

## ПРОЩЕЛКИВАНИЕ ФЕРМЫ МИЗЕСА ИЗ РЕОНОМНОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

к.т.н. Холодарь Б.Г.

*УО «Брестский государственный технический университет», Брест*

Ферма Мизеса [1] представляет собой конструкцию из двух одинаковых шарнирно-закрепленных стержней, соединенных между собой шарниром и нагруженных силой, ориентированной вдоль оси симметрии конструкции (рис.1). Решение задачи в предположении неограниченных линейно-упругих деформаций материала дает связь между силой и углом поворота стержней  $\varphi$  в виде

$$P = 2AE(\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}^{-1}\varphi - 1)\text{Sin}\varphi,$$

где  $A$  – площадь сечения стержней,  $E$  – модуль упругости материала,  $\alpha = \text{arctg}(a/b)$  – угол наклона стержней в исходном состоянии конструкции. Зависимость  $P(\varphi)$  приведена на рис.1. Ее можно реализовать в жестком режиме воздействия, когда нагружение системы задается смещением точки  $D$ . В режиме воздействия на точку  $D$  возрастающей сжимающей силой проявляется особенность поведения системы в виде перехода от одной равновесной конфигурации к другой путем прощелкивания (на кривой  $P(\varphi)$  представляется переходом из точки  $A$  в точку  $C$ ). Точкам  $A, B, C$  соответствуют углы  $\varphi_A \approx 27^\circ$ ,  $\varphi_B \approx 27^\circ$ ,  $\varphi_C \approx 51^\circ$ . Возможность потери устойчивости стержней по Эйлеру из рассмотрения исключается.

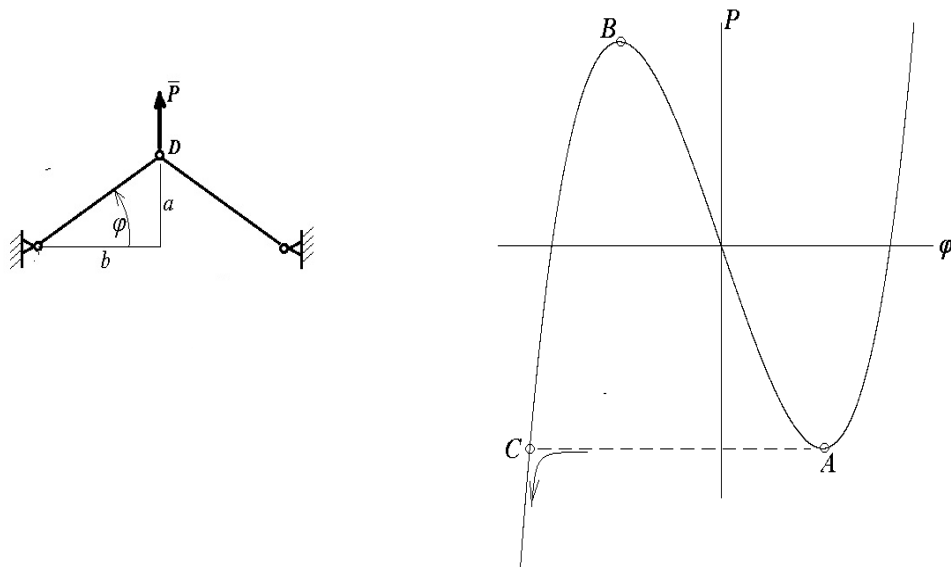


Рис. 1. Расчетная схема фермы и зависимость  $P(\varphi)$

Далее рассматривается подобная же конструкция, в которой материал стержней принят реономным, а его поведение описывается уравнением Максвелла с нелинейной вязкостью

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

где  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  – деформация и напряжение,  $E$  – модуль упругости,  $\eta$  – вязкость материала. Для вязкости использовано представление

$$\eta = \eta_0 \exp(U_0 - \alpha \cdot \sigma + \beta(1 - (1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{III}}{\varepsilon_B})^m) \sigma),$$

