

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

к.т.н. Горбач Н.И., Кадышина А.В.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

**Введение.** Механическая система, состоящая из ползуна, который может перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности, невесомого нерастяжимого стержня, соединенного идеальным шарниром с ползуном (или невесомой нерастяжимой нити) и шарика (точечного груза), закрепленного на втором конце стержня, называется эллиптическим маятником.

Эта система названа так в силу того, что, будучи выведенной из состояния равновесия, шарик при дальнейшем движении описывает траекторию, которая является частью соответствующего эллипса.

Теоретические исследования движения такой системы не представляют особого научного интереса, но имеют большое практическое значение в учебном процессе при изучении таких тем курса теоретической механики как уравнения Лагранжа второго рода, циклические координаты и циклические интегралы, законы сохранения движения центра масс и количества движения механической системы и многих других.

Безусловно, не без учета этого данная задача приведена в сборнике задач по теоретической механике [1], а ее решение дано в практикуме [2]. Более того некоторые исследования движения эллиптического маятника приведены в учебнике [3] при решении одного из примеров с использованием уравнения Лагранжа для консервативных систем.

Результаты указанных выше решений подтверждают колебательный характер движения данной системы и для случая малых колебаний определены частота и период колебаний, а также уравнения движения ползуна и шарика для одного частного случая [3].

В свою очередь непонятно почему автор работ [4, 5] не признал эти результаты и привел свое решение, которое является глубоко ошибочным и не соответствует колебательному характеру очевидного движения такой системы.

В связи с этим считаем необходимым привести исследования движения эллиптического маятника при различных начальных условиях, дать обоснование движения системы (с точки зрения законов сохранения движения центра масс и количества движения механической системы), найти закон движения и уравнение траектории шарика и так же закон движения ползуна.

Обозначим массу ползуна  $m_1$ , массу шарика –  $m_2$ , длину стержня (нити) –  $l$ .

Выберем начало координат неподвижной системы осей  $XOY$  в равновесном положении маятника, изобразив его в некотором произвольном положении (рис. 1). Свяжем с ползуном подвижную систему координатных осей  $X_1AY_1$ . Покажем на расчетной схеме действующие на маятник внешние силы – силы тяжести  $m_1\bar{g}$  и  $m_2\bar{g}$  ползуна и шарика и нормальную реакцию  $\bar{N}$  опорной плоскости.

Данная механическая система имеет две степени свободы. Поэтому ее положение будем определять с помощью двух обобщенных координат – углом  $\varphi$  поворота стержня и перемещением  $x$  ползуна.

Исследуем движение системы при двух разных начальных условиях движения. Первое условие: при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ ;  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ; второе – при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0 = 0$ ;  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ .

Таким образом, выводя из положения равновесия шарик (стержень), приводим в движение систему. В дальнейшем под действием силы тяжести шарик будет стремиться возвратиться в положение устойчивого равновесия, что в свою очередь приведет в движение ползун.

**Обоснование движения системы с помощью законов сохранения движения центра масс и количества движения системы.** Рассмотрим сначала движение системы с учетом начальных условий движения  $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ ;  $\dot{\varphi}_0 = 0$  при  $t = 0$  (рис. 1).

