

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

к.ф.-м.н. Конон П. Н., маг. Жук А. В.

Белорусский государственный университет, Минск

В химической, металлургической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности находят широкое применение процессы, использующие движение слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра.

Задача о движении тонкого слоя вязкой жидкости внутри и вне вращающегося цилиндра в поле сил тяжести рассмотрена в [1]. В статье [2] данная проблема исследована с учётом сил поверхностного натяжения. Работы других авторов основаны в основном на решении уравнений, полученных в [1,2]. В работах [4-6] получены и исследованы уравнения эволюции свободной поверхности плоского слоя вязкой жидкости произвольной, в том числе и немалой толщины в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести. Экспериментальные результаты, описывающие различные типы движения вязкой жидкости внутри вращающегося цилиндра, получены в работе [3].

Сопоставление с решениями известных уравнений. Одним из первых уравнение эволюции поверхности тонкой пленки жидкости на внутренней и внешней поверхности цилиндра в поле силы тяжести при достаточно медленном его вращении без учета капиллярных сил получил Х. Моффат [1]. В относительной системе координат, жестко связанной с поверхностью вращающегося цилиндра, оно примет следующий вид:

$$\delta_\tau = \frac{1}{3} \text{Re} Fr^{-1} (\delta^3 \cos(\varphi + \tau))_\varphi, \quad (1)$$

где δ – относительная толщина слоя вязкой жидкости, τ – безразмерное время, φ – отклонение окружной координаты от случая вращения слоя жидкости и цилиндра как единого целого. Решение уравнения (1) зависит от произведения двух безразмерных параметров – чисел Рейнольдса $\text{Re} = R_0^2 \omega_0 / \nu$ и Фруда $Fr = R_0 \omega_0^2 / g$. Здесь R_0 – радиус цилиндра, ω_0 – постоянная угловая скорость его вращения, ν – коэффициент кинематической вязкости, g – ускорение силы тяжести. При выводе уравнения (1) использовалось, что $\text{Re} \delta_s^2 \ll 1$, $\delta_s \ll 1$ и $We^{-1} \ll (Fr^{-1} \text{Re})^{1/2}$, где δ_s – средняя толщина слоя, а We – число Вебера равно $We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma$, в котором σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В развитии исследований В.В.Пухначевым [2] было рассмотрено влияние сил поверхностного натяжения, и уравнение эволюции тонкого слоя имело вид

$$\delta_\tau = \frac{1}{3} \text{Re} Fr^{-1} (\delta^3 \cos(\varphi + \tau))_\varphi - \frac{1}{3} \text{Re} We^{-1} (\delta^3 \cdot (\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}))_\varphi, \quad \delta \ll 1. \quad (2)$$

К уравнениям (1), (2) необходимо добавить начальные условия и требование периодичности по углу φ . При выводе этих уравнений влиянием силы инерции на движение жидкости пренебрегалось, подробный анализ их решений не проводился.

В отличие от уравнений (1), (2) полученная авторами исследования в работах [4,5] система уравнений описывает движение плоского слоя вязкой жидкости не обязательно малой толщины с учетом всех значимых физических факторов, когда влияние сил инерции существенно. В силу этого она имеет более сложный вид:

$$\delta_\tau = H(\delta)T_\varphi + R(\delta, T)\delta_\varphi, \quad (3)$$

$$T_\tau = U(\delta, T)\delta_\varphi + V(\delta, T)T_\varphi + \frac{1}{We} \frac{60}{(1-\delta)^4 E_0(\delta)} \left(6\delta_\varphi^3 + 6(1-\delta)\delta_\varphi\delta_{\varphi\varphi} + \right. \\ \left. + (1-\delta)^2(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}) \right) + \frac{1}{Fr} \frac{30(\delta-2)\cos(\varphi+\tau)}{E_0(\delta)} + \frac{1}{Re} \frac{10T}{\delta^2 E_0(\delta)} (6+3\delta-\delta^2), \quad (4)$$