где  $\eta_0$ ,  $U_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – структурные параметры материала, причем  $\eta_0 = 2.4e-8$ ,  $U_0 = 30.6$ ,  $\alpha = 5.8e-3$ ,  $\beta = 3.2e-3$ ,  $\varepsilon_{III} = 0.015$  – деформация конца площадки текучести,  $\varepsilon_B$  – деформация, соответствующая пределу прочности,  $E = 2.2 \cdot 10^5$  МПа. Числовые данные при  $\varepsilon_B = 0.34$  и  $V_\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-1}$  соответствуют материалу сталь 20 при нормальных условиях. Расчетные диаграммы растяжения при  $\varepsilon_B = 1.0$  приведены на рис.2 для двух режимов – с постоянной скоростью деформирования  $V_\varepsilon$  и с постоянной скоростью нагружения  $V_\sigma = E \cdot V_\varepsilon$  при  $V_\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-1}$ , что соответствует интервалу стандартных скоростей испытаний образцов. Одним из достоинств используемого уравнения является описание разгрузки без нарушения непрерывности кривой  $\sigma(\varepsilon)$ . В качестве примера на рис.2 показана расчетная циклическая диаграмма нагружения данного материала при изменении деформации по закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \text{Sin}(\pi t/T_0)$ , где  $\varepsilon_0 = \varepsilon_B/4$ ,  $T_0 = 100$ .

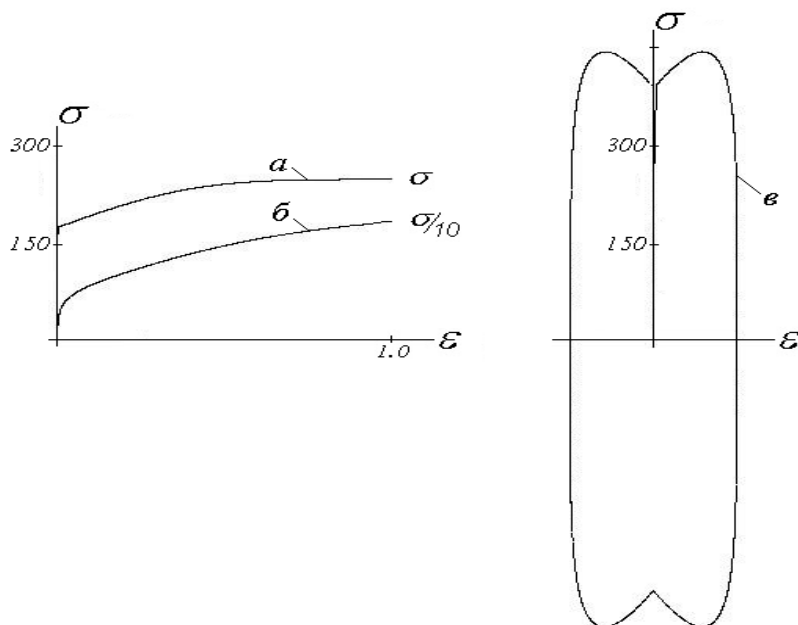


Рис. 2. Диаграммы растяжения материала в режиме  $V_\varepsilon = \text{const}$  (а),  $V_\sigma = \text{const}$  (б) и диаграмма циклического деформирования (в)

Для рассматриваемой задачи напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$  стержней определяются выражениями

$$\sigma = \frac{P}{2A \text{Sin} \varphi}, \quad \varepsilon = \frac{\text{Cos} \alpha}{\text{Cos} \varphi} - 1 \quad (1)$$

Подставив значения скоростей  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\sigma}$  в уравнение Максвелла, получим разрешающее уравнение задачи

$$\dot{P} = P \left( \frac{\dot{\varphi}}{\text{tg} \varphi} - \frac{E}{\eta} \right) + 2AE \text{Cos} \alpha \cdot \text{tg}^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad (2)$$

где  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость вращения стержней.

Геометрические параметры конструкции приняты равными:  $A=1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $a=1 \text{ м}$ ,  $b=1 \text{ м}$ . Вычисления проведены при  $\varepsilon_B=1.0$  с тем, чтобы значение  $\varepsilon_B$  значительно перекрывало уровень максимальной деформации  $\varepsilon \approx 0.29$ , которая для принятой геометрии возникает в стержнях при угле  $\varphi=0$ .