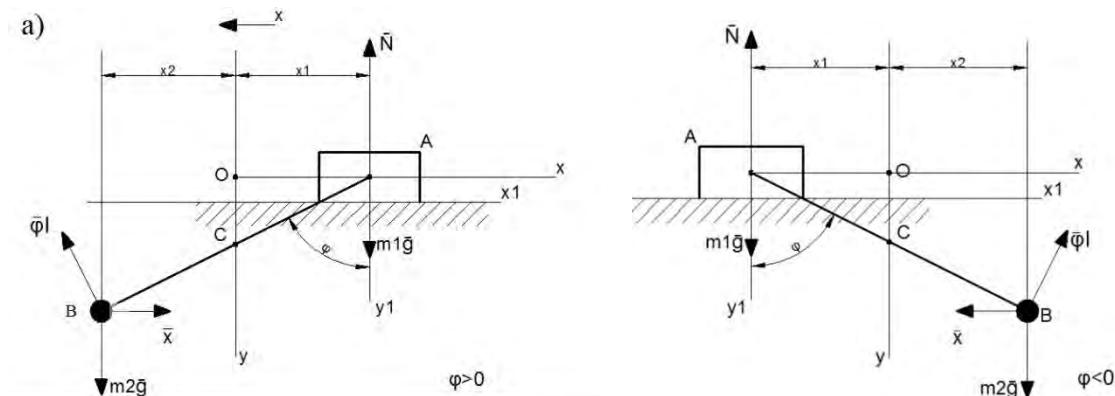


Рис.1

На основании теоремы о движении центра масс системы в проекции на ось  $x$  имеем,  $M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const$  так как в положении равновесия система находилась в покое, то  $\dot{x}_{oC} = 0$ . Следовательно, когда система будет приведена в движение, то  $\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0 \Rightarrow x_C = const$ , т.е. центр масс системы не будет перемещаться вдоль оси  $X$ , а будет находиться на оси  $Y$  и тогда  $x_C = 0$ .

Координата центра масс определяется по формуле

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Для того, чтобы выражение (1) было равно нулю, слагаемые в числителе должны быть разного знака и равны по величине. Это значит, что если стержень  $AB$  будет от положения равновесия отклонен на угол  $\varphi$  вправо, ползун  $A$  переместится влево (рис. 1б) и, наоборот, при отклонении стержня влево ползун переместится вправо (рис. 1а), а одна из координат будет отрицательной.

Теперь рассмотрим движение системы при втором начальном условии, т.е. при условии, что система выводится из состояния равновесия, когда  $\varphi = 0$  сообщением шарика (стержню) некоторой угловой скорости  $\dot{\varphi}_0$ , отклоняя стержень вправо (рис. 2).

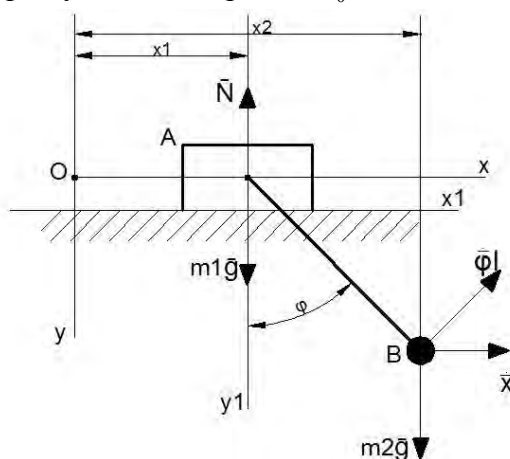


Рис. 2

Применяя теорему о движении центра масс или теорему об изменении количества движения механической системы в проекции на ось  $X$

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const \text{ или } \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0 \Rightarrow Q_x = M\dot{x}_C = const$$

устанавливаем, что центр масс системы будет двигаться с некоторой постоянной скоростью такой, какой она была в начальный момент (в момент сообщения стержню угловой скорости  $\dot{\varphi}_0$ ). Для определения начальной скорости центра масс запишем выражение для координаты центра масс системы в произвольном ее положении и продифференцируем по времени полученное выражение

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 + l \sin \varphi)}{m_1 + m_2},$$

$$\dot{x}_C = \frac{(m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Начальная скорость движения центра масс при  $t = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_{1C} = 0, \varphi = \varphi_0 = 0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$

$$\dot{x}_{0C} = \frac{m_2 l \dot{\varphi}_0}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

С такой скоростью и будет перемещаться центр масс системы при ее дальнейшем движении.

**Определение уравнения траектории шарика и уравнения движения ползуна.** Рассмотрим решение этой задачи с учетом первого начального условия.

