УДК 624.131+539.215

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ПЛОТНЫХ ГЛИНИСТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВ

к.ф.-м.н. **Алтынбеков Ш.**

Южно-Казахстанский Государственный педагогический институт,
г. Шымкент, Казахстан

1. Введение

В настоящее время теория фильтрационной консолидации многокомпонентных грунтов, основанная на модели К.Терцаги-В.А.Флорина, признана достаточно разработанной. Однако, несмотря на это не исследованы задачи сопряжений консолидации плотных глинистых неоднородных грунтов. Именно этот вопрос мы изучаем в данной работе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим методику решения системы уравнения консолидации неоднородных грунтов:

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} = C_{vns}(t)\frac{1+(n-1)\xi_s(z)}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}\eta_s(z)}\left[K_{2s}\left(\frac{\partial^2 H_s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_s}{\partial r}-\frac{\gamma i_{0s}}{r}\right)+K_{3s}\frac{\partial^2 H_s}{\partial z^2}\right],\ s=1,2\ , \quad (1)$$

при следующих начально-граничных условиях:

$$H_s(z,r,\tau_1) = H_{0s}(z,r)\,, \quad (2)$$

$$-h_{1s}^{(1)}\frac{\partial H_s}{\partial z}+h_{1s}^{(2)}H_s\Big|_{z=0}=0\,,\quad h_{1s}^{(3)}\frac{\partial H_s}{\partial z}+h_{1s}^{(4)}H_s\Big|_{z=\pm h}=0\,,\quad s=1,2\,, \quad (3)$$

$$-h_{2s}^{(1)}\frac{\partial H_s}{\partial r}+h_{2s}^{(2)}H_s\Big|_{r=r_0}=0\,,\quad h_{2s}^{(3)}\frac{\partial H_s}{\partial r}+h_{2s}^{(4)}H_s\Big|_{r=R}=0\,,\quad s=1,2\,, \quad (4)$$

и условиях сопряжений

$$H_1\big|_{z=0}=H_2\big|_{z=-0}\,,\quad K_{31}\frac{\partial H_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-K_{32}\frac{\partial H_2}{\partial z}\bigg|_{z=-0}. \quad (5)$$

Здесь r_0 и R – неизвестные (радиус скважины, радиус продуктивности действующей скважины), определяемые в ходе решения задачи.

3. Методы решения задачи

$H_s(z,r,t)$ находим в виде суммы двух функций

$$H_s(z,r,t)=Q_s(r)+W_s(z,r,t)\,,\quad s=1,2\,. \quad (6)$$

Причем функцию $Q_s(r)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2Q_s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dQ_s}{dr}-\frac{\gamma i_{0s}}{r}=0\,,\quad s=1,2 \quad (7)$$

и граничным условиям

$$-h_{2s}^{(1)}\frac{dQ_s}{dr}+h_{2s}^{(2)}Q_s\bigg|_{r=r_0}=0\,,\quad s=1,2\,, \quad (8)$$

$$-h_{2s}^{(3)}\frac{dQ_s}{dr}+h_{2s}^{(4)}Q_s\bigg|_{r=R}=0\,,\quad s=1,2\,. \quad (9)$$

Вторую функцию $W_s(z,r,t)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла системе уравнений

$$\frac{\partial W_s}{\partial t}=C_{vns}(t)\frac{1+(n-1)\xi_s(z)}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}\eta_s(z)}\left[K_{2s}\left(\frac{\partial^2 W_s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_s}{\partial r}\right)+K_{3s}\frac{\partial^2 W_s}{\partial z^2}\right],\ s=1,2 \tag{10}$$

и граничным условиям

$$-h_{1s}^{(1)}\frac{\partial H_s}{\partial z}+h_{1s}^{(2)}W_s\big|_{z=0}=0,\quad h_{1s}^{(3)}\frac{\partial W_s}{\partial z}+h_{1s}^{(4)}W_s\big|_{z=\pm h_s}=0, \tag{11}$$

$$-h_{2s}^{(1)}\frac{\partial W_s}{\partial r}+h_{2s}^{(2)}W_s\big|_{r=r_0}=0,\quad h_{2s}^{(3)}\frac{\partial W_s}{\partial r}+h_{2s}^{(4)}W_s\big|_{r=R}=0, \tag{12}$$

и условиям сопряжений

$$W_1\big|_{z=0}=W_2\big|_{z=-0},\quad K_{31}\frac{\partial W_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-K_{32}\frac{\partial W_2}{\partial z}\bigg|_{z=-0}. \tag{13}$$