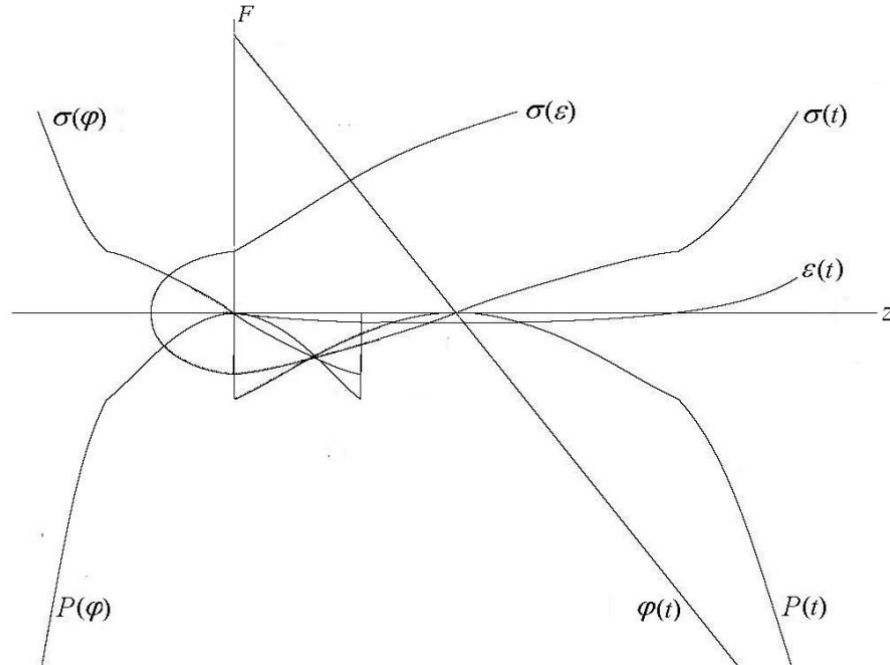


Рис. 3. Характер изменения параметров системы в режиме  $V_{\varphi} = \text{const}$ .  $F$  – рассматриваемые функции ( $P$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ),  $z$  – их аргументы ( $t$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ )

На рис.3 показаны кривые, характеризующие поведение рассматриваемой конструкции в режиме нагружения  $\dot{\varphi} = V_{\varphi} = \text{const}$ . Как видим, особенностью поведения системы сравнительно с системой из линейно-упругого материала является отсутствие изменения направления силового воздействия, что объясняется реономностью материала и малым уровнем реализующихся упругих деформаций. При варьировании в определенных, достаточно широких, пределах используемых расчетных параметров материала и геометрии системы картина остается аналогичной.

Условие  $V_p = dP/dt = \text{const}$  требует сохранения знака силового воздействия  $P(t)$  и поэтому не соответствует уравнениям (1)-(2) на интервале  $AC$  кривой  $P(\varphi)$ , в связи с чем в решении возникает необходимость искусственного перевода изображающей точки в положение  $C$ . При этом зависимость напряжений от деформаций становится неопределенной. В отличие от предыдущего случая  $V_{\varphi} = \text{const}$  в данном режиме реализуются значительно более высокие уровни напряжений, что в целом соответствует ходу кривых  $\sigma(\varepsilon)$  на диаграммах растяжения образцов (рис.2) при одинаковых деформациях.

Во избежание возникающих противоречивостей в решении имеет смысл уточнить постановку задачи, приняв во внимание силы инерции стержней.

Используя принцип Даламбера-Лагранжа, можно получить дифференциальное уравнение движения системы в виде

$$\left( \frac{P}{2} - A\sigma \sin \varphi \right) - \frac{ML_0 \cos \alpha}{3 \cos^2 \varphi} (2 \operatorname{tg} \varphi (1 + \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}) = 0 \quad (3)$$

где  $M$  – масса одного стержня,  $L_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$  – его исходная длина,  $\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение стержней. При выводе уравнения (3) вращение стержней относительно точек крепления принималось за переносное движение, а смещение точек стержней за счет осевой деформации рассматривалось как относительное. Осевая деформация принята одинаковой по длине стержня (приближение, соответствующее методу приведения в теории продольных колебаний стержня), что для рассматриваемой задачи эквивалентно, в частности, допущению о малости продольных сил инерции сравнительно с реактивной силой в опоре. При составлении уравнения координаты точек принимались с учетом деформации стержня, так что, например, его текущая длина составляла  $L = L_0(1 + \varepsilon)$ . Весовая нагрузка стержней в уравнении не учитывалась.