Координаты шарика в осях  $XOY$  (рис. 1) и для случая а)

$$x_2 = -(l - AC) \sin \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi,$$

для случая б)

$$x_2 = (l - AC) \sin \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi.$$

Расстояние  $AC$  точки  $A$  до центра масс  $C$  системы

$$AC = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Тогда координаты шарика для случая а)

$$x_2 = -\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi \quad (4)$$

для случая б)

$$x_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi \quad (4')$$

Исключив из уравнений (4) или (4')  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , получим уравнение эллипса в координатной форме

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

где полуоси эллипса  $a = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}, b = l$ .

Центр эллипса находится в начале координат (в точке  $O$ ). Траекторией шарика является часть этого эллипса в пределах размаха колебаний шарика.

Для определения уравнения движения ползуна запишем выражение для координаты центра масс системы.

Для случая а)

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 (x_1 - l \sin \varphi)}{m_1 + m_2} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi \quad (6)$$

Для случая б)

$$x_c = \frac{m_1 (-x_1) + m_2 (l \sin \varphi - x_1)}{m_1 + m_2} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение движения ползуна, независит от того, в какую сторону от положения равновесия отклоняется стержень (шарик) на угол  $\varphi$ .

Так как уравнение (6) или (7) определяет и координату положения ползуна в осях  $XOY$ , которая может быть как положительной, так и отрицательной, то знак координаты будет определяться углом  $\varphi$ , который также может быть как положительный, так и отрицательный, а  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ , то в этом случае  $x_1 < 0$ , т.е. координата будет со знаком минус, что соответствует случаю б).

Найдем уравнение траектории шарика и закон движения ползуна с учетом второго начального условия движения.

Координаты шарика в осях  $XOY$  (рис. 2)

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi$$

Предварительно определим для этого случая закон движения ползуна в функции угла  $\varphi$ .

Так как  $\dot{x}_c = const$ , то приравняем выражение (2) и (3) и определим скорость  $\dot{x}_1$  движения ползуна

$$\dot{x}_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi} \cos \varphi). \quad (8)$$

Заменим  $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$ , подставим в (8), разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение

$$dx_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}_0 dt - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi} dt \cos \varphi, \quad (9)$$

где  $\dot{\varphi} dt = d\varphi$ .

После интегрирования при  $t = 0$   $x_1 = x_{10} = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$  и некоторых преобразований получим уравнение движения ползуна

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\dot{\varphi}_0 t - \sin \varphi). \quad (10)$$

Тогда координаты шарика (или уравнения движения шарика в осях  $XOY$ ) с учетом (10)

$$x_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \dot{\varphi}_0 t - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \varphi; \quad (11)$$

$$y_2 = l \cos \varphi.$$

Выразив из (11)  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , затем возведя в квадрат и сложив, получим

$$\frac{\left(x_2 - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}_0 t\right)^2}{\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1. \quad (12)$$

Полученное выражение является уравнением эллипса в координатной форме.

Обозначим  $\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = a$ ;  $l = b$ ;  $\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}_0 t = c$ .

С учетом этого уравнение (12) можно представить в каноническом виде

$$\frac{(x_2 - c)^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Таким образом, и при втором начальном условии траекторией шарика является часть эллипса в пределах размаха колебаний стержня, полуоси  $a$  и  $b$  эллипса имеют такие же значения как и при первом начальном условии, но центр эллипса смещен от начала координат по оси  $X$  в положительном направлении на величину  $c$ , которая является функцией времени, т.е. центр эллипса с течением времени при движении системы изменяет свое положение, двигаясь со скоростью, с которой движется центр масс системы (3).

Уравнения движения ползуна и шарика можно вывести, составив и решив дифференциальные уравнения системы.

Для составления дифференциальных уравнений, описывающих движение системы, воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода для консервативной системы, с учетом принятых обобщенных координат в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}. \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы определяется по формуле

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (15)$$

В этой формуле  $v_1 = \dot{x}$  – скорость ползуна,  $v_2$  – абсолютная скорость шарика, который совершает сложное движение – переносное вместе с подвижной системой  $X_1 A Y_1$ , и относительное – движение относительно этой системы координат. Абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной  $\bar{v}_e$  и относительной  $\bar{v}_r$  скоростей.

