УДК 621.762.4

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

д.т.н. **Дудяк А.И.**, **Дикан Ж.Г.**
Белорусский уациональный пехнический университет, Минск

Введение.

Из курса «Сопротивление материалов» известно, что наибольшее практическое значение имеют главные центральные оси. Главными центральными осями называют оси, проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Сечение, состоящее из двух материалов.

Рассмотрим стержень, состоящий их двух стержней, прочно соединенных между собой и изготовленных из различных материалов. Плоское сечение такого стержня представлено на рис.1. В этом случае плоское сечение в различных зонах будет обладать различной жесткостью и ось стержня будет проходить через центр жесткости сечения.

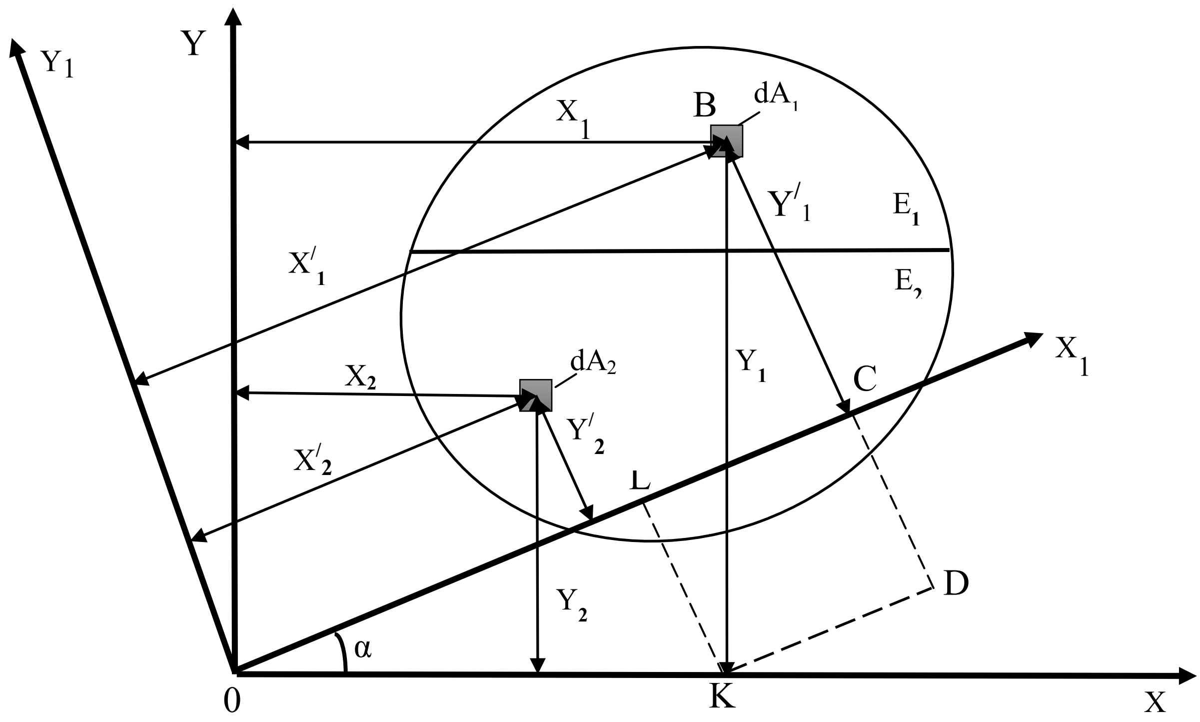

Рис.1. Осевое сечение, состоящее из двух различных материалов

Координаты центра жесткости относительно осей x и y определяют из выражений:

$$X_{ж} = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

$$Y_{ж} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

где: S_{x1} и S_{x2} – статические моменты площадей сечения относительно оси x, соответственно модулям упругости E_1 и E_2;

S_{y1} и S_{y2} - статические моменты площадей сечения относительно оси y;

E_1A_1 и E_2A_2 – жесткости частей сечения при растяжении или сжатии.

Осевую суммарную жесткость сечения стержня при изгибе относительно осей x и y можно представить в виде:

$$(EI_x)_c = E_1\int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} y_2^2 dA_2 \tag{1}$$

$$(EI_y)_c = E_1\int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2^2 dA_2 \tag{2}$$

Центробежную суммарную жесткость сечения стержня относительно осей x и y приведем к виду:

$$(EI_{xy})_c = E_1\int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \tag{3}$$

Повернем оси x и y на угол α против часовой стрелки, считая такое направление положительным. Найдем теперь суммарные жесткости относительно новых осей x_1 и y_1.

$$(EI_{x_1})_c = E_1\int_{A_1} (y_1')^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} (y_2')^2 dA_2 \tag{4}$$

$$(EI_{y_1})_c = E_1\int_{A_1} (x_1')^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} (x_2')^2 dA_2 \tag{5}$$

$$(EI_{x_1y_1})_c = E_1\int_{A_1} x_1'y_1' dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2'y_2' dA_2 \tag{6}$$