Перейдем к решению первой дополнительной задачи. Положив в уравнении (7)

$$\frac{dQ_s}{dr}=v_s,\quad s=1,2, \tag{14}$$

получим

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial r}+\frac{1}{r}v_s=\frac{\gamma i_{0s}}{r}.$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\vartheta_s=(\gamma i_{0s}r+C_{1s})\frac{1}{r}. \tag{15}$$

Принимая во внимание (14), имеем $\dfrac{dQ_s}{dr}=\dfrac{1}{r}(C_{1s}+\gamma i_{0s}r)$, отсюда

$$Q_s(r)=C_{1s}\ln r+\gamma i_{0s}r+C_{2s},\ s=1,2. \tag{16}$$

Здесь произвольные постоянные C_{1s} и C_{2s} определяются из условий (8)-(9) и имеют вид:

$$C_{1s}=\frac{\left(h_{2s}^{(1)}h_{2s}^{(4)}+h_{2s}^{(2)}h_{2s}^{(3)}\right)\gamma i_{0s}}{h_{2s}^{(4)}\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\dfrac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)-h_{2s}^{(2)}\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\dfrac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)}, \tag{17}$$

$$C_{2s}=\frac{\left[\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\dfrac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)\cdot(h_{2s}^{(1)}-h_{2s}^{(2)}r_0)+\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\dfrac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)\cdot(h_{2s}^{(3)}+h_{2s}^{(4)}R)\right]\gamma i_{0s}}{h_{2s}^{(2)}\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\dfrac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)-h_{2s}^{(4)}\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\dfrac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)}. \tag{18}$$

Если теперь учесть (1) и (18), то из (5) и (6) можно получить систему уравнений для определения r_0 и R:

$$\left(h_{21}^{(1)}h_{21}^{(4)}+h_{21}^{(2)}h_{21}^{(3)}\right)\cdot\left[h_{22}^{(4)}\left(h_{22}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{22}^{(1)}}{r_0}\right)-h_{22}^{(2)}\left(h_{22}^{(4)}\ln R+\frac{h_{22}^{(3)}}{R}\right)\right]-$$

$$-\left(h_{22}^{(1)}h_{22}^{(4)}+h_{22}^{(2)}h_{22}^{(3)}\right)\cdot\left[h_{21}^{(4)}\left(h_{21}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{21}^{(1)}}{r_0}\right)-h_{21}^{(2)}\left(h_{21}^{(4)}\ln R+\frac{h_{21}^{(3)}}{R}\right)\right]=0;$$

$$\left[\left(h_{21}^{(4)}\ln R+\frac{h_{21}^{(3)}}{R}\right)\cdot\left(h_{21}^{(1)}-h_{21}^{(2)}r_0\right)+\left(h_{21}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{21}^{(1)}}{r_0}\right)\cdot\left(h_{21}^{(3)}+h_{21}^{(4)}R\right)\right]\times$$

$$\times\left[h_{22}^{(2)}\left(h_{22}^{(4)}\ln R+\frac{h_{22}^{(3)}}{R}\right)-h_{22}^{(4)}\left(h_{22}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{22}^{(1)}}{r_0}\right)\right]-$$

$$-\left[\left(h_{22}^{(4)}\ln R+\frac{h_{22}^{(3)}}{R}\right)\cdot(h_{22}^{(1)}-h_{22}^{(3)}r_0)+\left(h_{22}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{22}^{(1)}}{r_0}\right)\cdot(h_{22}^{(3)}+h_{22}^{(4)}R)\right]\times$$

$$\times\left[h_{21}^{(2)}\left(h_{21}^{(4)}\ln R+\frac{h_{21}^{(3)}}{R}\right)-h_{21}^{(4)}\left(h_{21}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{21}^{(1)}}{r_0}\right)\right]=0.$$

Подставив (17) и (18) в (16), получим решение первой вспомогательной задачи (7)-(9)

$$Q_s(r)=\frac{\left(h_{2s}^{(1)}h_{2s}^{(4)}+h_{2s}^{(2)}h_{2s}^{(3)}\right)\gamma i_{0s}}{h_{2s}^{(4)}\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)-h_{2s}^{(2)}\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\frac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)}\ln r+\gamma i_{0s}+$$

$$+\frac{\left[\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\frac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)\cdot(h_{2s}^{(1)}-h_{2s}^{(2)}r_0)+\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)\cdot(h_{2s}^{(3)}+h_{2s}^{(4)}R)\right]\gamma i_{0s}}{h_{2s}^{(2)}\left(h_{2s}^{(4)}\ln R+\frac{h_{2s}^{(3)}}{R}\right)-h_{2s}^{(4)}\left(h_{2s}^{(2)}\ln r_0-\frac{h_{2s}^{(1)}}{r_0}\right)}. \qquad (19)$$