Модуль переносной скорости  $v_e = \dot{x}$ , модуль относительной скорости  $v_e = \dot{\varphi} l$ . Направления векторов этих скоростей указаны на рис. 1.

Модуль абсолютной скорости определим по теореме косинусов

$$v_2^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(180^\circ - \varphi) = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi \quad (16)$$

или координатным способом через проекции на оси координат

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2,$$

где для случая а) (рис. 1) имеем

$$v_{2x} = \dot{x} - \dot{\varphi} l \cos \varphi; \quad v_{2y} = -\dot{\varphi} l \sin \varphi$$

тогда  $v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi$ ,

а для случая б)

$$v_{2x} = -\dot{x} + \dot{\varphi}l \cos \varphi; \quad v_{2y} = -\dot{\varphi}l \sin \varphi$$

$v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi$ , что совпадает в точности с выражением (16).

С учетом этого кинетическая энергия системы

$$T = \frac{(m_1 + m_2)\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\dot{\varphi}^2 l^2}{2} - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (17)$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -m_2 g l \cos \varphi \quad (18)$$

Для составления дифференциального уравнения движения ползуна выполним операции дифференцирования и полученные результаты подставим в уравнение Лагранжа (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

С учетом этого дифференциальное уравнение движения ползуна

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0 \quad (19)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[ (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \right]. \quad (19')$$

Получим уравнение движения шарика, выполнив аналогичные математические действия.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 \dot{\varphi} l^2 - m_2 l \dot{x} \cos \varphi; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x} \cos \varphi + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= m_2 g l \sin \varphi \end{aligned}$$

Полученные выражения подставим в (14). Тогда

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x} \cos \varphi + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi$$

После преобразований получим

$$l \ddot{\varphi} - \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) является дифференциальным уравнением движения шарика.

Будем рассматривать малые колебания (угол  $\varphi$  - малый). В этом случае

$$\cos \varphi = 1; \quad \sin \varphi = \varphi; \quad \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0$$

С учетом этого, уравнения (19) и (20) примут вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \quad (21)$$

$$l \ddot{\varphi} - \ddot{x} + g \varphi = 0 \quad (22)$$

Выразим из уравнения (21)  $\ddot{x} = \frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2}$  и подставим в (22)

$$l \ddot{\varphi} - \frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} + g \varphi = 0 \Rightarrow \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + g \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l} \varphi = 0. \quad (23)$$

Обозначим  $\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l} = k^2$ . Тогда уравнение (23) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 \quad (24)$$

Уравнение (24) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний шарика (стержня). Общее решение этого уравнения

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (25)$$

Продифференцируем по времени  $t$

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (26)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим с учетом начальных условий движения при  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ . Из (25) и (26) получим  $C_1 = \varphi_0$ ;  $C_2 = 0$

Тогда уравнение движения шарика

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt \quad (27)$$

где  $k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{g}{l}}$  - циклическая частота колебаний.

Период малых колебаний маятника

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{g}} \quad (28)$$

Амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия)

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{u^2}} = \varphi_0.$$

Определим закон движения ползуна, проинтегрировав уравнение (19'). Первый интеграл (циклический интеграл)

$$(m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C_3 \quad (29)$$

Заменим  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  и подставим в (29). Проинтегрировав полученные выражения, получим

$$(m_1 + m_2)x - m_2 l \sin \varphi = C_3 t + C_4 \quad (30)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определим сначала начальные значения  $\dot{x} = \dot{x}_1 = \dot{x}_{10}$  и  $x = x_1 = x_{10}$ , используя уравнение (4), продифференцировав его по времени

$$\dot{x}_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} l \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (31)$$

Так как при  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ , то из (4)  $x_{10} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi_0$ , а из (31)  $\dot{x}_{10} = 0$ .

С учетом этого из (29)  $C_3 = 0$ , а из (30)  $C_4 = 0$ .

Тогда закон движения ползуна

$$x_1 = x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \varphi,$$

что совпадает с полученным ранее выражением (4).

