УДК 681.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ-СЕРРЕ ДЛЯ СИНТЕЗА КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

к.т.н. **Анципорович П.П.**, к.т.н. **Акулич В.К.**, к.т.н. **Дубовская Е.М.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Основное условие для определения минимального радиуса-вектора r_0 профиля кулачка в механизме с плоским (тарельчатым) толкателем (рис. 1) состоит в том, что профиль кулачка должен быть выпуклым [1]. Математически это условие выражается в том, что радиус кривизны профиля кулачка во всех точках должен быть положительным, т. е. $\rho > 0$. На основании плана аналогов ускорений для так называемого заменяющего рычажного механизма, который получается путем условной замены высшей пары кулачок – толкатель фиктивным звеном, входящим в две низшие пары, требование $\rho > 0$ может быть представлено в виде [1]

$$r_0 > -\left(S + \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right), \tag{1}$$

где S – перемещение толкателя, $\frac{d^2 S}{d\varphi^2}$ – аналог ускорения толкателя.

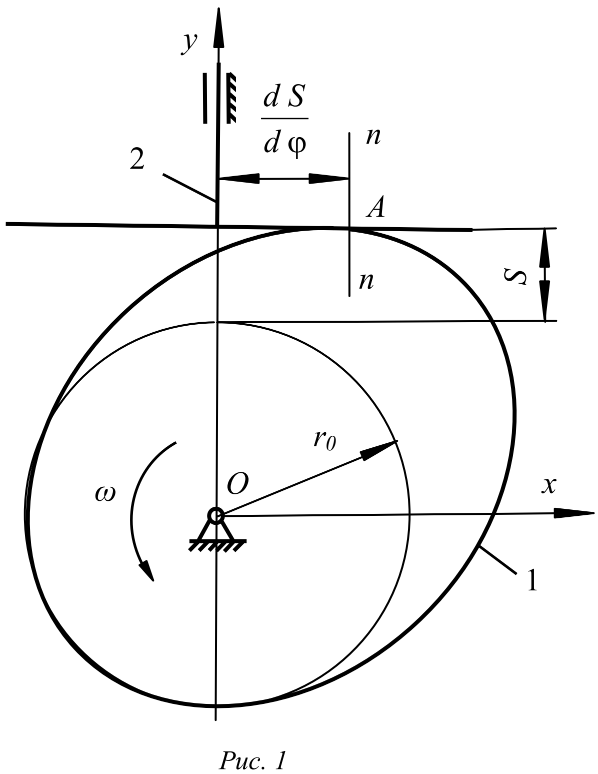

Рис. 1

В соответствии с выражением (1) графическим или аналитическим методом определяется величина r_0 .

Неравенство (1) может быть получено без использования заменяющего механизма на основании второй формулы Френе-Серре, известной из дифференциальной геометрии [2]:

$$\frac{d\bar{n}}{dS} = -\kappa \frac{d\bar{r}}{dS}, \tag{2}$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к кривой, κ – кривизна плоской кривой, $\bar{r} = \bar{r}(S)$ – уравнение кривой.

Используя кинематическую интерпретацию формулы (2), предложенную Ф.Л. Литвиным [3], эту формулу можно представить в виде

$$\dot{\bar{n}}_r = -\kappa \bar{V}_r, \tag{3}$$

где $\dot{\bar{n}}_r = \dfrac{d\bar{n}_r}{dt}$ – скорость конца орта нормали при движении точки по кривой, $\bar{V}_r = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ – скорость точки кривой.

Рассматривая движение точки касания A кулачка и толкателя как сложное движение, которое складывается из переносного движения вместе с подвижным звеном со скоростью $\bar{V}_e$ и относительного движения по самому звену со скоростью $\bar{V}_r$, абсолютную скорость точки касания $\bar{V}$ можно записать в виде $\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r$,

откуда

$$\bar{V}_r = \bar{V} - \bar{V}_e, \tag{4}$$

Аналогичным образом можно представить скорость конца орта общей нормали в точке касания:

$$\dot{\bar{n}} = \dot{\bar{n}}_e + \dot{\bar{n}}_r.$$

Так как направление нормали не изменяется, то $\dot{\bar{n}} = 0$ и $\dot{\bar{n}}_e = -\dot{\bar{n}}_r$.

Скорость конца орта нормали в переносном движении (во вращении вместе с кулачком) имеет вид

$$\dot{\bar{n}}_e = \bar{\omega} \times \bar{n} = \omega \bar{i}, \tag{5}$$

где $\bar{\omega}$ – угловая скорость кулачка. С учетом (5)

$$\dot{\bar{n}}_r = -\bar{\omega} \times \bar{n} = -\omega \bar{i}. \tag{6}$$

Известно, что положение точки касания кулачка и толкателя в неподвижном пространстве определяется координатами $x = \dfrac{dS}{d\varphi}$, $y = r_0 + S$ или радиусом-вектором

$$\bar{r}_A = \frac{dS}{d\varphi}\bar{i} + (r_0 + S)\bar{j}. \tag{7}$$

Поэтому

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \omega\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\bar{i} + \frac{dS}{d\varphi}\bar{j}\right), \tag{8}$$

$$V_e = \overline{\omega} \times \bar{r}_A = -\omega \left[\left(r_0 + S \right) \bar{i} - \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \bar{j} \right], \qquad (9)$$

Используя выражения (4), (8), (9), получим

$$\overline{V}_r = \omega \left[\left(r_0 + S \right) + \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right] \bar{i} \,, \qquad (10)$$

После подстановки выражений (6) и (10) в формулу (3) она примет вид

$$\kappa = \frac{1}{r_0 + S + \dfrac{d^2 S}{d\varphi^2}} \,. \qquad (11)$$

Так как условие выпуклости профиля кулачка удовлетворяется, если $\rho > 0$ (или $\kappa = \frac{1}{\rho} > 0$), то из соотношения (11) имеем неравенство

$$r_0 + S + \frac{d^2 S}{d\varphi^2} > 0,$$

что совпадает с выражением (1).

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена анализу сравнения графического и аналитического методов определения минимального радиуса кулачка в механизме с плоским толкателем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – 4 - е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1988. – 640 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1973. – 832 с.
3. Литвин, Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1968. – 584 с.

SUMMARY

This article is devoted to the analysis of comparison of graphic and analytical methods of definition of the minimal radius of the cam in the mechanism with a flat pusher.

E-mail: tmm@bntu.by

Поступила в редакцию 11.10.2015