где

$$H(\delta) = \frac{\delta(5\delta-8)}{24(\delta-1)}, \quad R(\delta, T) = \frac{T(5\delta-4)}{12(\delta-1)};$$

$$U(\delta, T) = T^2 U_2(\delta) + T U_1(\delta) + U_0(\delta); \quad V(\delta, T) = T V_1(\delta) + V_0(\delta);$$

$$U_2(\delta) = \frac{1}{\delta E_0(\delta)} \left(\frac{1}{42} (-336 + 553\delta - 38\delta^2) + \frac{5\delta-4}{12(\delta-1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$U_1(\delta) = \frac{40-50\delta}{E_0(\delta)}; \quad U_0(\delta) = \frac{60(\delta-1)}{E_0(\delta)};$$

$$V_1(\delta) = \frac{1}{E_0(\delta)} \left(\frac{1}{21} (-336 + 161\delta + 34\delta^2) + \frac{5\delta-8}{24(\delta-1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$V_0(\delta) = \frac{\delta(40-25\delta)}{E_0(\delta)}; \quad E_0(\delta) = -20 + 25\delta - 9\delta^2.$$

Во всех уравнениях нижний индекс обозначает соответствующую частную производную. Здесь $T(\varphi, \tau)$ - неизвестная величина, однозначно связанная с расходом жидкости [4].

Уравнения эволюции (3),(4) дополняются условиями периодичности по угловой координате, а также периодическими начальными условиями

$$\delta(\varphi, \tau) = \delta(\varphi + 2\pi, \tau), \quad \delta_\varphi(\varphi, \tau) = \delta_\varphi(\varphi + 2\pi, \tau), \quad (5)$$

$$\delta_{\varphi\varphi}(\varphi, \tau) = \delta_{\varphi\varphi}(\varphi + 2\pi, \tau), \quad T(\varphi, \tau) = T(\varphi + 2\pi, \tau);$$

$$\delta(\varphi, 0) = \delta_0(\varphi), \quad T(\varphi, 0) = T_0(\varphi). \quad (6)$$

Система нелинейных уравнений (3), (4) в частных производных с граничными и начальными условиями (5), (6) является замкнутой и служит для определения эволюции свободной поверхности слоя $\delta(\varphi, \tau)$.

Система (3), (4) по аналогии с уравнениями стекающей по наклонной поверхности пленки могут быть названы уравнениями типа Капицы–Шкадова для возмущенного жидкого слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле центробежных сил.

Важно отметить, что условия, при которых получены уравнения (1), (2) и система (3),(4) не являются противоречивыми. Если средняя толщина пленки δ_s известна, то можно найти область значений числа Re :

$$1 \ll \text{Re} \ll \delta_s^{-2}, \quad \delta_s \ll 1,$$

которая удовлетворяет всем рассматриваемым условиям. Например, если $\delta_s = 0,01$, то должно быть $1 \ll \text{Re} \ll 10000$, и в качестве общего для всех уравнений интервала можно выбрать значения $10 < \text{Re} < 1000$. В работе [5] показано, что в рассматриваемой области $1 \ll \text{Re} \ll \delta_s^{-2}$, $\delta_s \ll 1$, то есть при определенных угловых скоростях вращения цилиндра, из системы (3,4) можно вывести уравнения (1), (2), полученные Х. Моффатом и В.В. Пухначевым [1, 2].

Сопоставление результатов исследования с численными решениями известных уравнений. Проведем сравнение результатов численных расчетов уравнений (1), (2) и системы уравнений (3,4). Численные решения получены с помощью комбинации метода прямых, конечных разностей и Рунге-Кутты 4-го порядка точности [4]. Сравнения результатов решения уравнений (1), (2) и системы уравнений (3,4) представлены на рисунке 1 для четвертой четверти угловой координаты при вращении цилиндра против часовой стрелки.