Так как рассматриваются малые колебания и принимается  $\sin \varphi = \varphi$ , то с учетом (27) закон движения ползуна

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cos kt. \quad (32)$$

Теперь определим закон движения ползуна и уравнение движения шарика (стержня), применив уравнения Лагранжа, с учетом второго начального условия.

В этом случае выражение для кинетической энергии будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}^2 l^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (33)$$

Выполнив необходимые операции дифференцирования и подставив полученные выражения в уравнения Лагранжа (13) и (14), составим дифференциальное уравнение движения ползуна

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0 \quad (34)$$

или

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi] = 0 \quad (34')$$

и уравнение движения шарика (стержня)

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (35)$$

В случае малых колебаний эти уравнения приобретают вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0. \quad (36)$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0. \quad (37)$$

Из уравнения (36) выразим

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2}.$$

Полученное выражение подставим в уравнение (37) и преобразуем, получим  $\ddot{\varphi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l} \varphi = 0$  или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 \quad (38)$$

где  $k^2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}$

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания шарика (стержня), в точности совпадает с полученным ранее уравнением для первого случая, т.е. не зависит от начальных условий движения.

Период колебаний маятника  $\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l}{g(m_1 + m_2)}}$  также не зависит от начальных условий движения. Общее решение уравнения (38)

$$\varphi = C_4 \cos kt + C_5 \sin kt$$

Продифференцируем по времени

$$\dot{\varphi} = -C_4 k \sin kt + C_5 k \cos kt$$



Постоянные интегрирования  $C_4$  и  $C_5$  с учетом начальных условий движения при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$

$$C_4 = 0; C_5 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$$

Окончательно уравнение движения стержня (шарика)

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (39)$$

Амплитуда колебаний

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}} = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

Амплитуда и уравнение движения отличаются от предыдущего случая, т.е. зависят от начальных условий движения.

Определим для этого случая уравнение движения ползуна.

Для этого проинтегрируем дважды уравнение (34'). Первый (циклический) интеграл

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = C_6 \quad (40)$$

Заменим  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  и подставим в (40). После интегрирования получим

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin \varphi = C_6 t + C_7 \quad (41)$$

Постоянные интегрирования  $C_6$  и  $C_7$  определим с учетом начальных условий движения  $x = x_1 = x_{10} = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_1 = \dot{x}_{10} = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$  при  $t = 0$ .

С учетом этих условий из уравнения (40)  $C_6 = m_2 l \dot{\varphi}_0$ , а из уравнения (41)  $C_7 = 0$ . Тогда закон движения ползуна

$$x_1 = x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} (\dot{\varphi}_0 t - \sin \varphi), \quad (42)$$

что в точности совпадает с уравнением (10), полученным выше другим способом.

Так как для малых колебаний  $\sin \varphi = \varphi$ , то с учетом уравнения (39) закон движения ползуна можно представить в другом виде

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left( \dot{\varphi}_0 t - \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \right) \quad (43)$$

Уравнение (43) можно также получить, если дважды продифференцировать по времени выражение (39) для угла  $\varphi$  и затем подставить в уравнение (36) и полученное уравнение дважды проинтегрировать при указанных выше начальных условиях движения.

Для наглядного представления полученных результатов исследования малых колебаний эллиптического маятника при разных начальных условиях рассмотрим числовые примеры.

Примем  $m_1 = 80g$ ,  $m_2 = 20g$ ,  $l = 20cm$ .

Тогда циклическая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{100}{80} \cdot \frac{9,8}{0,2}} = 7,82c^{-1}$$

Период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{7,82} = 0,8c$$

**Пример 1.** Определить значения  $\varphi$  и  $x_1$  за один период колебаний, т.е. за время  $t = \frac{2\pi}{k}$  с и построить графики  $\varphi = f_1(t)$  и  $x_1 = f_2(t)$  при  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} = 0,5236 \text{ рад}$ , используя уравнения  $\varphi = \varphi_0 \cos kt = 0,5236 \cos kt$ ,

$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi_0 \cos kt = \frac{20 \cdot 20}{100} \cdot 0,5236 \cos kt = 2,094 \cos kt = 4\varphi$ . Вычисления приведены в таблице 1.