Выбрав в качестве функций $\xi_s(z)$ и $\eta_s(z)$ в (1), соответственно следующие зависимости [1]

$$\xi_s(z)=\xi_{0s}e^{-\alpha_{3s}z},\quad \eta_s(z)=e^{-\alpha_{4s}z},\ s=1,2,$$

согласно методу аппроксимации, обоснованной в работе [2], функцию $1+(n-1)\xi_{0s}e^{-\alpha_{3s}z}$ приближенно заменяем функцией

$$\tilde{\xi}_s(z)=[1+(n-1)\xi_{0s}]\exp\left[\left(\ln\frac{1+(n-1)\xi_{0s}e^{\mp\alpha_{3s}h_s}}{1+(n-1)\xi_{0s}}\right)\cdot\frac{z}{\pm h_s}\right], \qquad (20)$$

а функцию $[\alpha_{1s}+\alpha_{2s}\eta_s(z)]=\alpha_{1s}+\alpha_{2s}\exp(-\alpha_{4s}z)$ функцией

$$\tilde{\eta}_s(z)=(\alpha_{1s}+\alpha_{2s})\exp\left[\left(\ln\frac{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}e^{\mp\alpha_{4s}h_s}}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}}\right)\cdot\frac{z}{\pm h_s}\right]. \qquad (21)$$

Имея в виду (20) и (21), функцию $f_s(z)=\dfrac{1+(n-1)\xi_{0s}e^{-\alpha_{3s}z}}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}e^{-\alpha_{4s}z}}$ приближенно заменяем функцией $\tilde{f}_s(z)$:

$$\frac{1+(n-1)\xi_{0s}e^{-\alpha_{3s}z}}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}e^{-\alpha_{4s}z}}\approx\frac{1+(n-1)\xi_{0s}}{\alpha_{1s}+\alpha_{2s}}\cdot e^{\left(\ln\frac{1+(n-1)\xi_{0s}e^{\mp\alpha_{3s}h_s}(\alpha_{1s}+\alpha_{2s})}{1+(n-1)\xi_{0s}\left(\alpha_{1s}+\alpha_{2s}e^{\mp\alpha_{4s}h_s}\right)}\right)\cdot\frac{z}{\pm h_s}}. \qquad (22)$$

Нетрудно заметить, что при $z=0$, $z=\pm h_S$ аппроксимация вида (22) абсолютно точная и при $\alpha_{3s},\alpha_{4s}\to 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю. Внутри точек интервала $(0,h_1)$ сравним исходные значения для $\tilde{F}_1(z)$ с соответствующими значениями $F_1(z)$, полученными из приближенной формулы (22). Соответствующие результаты, вычисленные на ПЭВМ при малых значениях параметра α_{31},α_{41}, приведено в таблице 1.

$$\alpha_{31}=1{,}527\cdot 10^{-1},\quad \alpha_{41}=1{,}763\cdot 10^{-1}$$

Табл.1. Результаты проведенных расчетов

$F_1(z)$	$\widetilde{F}_1(z)$	$\lvert F_1 - F_2 \rvert$
6,7185243000E-03	6,7185243000 E-03	0,0000000000E+00
6,3544726410E-03	6,4342890858 E-03	7,9816444767 E-05
6,0273265951E-03	6,1620787826 E-03	1,3475188754 E-04
5,7333457074E-03	5,9013846622 E-03	1,6803895482 E-04
5,4691670048 E-03	5,6517195187 E-03	1,8755751387 E-04
5,2317695460 E-03	5,4126167579 E-03	1,8084721196 E-04
5,0184383694 E-03	5,1836295258 E-03	1,6519115636 E-04
4,8267337440 E-03	4,9643298726 E-03	1,3759612858 E-04
4,6544632578 E-03	4,7543079538 E-03	9,9844686019 E-05
4,4996567944 E-03	4,5531712638 E-03	5,3514469336 E-05
4,3605439022 E-03	4,3605439022 E-03	0,0000000000E+00

$$\alpha_{31} = 1{,}527 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_{41} = 1{,}763 \cdot 10^{-3}$$

