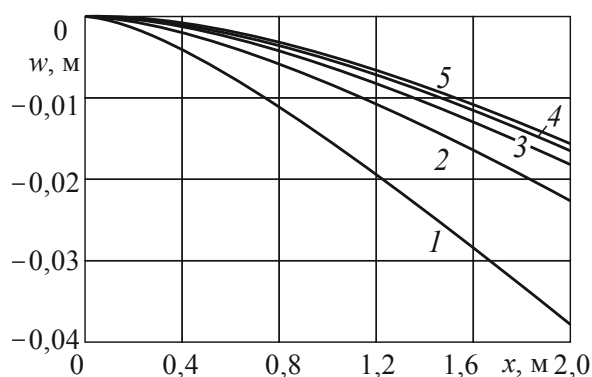


Рис. 2. Изменение прогиба по длине балки: 1 – $\kappa = 2$ МН/м; 2 – $\kappa = 3$; 3 – $\kappa = 4$; 4 – $\kappa = 6$; 5 – $\kappa = 6$ МН/м

Заметим, что с увеличением длины участка опирания и жесткости упругого основания перемещения уменьшаются.

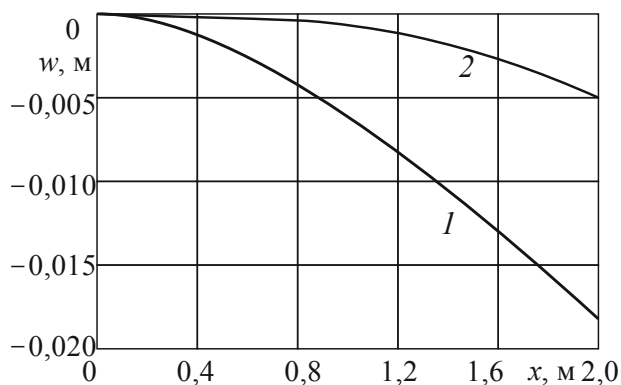


Рис. 3. Изменение прогиба по длине балки при разных длинах участка опирания: 1 – $x_1 = 0,2l$; 2 – $x_1 = 0,3l$

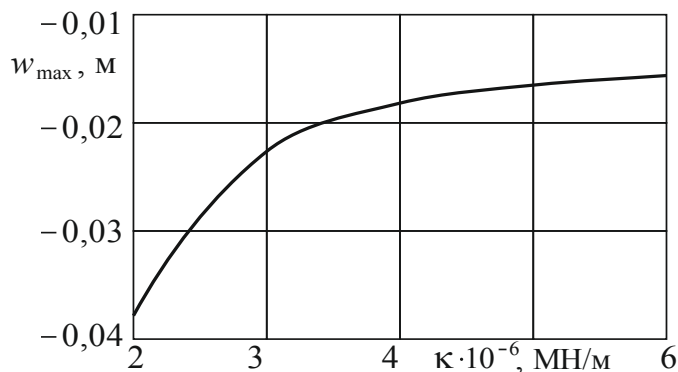


Рис. 4. Изменение максимального прогиба при увеличении жесткости упругого основания

При увеличении длины участка опирания на упругое основание перемещения уменьшаются по величине, график меняется по форме по сравнению с соответствующей кривой для основания меньшей жесткости.

Предложенная методика решения задачи при деформировании упругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки показывает, что небольшое изменение длины участка опирания балки или жесткости упругого основания приводит к существенному изменению перемещений, а, следовательно, и напряжений в слоях. Применение данной методики в расчетной практике позволит проектировать трехслойные конструкции с оптимальными параметрами для заданных нагрузок и условий, в которых они работают.

РЕЗЮМЕ

Исследован изгиб трехслойной балки, частично опертой на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки. Решения получены отдельно для двух участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границе. Численно исследованы перемещения консольной балки при различных нагрузках и длинах участка опирания на упругое основание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
2. Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
3. Старовойтов, Э. И. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной пластины при цилиндрическом изгибе на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская, С. А. Старовойтов // Вестник гражданских инженеров. – 2007. – № 4 (13). – С. 17–25.
4. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
5. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2012. № 2(25). – С. 97-102.
6. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
7. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М: Физматлит, 2006. – 379 с.
8. Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 1. – С. 19–22.
9. Старовойтов, Э. И. Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 110 – 120.
10. Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойного стержня на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах – 2007. – № 2 (28), Т.13. – 109–122.
11. Электронная модель «Напряженно-деформированное состояние трехслойной балки, частично опертой на упругое основание»: регистрационное свидетельство № 5301403768 от 03 марта 2014 г. / А.В. Яровая, А.А. Поддубный; владелец Белорусский государственный университет транспорта. / Государственный регистр информационных ресурсов НИРУП ИППС. – 2014.

SUMMARY

Investigated a three-layer bending beam with partial contact with the elastic foundation under uniformly distributed load. The solution is obtained separately for the two sections and then merged with the conditions of equality of displacements and forces on the border. Numerically investigated movement of a cantilever beam under different loads and long sections bearing on an elastic foundation.

E-mail: a-xalio@yandex.ru
aleksey-podd@yandex.ru