Табл. 1. Результаты проведенных расчетов

$kt$ , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\varphi$ , рад	0,523	0,453	0,262	0	-0,262	-0,453	-0,523	-0,453	-0,262	0	0,262	0,453	0,525
град	30	26	15	0	-15	-26	-30	-26	-15	0	15	26	30
$x_1$ , см	2,09	1,81	1,05	0	-1,05	-1,81	-2,09	-1,81	-1,05	0	1,05	1,81	2,09

По результатам вычислений построены графики  $\varphi = f_1(t)$  и  $x_1 = f_2(t)$  (рис. 3, 4).

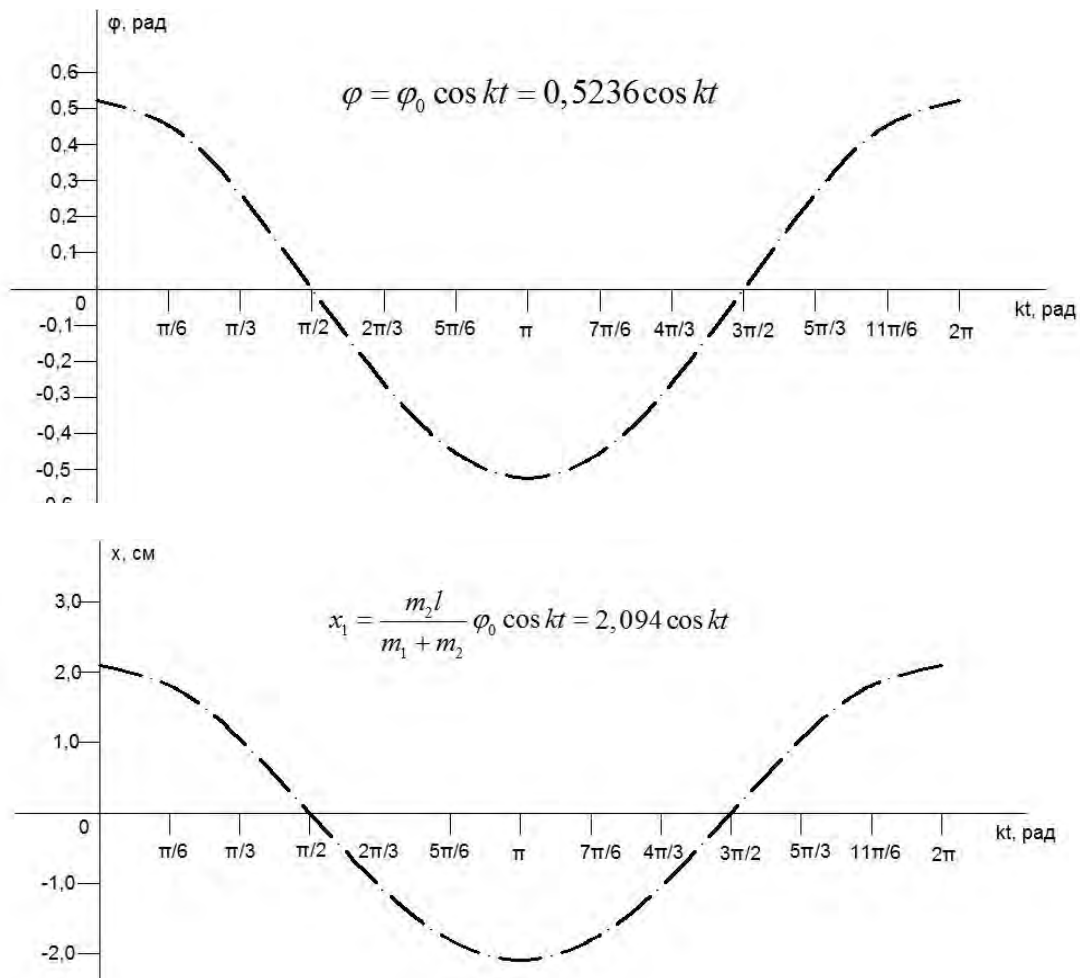


Рис. 3

**Пример 2.** Учитывая условия примера 1, определить значения  $\varphi$  и  $x_1$  и построить графики  $\varphi = f_1(t)$  и  $x_1 = f_2(t)$  при  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 4,09c^{-1}$ , используя уравнения