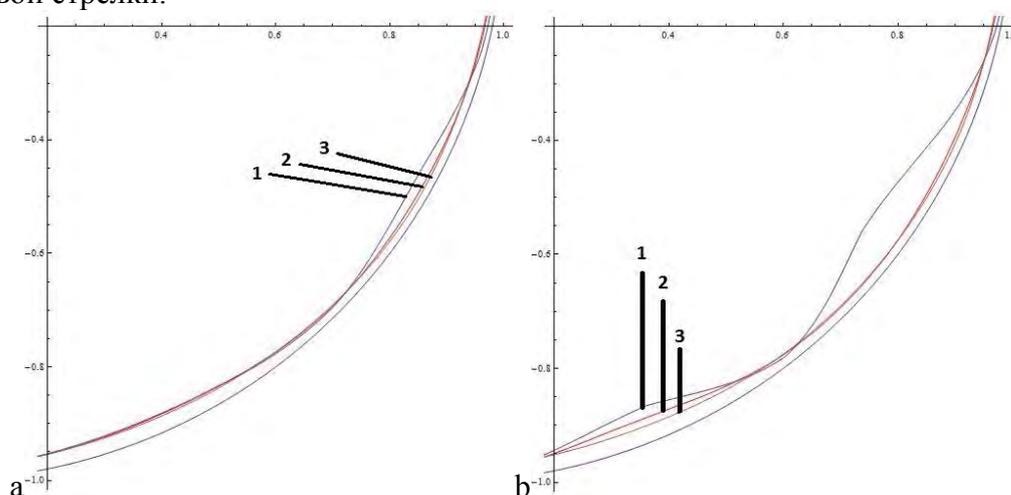


Рис. 1. Формы свободной поверхности в четвертой четверти при $\delta_0=0,0126$, $\text{Re}=62,5$, $\text{Fr}=0,009$, $\text{We}=5,86$, где 1 – решение уравнения (2), 2 – (1) и 3 – системы (3,4) в моменты времени а – $\tau=1,32$, б $\tau=1,45$

Решение уравнения (2) имеет два возмущения поверхности слоя, которые быстро растут со временем, в отличие от остальных решений. Это является следствием наличия четвертой производной в уравнении (2). В решениях уравнения Моффата (1) наблюдается большее возмущение поверхности, чем при решении задачи (3,4) вследствие того, что в системе уравнений учтена сила поверхностного натяжения, стремящаяся привести поверхность слоя к постоянной величине.

На рисунке 2 показаны части возмущенных поверхностей слоя, полученные с использованием различных моделей при одинаковых начальных условиях, если в начале движения толщина слоя была постоянной и равной δ_0 . Исследования показали, что в случае решения системы (3,4) наблюдаются наименьшие отклонения свободной поверхности от первоначального ввиду учета стабилизирующего влияния инерционных сил и сил поверхностного натяжения. Наибольшие возмущения получаются при расчете по уравнениям (1), в которых не учтено влияние вышеупомянутых сил, и слой под действием силы тяжести значительно деформируется.

Численные решения уравнений (1), (2) и системы (3,4) позволяют проанализировать влияние силы инерции и поверхностного натяжения на динамику движения жидкости внутри цилиндра в поле центробежных сил.

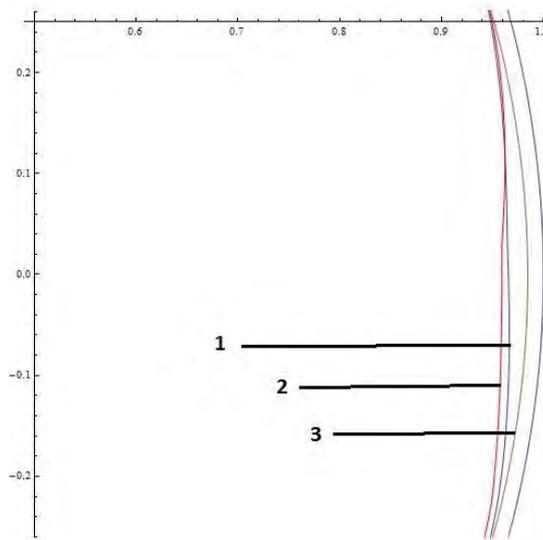


Рис. 2. Форма свободной поверхности при $\delta_0=0,0126$, $Re=167,8$, $Fr=0,065$, $We=42$, $\tau=5,52$, где 1 – решение уравнения (2), 2 – (1) и 3 – системы (3,4)

Сравнение результатов с известными экспериментальными исследованиями.

Проверим адекватность предложенной гидродинамической модели экспериментальным исследованиям, проведенных авторами работы [3]. В этой работе описаны опытные исследования поведения жидкости внутри горизонтального вращающегося цилиндра в зависимости от угловых скоростей вращения и объемного заполнения. Наблюдалось разнообразие волновых явлений. Эксперименты проводились для растворов глицерина плотности $1,22 \text{ кг/м}^3$, динамической вязкости $\mu=0,088 \text{ Н с/м}^2$ в цилиндре радиуса $6,25 \text{ см}$. Заполнение жидкостью цилиндра составляло по объему от 1% до 30%.

