УДК 621.762

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ СОСТАВНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ИХ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДРУГ С ДРУГОМ

д.т.н. **Дудяк А.И., Хвасько В.М.**
Белорусский национальный технический университет, Минск

Известно, что прочность толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением, с увеличением толщины стенки до бесконечности возрастает только до определенного предела [1]. Распределение напряжений в этом случае можно улучшить, разгрузив внутренние слои. Этого можно добиться, если цилиндр выполнить в виде составной конструкции путем запрессовки внутреннего цилиндра в наружный с определенным диаметральным натягом [1]. Обычно расчет подобных конструкций ведут с точки зрения определения контактного давления в зоне сопряжения цилиндров в зависимости от величины диаметрального натяга [2]. Величина натяга может быть найдена из условия равнопрочности цилиндров при заданной величине внутреннего давления и выбирается такой, чтобы эквивалентное напряжение было минимальным, что не для всех подобных конструкций является целесообразным [1, 3].

В настоящей работе преследуется цель достижения максимального внутреннего давления в составном цилиндре путем определения оптимального размера зоны контакта поверхностей внутреннего и наружного цилиндров, что позволяет увеличить несущую способность рассматриваемой конструкции.

Допустим, что конструктивно задан наружный размер наружного цилиндра и внутренний размер внутреннего цилиндра. В этом случае размер зоны контакта цилиндров должен быть таким, чтобы во внутреннем цилиндре создать максимально возможное давление. Для достижения этого следует, чтобы внутренний и наружный цилиндры работали в условиях равнопрочности.

Рассмотрим конструкцию из двух стальных цилиндров, запрессованных друг в друга с некоторым натягом. Примем следующие размеры цилиндров: $r_в$ – внутренний радиус внутреннего цилиндра; $r_с$ – наружный радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус наружного цилиндра; $r_н$ – наружный радиус наружного цилиндра.

Распределение эквивалентных напряжений после запрессовки цилиндров друг в друга и создания в них внутреннего давления $P_в$ показано на рисунке 1.

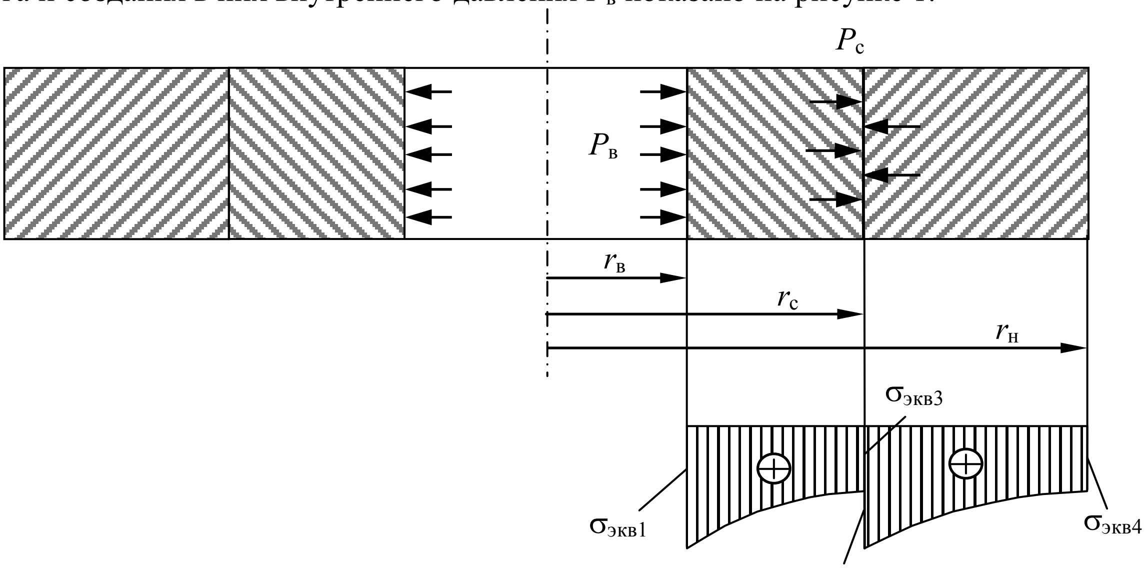

Рис. 1. Распределение эквивалентных напряжений после запрессовки стальных цилиндров друг в друга и создания внутреннего давления

Условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров можно представить следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв1}} = \sigma_{\text{экв2}} \leq \sigma_{\text{пц}}, \ \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_{\text{экв4}}, \tag{1}$$

где $\sigma_{\text{экв1}}$ – эквивалентное напряжение на внутренней поверхности внутреннего цилиндра; $\sigma_{\text{экв2}}$ – эквивалентное напряжение на внутренней поверхности наружного цилиндра; $\sigma_{\text{пц}}$ – предел пропорциональности для материала цилиндров; $\sigma_{\text{экв3}}$ – эквивалентное напряжение на наружной поверхности внутреннего цилиндра; $\sigma_{\text{экв4}}$ – эквивалентное напряжение на наружной поверхности наружного цилиндра.

В общем случае радиальные и окружные напряжения можно определить из выражений вида [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \bullet \frac{1}{r^2}, \\ \sigma_t &= \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(P_1 - P_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \bullet \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где σ_r и σ_t – соответственно радиальные и окружные напряжения рассматриваемого цилиндра;

P_1 и P_2 – соответственно давление на внутреннюю и наружную поверхность цилиндра;

r_1 и r_2 – соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра;

r – координата точки, в которой определяют напряжение.

Для начала определим радиальные и окружные напряжения в наиболее опасной зоне блока стальных цилиндров – на внутренней поверхности наружного цилиндра. В этом случае выполняются условия: $P_1 = P_{\text{с}}$, $P_2 = 0$, $r_1 = r_{\text{с}}$, $r_2 = r_{\text{н}}$, $r = r_{\text{с}}$. Тогда выражения (2) примут вид:

$$\sigma_r = -P_{\text{с}}, \ \sigma_t = \frac{r_{\text{н}}^2 + r_{\text{с}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{с}}^2} P_{\text{с}}. \tag{3}$$

Предположим, что блок стальных цилиндров выполнен из пластичного материала. Тогда для определения эквивалентных напряжений воспользуемся третьей теорией прочности, которая имеет следующий вид [3]:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{пц}}, \tag{4}$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ – эквивалентные напряжения; σ_1, σ_3 – главные напряжения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Анализируя соотношения (3) приходим к выводу, что для рассматриваемой области главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{r_{\text{н}}^2 + r_{\text{с}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{с}}^2} P_{\text{с}}, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = \sigma_r = -P_{\text{с}}. \tag{5}$$

Подставив выражения (5) в формулу для нахождения эквивалентных напряжений (4), получим условие прочности для внутренней поверхности наружного цилиндра:

$$\sigma_{\text{экв2}} = \frac{2 P_{\text{с}} r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{с}}^2} \leq \sigma_{\text{пц}}. \tag{6}$$

Выражая из последнего неравенства величину $P_{\text{с}}$, получим:

$$P_{\text{с}} = \frac{\sigma_{\text{пц}} (r_{\text{н}}^2 - r_{\text{с}}^2)}{2 r_{\text{н}}^2}. \tag{7}$$

Далее определим радиальные и окружные напряжения на внутренней поверхности внутреннего цилиндра, используя соотношения (2) и следующие условия: $P_1 = P_в$, $P_2 = P_с$, $r_1 = r_в$, $r_2 = r_с$, $r = r_в$. Тогда: $\sigma_r = -P_в$, $\sigma_t = \dfrac{P_в\left(r_с^2 + r_в^2\right) - 2P_с r_с^2}{r_с^2 - r_в^2}$.