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt = \frac{4,09}{7,82} \sin kt \Rightarrow \varphi = 0,5236 \sin kt, \text{ рад},$$

$$x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left( \dot{\varphi}_0 t - \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt \right) = \\ = \frac{20 \cdot 20}{100} \cdot \left( 4,09t - \frac{4,09}{7,82} \sin kt \right) \Rightarrow x_1 = 16,36t - 2,094 \sin kt, \text{ см}.$$

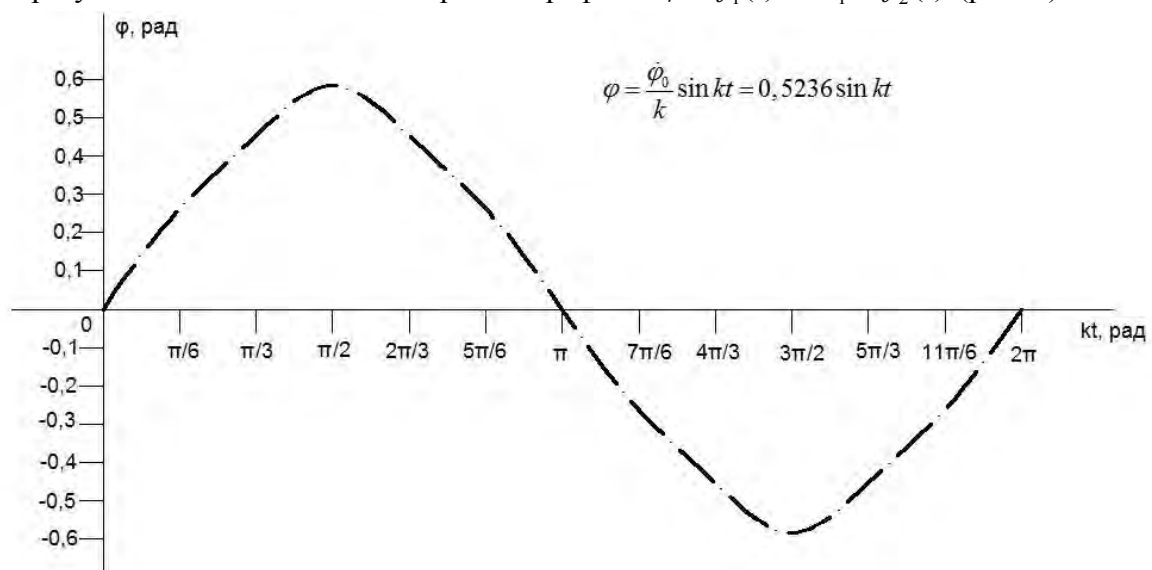
Примечание: значение  $\dot{\varphi}_0 = 4,09c^{-1}$  принято из условия, чтобы коэффициенты при  $\sin kt$  были такими, как при  $\cos kt$  в примере 1.

Вычисления приведены в таблице 2.

Табл. 2. Полученные численные результаты

$kt,$ рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
t, с	0	0,067	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53	0,60	0,67	0,74	0,80
$\varphi,$ рад	0	0,262	0,453	0,583	0,453	0,262	0	-0,262	-0,453	-0,523	-0,453	-0,282	0
$x_1^* =$ $= 16,36t$	0	1,10	2,13	3,27	4,42	5,40	6,54	7,70	8,67	9,82	10,46	12,04	13,23
$x_1^{**} = 2,094 \cdot$ $\cdot \sin kt$	0	1,05	1,81	2,09	1,81	1,05	0	-1,05	-1,81	-2,09	-1,81	-2,05	0
$x_1 = x_1^* \cdot x_1^{**},$ см	0	0,05	0,32	1,18	2,61	4,35	6,54	8,75	10,48	11,91	12,77	13,09	13,13

По результатам вычислений построены графики  $\varphi = f_1(t)$  и  $x_1 = f_2(t)$  (рис. 4).