В работе [3] представлены и описаны различные виды режимов движения жидкости в цилиндре для различных скоростей вращения цилиндра ω в оборотах в секунду и объемного заполнения η в процентах, а именно:

- большая часть жидкости находится в нижней части цилиндра и нет возмущений;
- силы инерции начинают поднимать жидкость и возникают возмущения;
- наблюдается стационарное возмущение в четвёртой четверти при вращении против часовой стрелки;
- наблюдается равномерный слой жидкости на цилиндре;
- виден неравномерный слой жидкости, происходит поднятие капли и провисание;
- видны слабые возмущения в нижней части цилиндра.

Используя экспериментальные данные скоростей вращения цилиндра и объемного заполнения из [3], построим виды поверхностей слоев для различных режимов движения жидкости, решая систему уравнений эволюции (3,4). Проведем сопоставление результатов с описанными экспериментальными данными.

Результаты численных исследований приведены на рисунках 3. На подрисуночных подписях указаны характерные свойства поверхностей слоев в данные моменты времени при фиксированном объемном заполнении цилиндра.

Сравнение полученных видов поверхностей с их экспериментальным описанием в [3] дает хорошее согласование и говорит о верности рассмотренной гидродинамической модели течения слоя произвольной в том числе и немалой толщины с учетом сил инерции и поверхностного натяжения.