Очевидно, что в этом случае главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{P_в\left(r_с^2 + r_в^2\right) - 2P_с r_с^2}{r_с^2 - r_в^2},\ \ \sigma_2 = 0,\ \ \sigma_3 = \sigma_r = -P_в. \tag{8}$$

Рассматривая совместно соотношения (8) и формулу для определения эквивалентных напряжений (4), после преобразований получим:

$$\sigma_{экв1} = \frac{2\left(P_в - P_с\right)r_с^2}{r_с^2 - r_в^2} \le \sigma_{пц}. \tag{9}$$

Из неравенства (9) выразим величину $P_в$:

$$P_в = \frac{\sigma_{пц}\left(r_с^2 - r_в^2\right) + 2P_с r_с^2}{2r_с^2}. \tag{10}$$

Используя соотношения (10) и (7) с помощью приложения MathCad 13 проанализируем изменение величины внутреннего давления $P_в$, а также контактного давления $P_с$ в зависимости от радиуса контакта двух стальных цилиндров – $r_с$.

Примем следующие значения величин для расчета: внутренний радиус внутреннего цилиндра $r_в$ = 20 мм, наружный радиус наружного цилиндра $r_н$ = 75 мм, предел пропорциональности для материала цилиндров $\sigma_{пц}$ = 200 МПа. Результаты расчетов представлены на рисунке 2.

Из анализа графической зависимости на рисунке 2 следует, что при определенном значении радиуса контакта двух стальных цилиндров величина внутреннего давления достигает своего максимума.

Дальнейшие расчеты сводятся к отысканию величины радиуса контакта двух цилиндров.

Определим эквивалентные напряжения на наружных поверхностях внутреннего и наружного стальных цилиндров.

Для внутреннего цилиндра при $P_1 = P_в$, $P_2 = P_с$, $r_1 = r_в$, $r_2 = r_с$, $r = r_с$, радиальные и окружные напряжения согласно соотношениям (2) равны:

$$\sigma_r = -P_с,\ \ \sigma_t = \frac{2P_в r_в^2 - P_с\left(r_в^2 + r_с^2\right)}{r_с^2 - r_в^2}.$$

Главные напряжения соответственно будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{2P_в r_в^2 - P_с\left(r_в^2 + r_с^2\right)}{r_с^2 - r_в^2},\ \ \sigma_2 = 0,\ \ \sigma_3 = \sigma_r = -P_с.$$

Тогда эквивалентные напряжения определим согласно третьей теории прочности (4):

$$\sigma_{экв3} = \frac{2\left(P_в - P_с\right)r_в^2}{r_с^2 - r_в^2}. \tag{11}$$

$2r2^2$

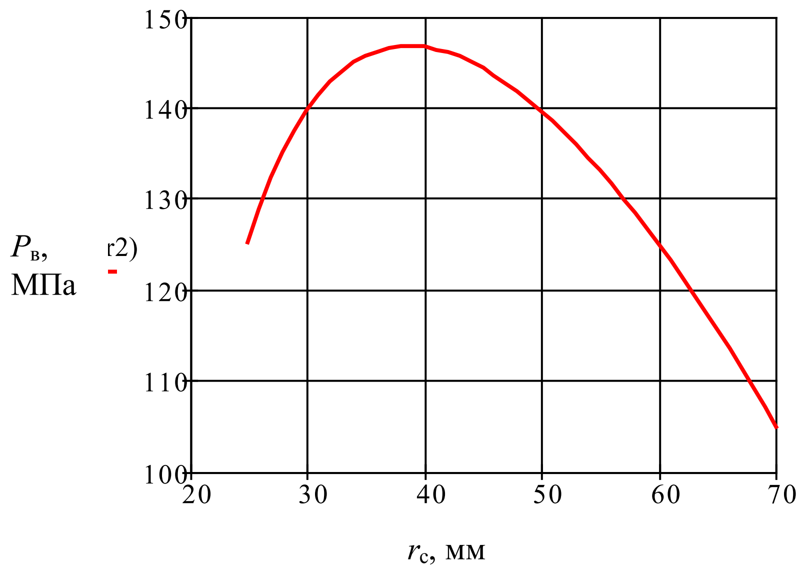

Рис. 2. Зависимость внутреннего давления от радиуса контакта стальных цилиндров

Используя соотношения (2), найдем компоненты напряжений для наружного цилиндра при $P_1 = P_с$, $P_2 = 0$, $r_1 = r_с$, $r_2 = r_н$, $r = r_н$:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = \frac{2P_с r_с^2}{r_н^2 - r_с^2}.$$