Координаты произвольной элементарной площади dA_1 в новых координата x'_1 и y'_1 выражаются через прежние координаты x_1 и y_1 следующим образом:

$$x_1' = OC = OL + KD = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$$

$$y_1' = BC = BD - LK = y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha$$

Аналогично координаты x'_2 и y'_2 можно выразить через первоначальные координаты x_2 и y_2.

$$x_2' = x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha$$

$$y_2' = y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha$$

Подставив полученные значения новых координат в выражения (4), (5) и (6) получим:

$$(EI_{x_1})_c = E_1\int_{A_1} (y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha)^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} (y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha)^2 dA_2 \tag{7}$$

$$(EI_{y_1})_c = E_1\int_{A_1}(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 dA_1 + E_2\int_{A_2}(x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha)^2 dA_2 \quad (8)$$

$$(EI_{x_1y_1})_c = E_1\int_{A_1}(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)(y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha)dA_1 +$$
$$E_2\int_{A_2}(x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha)(y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha)dA_2 \quad (9)$$

После ряда математических преобразований выражения (7), (8) и (9) можно представить в виде:

$$(EI_{x_1})_c = [E_1\int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} y_2^2 dA_2]\cos^2\alpha - [E_1\int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2 y_2 dA_2]\sin 2\alpha +$$
$$+[E_1\int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2^2 dA_2]\sin^2\alpha \quad (10)$$

$$(EI_{y_1})_c = [E_1\int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} y_2^2 dA_2]\sin^2\alpha + [E_1\int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2 y_2 dA_2]\sin 2\alpha +$$
$$+[E_1\int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2^2 dA_2]\cos^2\alpha \quad (11)$$

$$(I_{x_1y_1})_c = [E_1\int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2 y_2 dA_2]\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\{[E_1\int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} y_2^2 dA_2] -$$
$$-[E_1\int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2^2 dA_2]\}\sin 2\alpha \quad (12)$$

С учетом выражений (1), (2) и (3) выражения (10), (11) и (12) окончательно примут следующий вид:

$$(EI_{x_1})_c = (EI_x)_c \cdot \cos^2\alpha - (EI_{xy})_c \cdot \sin 2\alpha + (EI_y)_c \cdot \sin^2\alpha \quad (13)$$
$$(EI_{y_1})_c = (EI_x)_c \cdot \sin^2\alpha + (EI_{xy})_c \cdot \sin 2\alpha + (EI_y)_c \cdot \cos^2\alpha \quad (14)$$
$$(EI_{x_1y_1})_c = (EI_{xy})_c \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{2}[(EI_x)_c - (EI_y)_c] \cdot \sin 2\alpha \quad (15)$$

Наибольшее практическое значение имеют главные центральные оси: оси - проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. В нашем случае это правило не применимо, так как стержень состоит из двух прочно соединенных между собой стержней, отличающихся друг от друга физико-механическими характеристиками и работающих как единое целое. В нашем случае практическое значение будут иметь главные оси жесткости. Главными осями жесткости будем считать оси, проходящие через центр жесткости сечения стержня относительно которых суммарная центробежная жесткость равна нулю.

Следовательно, для главных осей жесткости необходимое условие

$$(EI_{x_1y_1})_c = 0 \tag{16}$$

В этом случае выражение (15) представим в виде:

$$(EI_{xy})_c \cos 2\alpha + \frac{1}{2}[(EI_x)_c - (EI_y)_c]\sin 2\alpha = 0 \tag{17}$$

Разделив полученное выражение на cos2α получим:

$$(EI_x)_c + \frac{1}{2}[(EI_x)_c - (EI_y)_c]\cdot tg2\alpha = 0$$

Откуда:

$$tg2\alpha = -\frac{2(EI_{xy})_c}{(EI_x)_c - (EI_y)_c} \tag{18}$$

Заключение. Полученное выражение (18) определяет место положения главных осей жесткости. В соответствии с принятым положением значение угла α при выводе формул следует:

1) Если α 0, то угол *α* откладывается путем поворота центральных осей жесткости против часовой стрелки.
2) Если α>0, то угол *α* откладывается поворотом центральных осей жесткости по часовой стрелке.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрен стержень, состоящий из двух прочно соединенных между собой стержней, отличающихся друг от друга физико-механическими характеристиками и работающих как единое целое. Определен порядок расчета главных осей жесткости сечения. Представлены результаты расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев - Москва : Наука, 1972. – 541с.
2. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Ачирёв, А.Л. Квитки и др. – Киев: Техника, 1967. – 783с.

SUMMARY

The core consisting of the two strongly interconnected cores that differ from each other by physical and mechanical characteristics and work as a unit is considered. The procedure for calculating the principal stiffness section axes is defined. The calculation results are presented.

E-mail: dudjak@mail.ru
dikanz@tut.by

Поступила в редакцию 15.10.2015