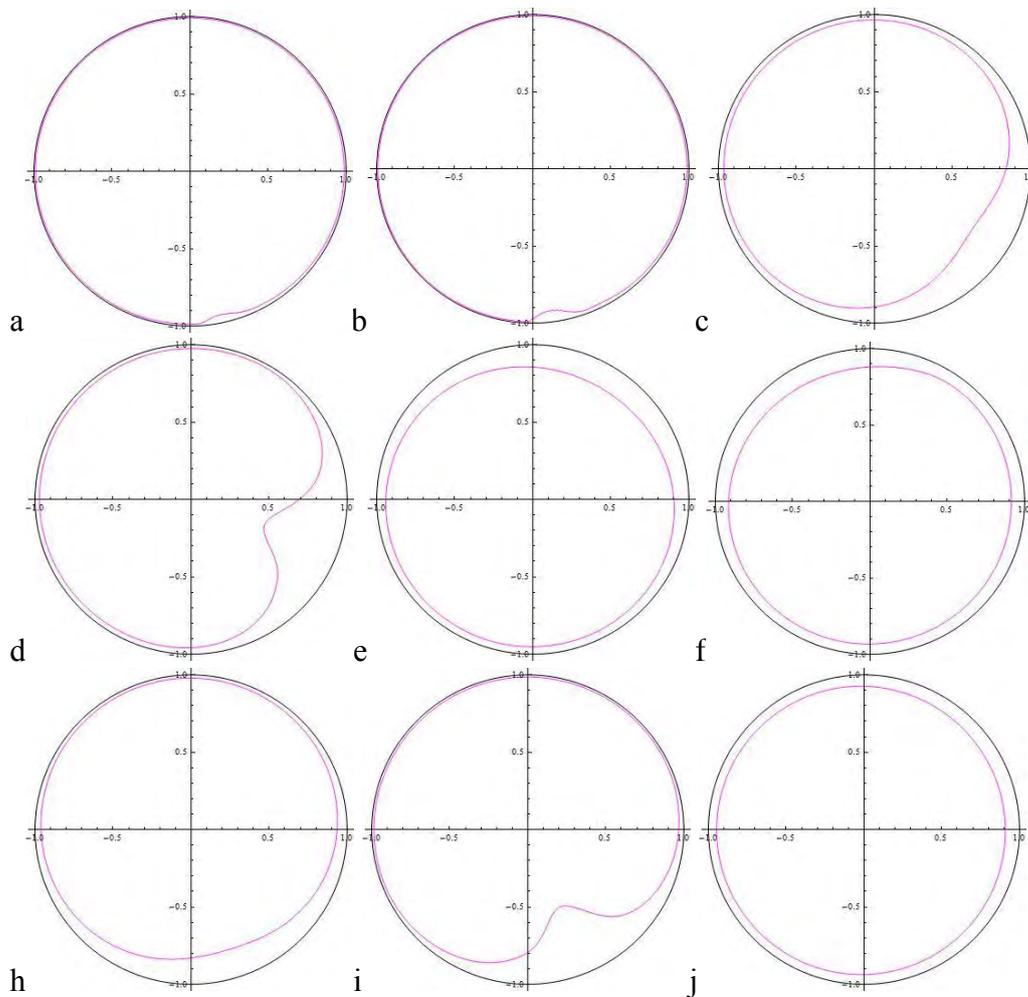


Рис. 3. Виды поверхностей. *a, b* – слабые возмущения в нижней части цилиндра при $\eta=2,5\%$ и $\omega=0,19$ об/с: *a* - $\tau=2,5$, *b* - $\tau=4,6$; *c, d* – поднятие жидкости и провисание капли при $\eta=16,5\%$ и $\omega=1,5$ об/с: *a* - $\tau=1,4$, *b* - $\tau=2$; *e, f* – неравномерный слой жидкости при $\eta=16,5\%$ и $\omega=4,19$ об/с: *a* - $\tau=4,1$, *b* - $\tau=14,1$; *h, i* – силы инерции начинают поднимать жидкость и возникают возмущения при $\eta=13,5\%$ и $\omega=0,5$ об/с: *a* - $\tau=0,4$, *b* - $\tau=0,6$; *j* – равномерный слой жидкости вращается вместе с цилиндром, $\eta=13,5\%$ и $\omega=5,5$ об/с при любом τ .

Закключение. В результате исследований проведен анализ уравнений эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Показано, что при пренебрежении инерционными членами из системы (3,4) выводятся уравнения Пухначева для тонкой пленки. Проведено сравнение результатов численного решения системы (3,4) с решениями уравнений Моффата и Пухначёва. Различия в результатах численных исследований обусловлено неучетом влияния инерционных сил в работах [1,2]. Сравнение полученных результатов по видам поверхностей с их экспериментальным описанием в [3] дает хорошее согласование и говорит о верности рассмотренной гидродинамической модели течения слоя произвольной толщины с учетом сил инерции и поверхностного натяжения.

Результаты работы могут быть использованы при расчетах реальных течений, используемых в различных технологических устройствах в промышленности, в частности при выборе оптимальных режимов вращения центрифуг в вопросах центробежного литья.

РЕЗЮМЕ

Проведен анализ уравнений эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Проведено сравнение результатов численного решения системы с решениями уравнений Моффата и Пухначёва. Сравнение получен-

ных результатов по видам поверхностей с их экспериментальным описанием дает хорошее согласование. Результаты работы могут быть использованы при выборе оптимальных режимов вращения центрифуг в вопросах центробежного литья.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moffat, H.K. Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder /H.K. Moffat // *Jornal de Mehanique*. –1977. –V. 16, № 8. –P. 651-673.
2. Пухначев, В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести / В.В. Пухначев // *ПМТФ*. – 1977. – № 3. – С. 78-88.
3. Thoroddsen, S.T. Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder / S.T. Thoroddsen, L.Mahadevan // *Experiments in Fluids* – 1997. – №.23 – С.1-13.
4. Конон, П.Н. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки. /П.Н. Конон, А.В. Жук // *Механика машин, механизмов и материалов*. Минск. - 2013.- №4 (25) – С. 32-37.
5. Конон, П.Н. Уравнения эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра /П.Н. Конон, А.В. Жук // *Теоретическая и прикладная механика: междунар.науч.-техн. журн.*, Минск: БНТУ, 2015, Вып..30, С. 155-160.
6. Жук, А.В. Волновое движение и распад слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра./ А.В. Жук, П.Н. Конон, В.Я. Шкадов // *Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике*, Новосибирск, 2015. –С.109.

SUMMARY

The analysis of the evolution equations of viscous liquid layer on the inner surface of a rotating cylinder was carried out. The results of the numerical solutions for evolution system, Moffat equation and Puhnachev equation were compared. Comparison of the numerical results with experimental data shows a good match by type of motion. The results can be used in various technological devices in industry, particularly for choice of optimal regimes of rotation in matters of centrifugal casting.

E-mail: andreizhukv@ya.ru
konon@tut.by

Поступила в редакцию 13.12.2014