6,7185243000E-03	6,7185243000 E-03	0,0000000000E+00
6,7184859147 E-03	6,7184859156 E-03	8,5265128291 E-13
6,7184475298 E-03	6,7184475314 E-03	1,5347723092 E-12
6,7184091454 E-03	6,7184091474 E-03	2,0108359422 E-12
6,7183707613 E-03	6,7183707636 E-03	2,2879476091 E-12
6,7183323772 E-03	6,7183323800 E-03	2,3945290195 E-12
6,7182939944 E-03	6,7182939967 E-03	2,2879476091 E-12
6,7182556116 E-03	6,7182556136 E-03	2,0108359422 E-12
6,7182172292 E-03	6,7182172307 E-03	1,5347723092 E-12
6,7181788472 E-03	6,7181788480 E-03	8,6686213763 E-13
6,7181404636 E-03	6,7181404656 E-03	0,0000000000E+00

Из таблицы видно, что функция $F_1(z)$ с высокой точностью $(10^{-3} \div 10^{-11})$ аппроксимирована функцией $\widetilde{F}_1(z)$. Следовательно, аппроксимация вида (22) для малых значений α_{3S} и α_{4S} вполне приемлема в практических расчетах.

Пользуясь аппроксимацией вида (22) и методом Фурье, решение задачи (10)-(13) можно представить в виде

$$W_s(r,z,t) = \sum\sum D_{ijs} V_{0s}\left(\mu_{is}\frac{r}{\sqrt{K_{2s}}}\right) \cdot V_{sv_j}\left(\frac{2\lambda_{ijs}}{\alpha_{5s}}\sqrt{\frac{A_{3s}}{K_{3s}}} e^{-\frac{\alpha_{5s}}{2}z}\right) \cdot e^{-\lambda_{ijs}^2 \int\limits_{\tau_1}^{t} C_{vns}(\tau)d\tau}, \quad s = 1,2. \qquad (23)$$

Здесь $V_{0s}\left(\mu_{is}\frac{r}{\sqrt{K_{2s}}}\right)$ – функция из комбинации функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; $V_{sv_i}\left(\frac{2\lambda_{ijs}}{\alpha_{5s}}\sqrt{\frac{A_{3s}}{K_{3s}}} e^{-\frac{\alpha_{5s}}{2}z}\right)$ – функция из комбинации функций Бесселя первого и второго рода индекса v_{si}; μ_{is}, λ_{ijs} – положительные корни уравнения, составленного из комбинаций этих функций, удовлетворяющих условиям (12) и (11); D_{ijs} – известные коэффициенты, которые находятся из начального условия (2)

$$A_{3s} = \frac{1 + (n-1)\xi_{0s}}{\alpha_{1s} + \alpha_{2s}}, \quad \alpha_{5s} = \ln\frac{1 + (n-1)\xi_{0s} e^{\mp\alpha_{3s}h_s}(\alpha_{1s} + \alpha_{2s})}{1 + (n-1)\xi_{0s}\left(\alpha_{1s} + \alpha_{2s} e^{\mp\alpha_{4s}h_s}\right)} \Bigg/ h_s.$$

Подставив (23) и (19) в (6), получим решение поставленной задачи (1)-(5).

4. Выводы

Обоснованный метод аппроксимации и метод определения радиуса скважины и радиуса продуктивности действующей скважины является новым и значительным вкладом в прикладную механику грунтов, и в методы уравнений математической физики. Применение их позволяет изучить более сложные проблемы механики неоднородных грунтов и уравнений математической физики.

РЕЗЮМЕ

Предложена методика решения задачи сопряжений теории фильтрационной консолидации плотных глинистых неоднородных грунтов, коэффициенты упругомгновенной деформации и бокового давления которых изменяются по экспоненциальному закону глубины. Отличие данной работы от других работ – радиус скважины и радиус продуктивности действующей скважины определены в зависимости от краевых условий в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтынбеков, Ш. Об одной задаче нелинейной теории консолидации неоднородных наследственно стареющих грунтов / Ш. Алтынбеков //Проблемы механики.- Ташкент, 1999, №1.- С.3-9.
2. Алтынбеков, Ш. Об одном методе аппроксимации / Ш. Алтынбеков //Проблемы механики.- Ташкент, 1995, №3-4.- С.5-7.

SUMMARY

The technique of the solution of a problem of interfaces of the theory of filtration consolidation of dense clay non-uniform soil is offered, coefficients is elastic - instant deformation and side pressure which changes under the exponential law of depth. Difference of this work from other works, in work radius the well and radius of efficiency of the operating well are defined depending on regional conditions during the solution of a task.

E-mail: Sh.Altynbekov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.10.2015