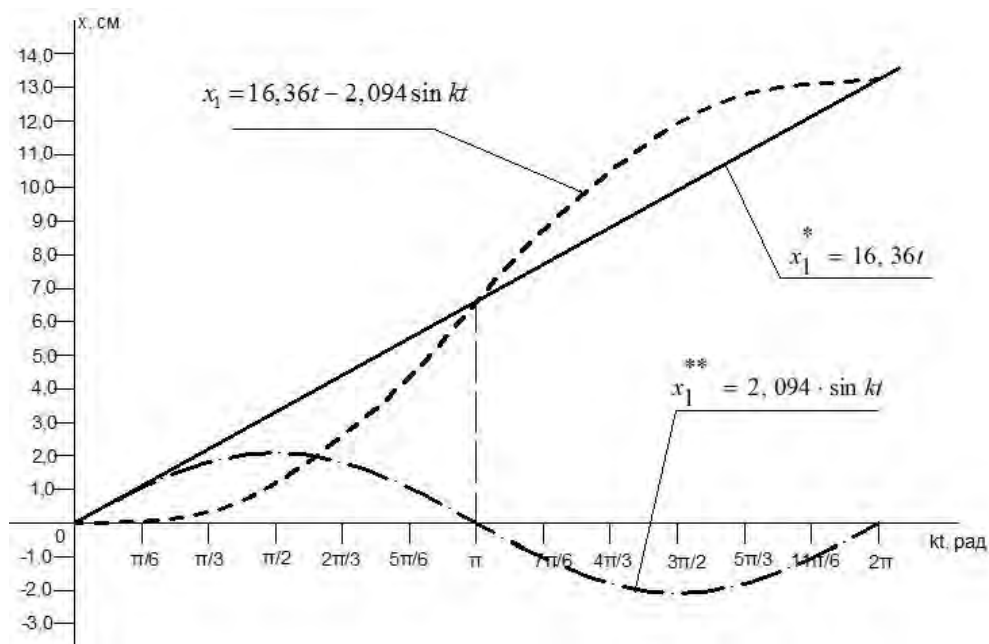


Рис. 4

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе приведены результаты подробных исследований колебаний эллиптического маятника, показано применение законов сохранения движения центра масс и количества движения механической системы для обоснования характера движения маятника при двух различных начальных условиях движения и для определения траектории точечного груза (шарика) и закона движения ползуна. Получены также уравнения движения ползуна и закон вращения шарика (стержня) путем составления дифференциальных уравнений с использованием уравнений Лагранжа второго рода и их решение для случая малых колебаний.

Выполненные вычисления и построенные графики по полученным уравнениям движений ползуна и шарика дают наглядное представление о колебательном характере движения эллиптического маятника.

В литературе [3] имеются указания на то, что траекторией шарика при колебании маятника является эллипс, но уравнение его нигде не приводится в данной работе, мы восполнили этот пробел.

При приведении в движение маятника путем сообщения шарика (стержню) в положении равновесия некоторой угловой скорости  $\dot{\varphi}_0$  ползун с течением времени бесконечно удаляется от своего положения равновесия, совершая при этом гармонические колебания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М.: Наука, 1986, 448с.
2. Акимов, В.А. Теоретическая механика. Динамика. Практикум. ч.2 / В.А. Акимов и др. – Мн.: Новое знание, 2010. 862с.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики, ч.2. Динамика / А.А. Яблонский. М.: Высшая школа, 1971. 486 с.
4. Локтионов, А.В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения // Теоретическая и прикладная механика. – Минск.: БНТУ, 2011.– Вып. 26. - С.138-143.
5. Локтионов, А.В. Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника // Теоретическая и прикладная механика.–Мн. БНТУ, 2014. – Вып. 29. - С.290-293.