Дополнив (3) уравнением течения материала в форме

$$\frac{d\sigma}{dt} = E\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\eta}\right),$$

получим разрешающие уравнения задачи. Само решение производится численно (метод Рунге-Кутты).

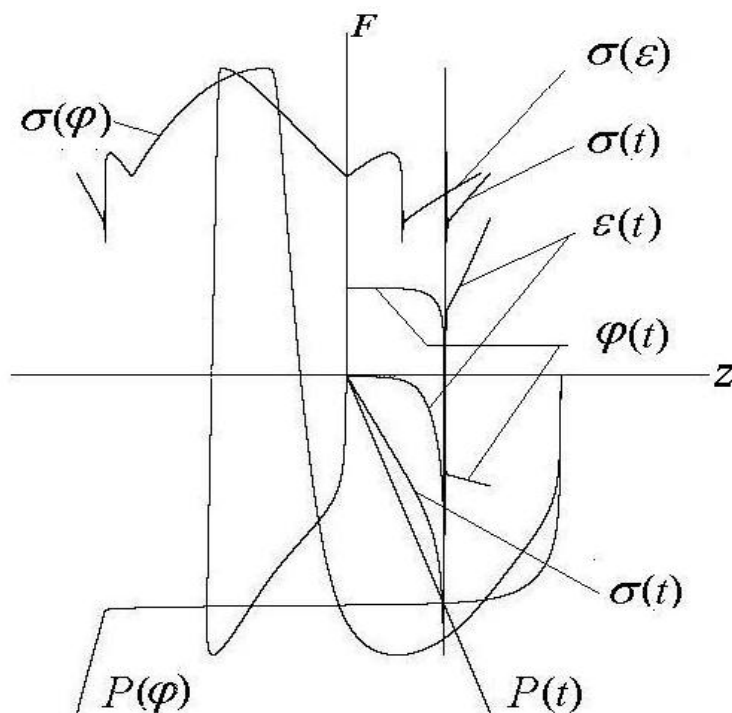


Рис. 4. Характер изменения параметров системы в режиме  $V_p = const$ .  $F$  – рассматриваемые функции ( $P, \sigma, \varepsilon, \varphi$ ),  $z$  – их аргументы ( $t, \varepsilon, \varphi$ )

При использованных числовых характеристиках системы режим  $V_\varphi = const$  сравнительно со статическим подходом реализуется без особенностей (фактически все параметры соответствуют рис.3). В режиме  $V_p = const$  учет инерционных нагрузок качественно изменяет поведение системы – прощелкивание при верхней критической нагрузке и перескок на возрастающую ветвь кривой  $P(\varphi)$  происходит естественным образом за счет наличия кинетической энергии стержней и потенциальной энергии деформаций сжатия. Максимальная угловая скорость возникает при угле  $\varphi \approx 12.4^\circ$ , максимальное ускорение (с учетом знаков) – при углах  $\varphi \approx 0.31^\circ$  и  $\varphi \approx 25.5^\circ$  (рис.4). Хотя максимумы ускорений разделены по углу промежутком в  $25^\circ$ , по времени это занимает тысячные

доли секунды (в условиях наших исходных данных). Поэтому наряду с большими центробежными усилиями возникают и большие перерезывающие силы в стержнях, которые не фигурируют в рассмотренных постановках задачи. Таким образом, дальнейшие уточнения требуют учета волновых процессов в стержнях через динамические уравнения движения материала [2]. Отметим также, что значительное изменение массы стержней может поменять направление необходимого силового воздействия на участке траектории точки  $D$  (случай  $V_{\varphi} = const$ ).

### РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрено поведение фермы Мизеса из реономного упруго-пластического материала с учетом сил инерции стержней.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова.— М., Наука, 1967. - 420с.
2. Холодарь, Б.Г. Описание поведения реономного упруго-пластического материала при скоростном и ударном нагружении / Б.Г. Холодарь. Стр. 567-595. Глава 24 в книге “Перспективные технологии”/ Под редакцией В.В. Клубовича – Витебск: Изд-во УО “ВГТУ”, 2011. -599с.

### SUMMARY

*The snapthrough behavior of the von Mises truss made of a rheonomic elastic-plastic material is investigated taking into account rod inertial forces.*

**E-mail:** [hbg@list.ru](mailto:hbg@list.ru)

Поступила в редакцию 15.10.2015