В этом случае главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{2P_с r_с^2}{r_н^2 - r_с^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

А значит, эквивалентные напряжения для этой области равны:

$$\sigma_{экв4} = \frac{2P_с r_с^2}{r_н^2 - r_с^2}. \qquad (12)$$

Рассматривая совместно условия (1) и выражения (6), (9), (11), (12), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2P_с r_н^2}{r_н^2 - r_с^2} = \sigma_{пц}, \\ \dfrac{2(P_в - P_с) r_с^2}{r_с^2 - r_в^2} = \sigma_{пц}, \\ \dfrac{2(P_в - P_с) r_в^2}{r_с^2 - r_в^2} = \dfrac{2P_с r_с^2}{r_н^2 - r_с^2}. \end{cases} \qquad (13)$$

Из первого уравнения системы (13) выразим величину $2P_с$:

$$2P_с = \sigma_{пц} \frac{r_н^2 - r_с^2}{r_н^2}. \qquad (14)$$

Из второго уравнения системы (13) выразим величину $2(P_в - P_с)$:

$$2(P_в - P_с) = \sigma_{пц} \frac{r_с^2 - r_в^2}{r_с^2}. \qquad (15)$$

Подставляя в третье уравнение системы (13) соотношения (14) и (15), после преобразований получим равенство вида:

$$\frac{r_в^2}{r_с^2} = \frac{r_с^2}{r_н^2},$$

откуда

$$r_с = \sqrt{r_в r_н}. \qquad (16)$$

Таким образом, с помощью соотношения (16) можно найти величину радиуса контакта двух цилиндров, при котором давление на внутреннюю поверхность составного цилиндра достигает своего максимального значения.

Задавая значения радиусов $r_в$ = 20 мм и $r_н$ = 75 мм, согласно выражению (16) получим, что $r_с$ = 38,73 мм. Далее подставляя найденную величину $r_с$ в формулу (7) и принимая $\sigma_{пц}$ = 200 МПа, найдем давление, возникающее в зоне контакта двух стальных цилиндров: $P_с$ = 73,33 МПа. Тогда максимальное внутреннее давление согласно уравнению (10) будет равно: $P_в$ = 146,67 МПа.

РЕЗЮМЕ

Предложена методика расчета оптимального соотношения размеров цилиндров в толстостенной составной конструкции с целью создания максимально возможных давлений на ее внутреннюю поверхность. При этом в процессе эксплуатации обеспечивается условие равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров. Также становится возможным определение допустимой величины внутреннего давления и давления, возникающего в зоне контакта цилиндров. Благодаря этому достигается увеличение несущей способности составной конструкции в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / Г.С. Писаренко [и др.]; под общ. ред. Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб и доп. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – С. 443-460.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – С. 389-393.
3. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учеб. / М.Д. Подскребко. – Минск: Высшая школа, 2007. – С. 653-670.

SUMMARY

The design procedure of an optimum relationship between cylinder dimensions in the thick-walled composite construction was proposed in order to generate maximum pressure on the internal surface. In this case the uniform strength condition between the internal and external cylinders is provided during the operation. Also the determining of allowable internal pressure and contact pressure in the cylinder interfaces is possible. Therefore the load-carrying capacity of the whole composite construction is increased.

E-mail: dudjak@mail.ru
hvasko.victoriya@gmail.com

Поступила в редакцию 17.10.2015