УДК 531.8

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА

д.т.н. **Локтионов А.В.**
Витебский государственный технологический университет, Витебск

Введение. Существуют различные методы расчетов геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Анализом установлено, что наиболее простые методы расчета следует использовать для роботов, работающих в плоских системах координат. Векторный метод расчета целесообразно применять для роботов-манипуляторов, звенья которых расположены в одной плоскости. Установлено, что применительно к двухзвенному исполнительному механизму с тремя степенями подвижности [1] векторный метод достаточно сложен и неприменим для пространственных схем размещения звеньев роботов-манипуляторов. При таком методе расчета определяются проекции звеньев на неподвижные оси координат и векторов скорости и ускорения на эти оси. В работе [2] скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ в сферической системе координат определяются как частный случай их расчёта в ортогональных криволинейных координатах. Для расчёта скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Модуль скорости V точки определяется из выражения $V^2 = \dot{q}_1^2 \cdot H_1^2 + \dot{q}_2^2 \cdot H_2^2 + \dot{q}_3^2 \cdot H_3^2$. Для расчёта ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщённым криволинейным скоростям $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q. Такая методика расчёта кинематических параметров достаточно трудоёмка. Искомые $\vec{V}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ, связанные с движущейся точкой M. Матричное исчисление использовано в работе [3] для преобразования от прямоугольной к сферической системе координат.

В преподавании теоретической механики в технических вузах практически не используются методы матричной, линейной и тензорной алгебр. Высокая степень формализации, операций над матрицами позволяет получить строгие результаты, имеющие физический смысл, путем алгебраических преобразований. Преимущество матричной структуризации пространства проявляется в наибольшей степени при определении ускорений точек движущегося тела [4].

Тенденция сокращения часов, отведенных на изучение теоретической механики, привела к исчезновению многих разделов кинематики [5]. Задачи, решение которых основано на использовании полярной или цилиндрической систем координат становятся объектами научных исследований. Сферические координаты прописаны исключительно в списках компетенций курса математики [2,4]. В работах [3,5] предложена методика расчета кинематических характеристик движения точки в проекциях на подвижные оси координат, основанных на матричном представлении.

Преимущества матричного способа заключаются в том, что с помощью транспонированных матриц перехода определяются матричным методом скорость и ускорение центра схвата робота-манипулятора в подвижной системе координат. Знание отдельных составляющих вектора абсолютной скорости в подвижной системе координат для оснащенных режущим инструментом исполнительных механизмов позволит определить кинематические углы резцов, которые предопределяют их установку [6]. Следует дать сравнительную оценку и разработать методику расчета кинематических характеристик при сферическом движении исполнительного механизма с использованием углов Эйлера и матричным методом и получить формулы для расчета кинематических углов резцов механизма в процессе резания.

Расчет кинематических параметров режущего инструмента исполнительных механизмов. В процессе резания расчет задних углов, выражающих реальную величину зазора между поверхностью инструмента и поверхностью резания, непосредственно связан с изучением перемещения инструмента и обрабатываемого объекта [6].

На чертежах резцов указываются геометрические параметры, полученные при заточке. При работе механизма приходится изменять положение режущего лезвия относительно обрабатываемого массива, а в зависимости от положения вершины резца изменяются направления вектора скорости и геометрические параметры резцов в состоянии движения, которыми определяется процесс резания и износ инструментов. При разработке исполнительных механизмов определяются вытекающие из требований кинематики углы заточки (или установки) инструмента. При обработке массива кинематические углы резцов не должны превышать их геометрические значения. Иначе массив разрушается боковыми и задними гранями резцов, увеличиваются расход режущего инструмента, усилия и мощность резания, что является одной из причин малоэффективной работы машин.

Для того, чтобы геометрические углы резцов соответствовали кинематическим углам Ψ_1 и Ψ_2, необходимо знать углы φ и τ (рисунок 1): $\mathrm{tg}\,\psi_1 = \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\tau$, $\mathrm{tg}\,\psi_2 = \mathrm{tg}\,\tau \cdot \cos\varphi$. Подставляя в данные выражения соответствующие значения углов, получим

$$V_z / V_{xy} = (V_z / V_y)\cdot(V_y / V_{xy}),\; V_x / V_{yz} = (V_x / V_y)\cdot(V_y / V_{yz}).$$

Следовательно, для обеспечения в процессе разрушения массива необходимых кинематических углов Ψ_1 и Ψ_2 боковые и задний углы резца в статике следует определять из выражений

$$tg\varphi = tg\psi_1 / \cos\tau = V_z / V_y,\; tg\tau = tg\psi_2 / \cos\varphi = V_x / V_y.$$

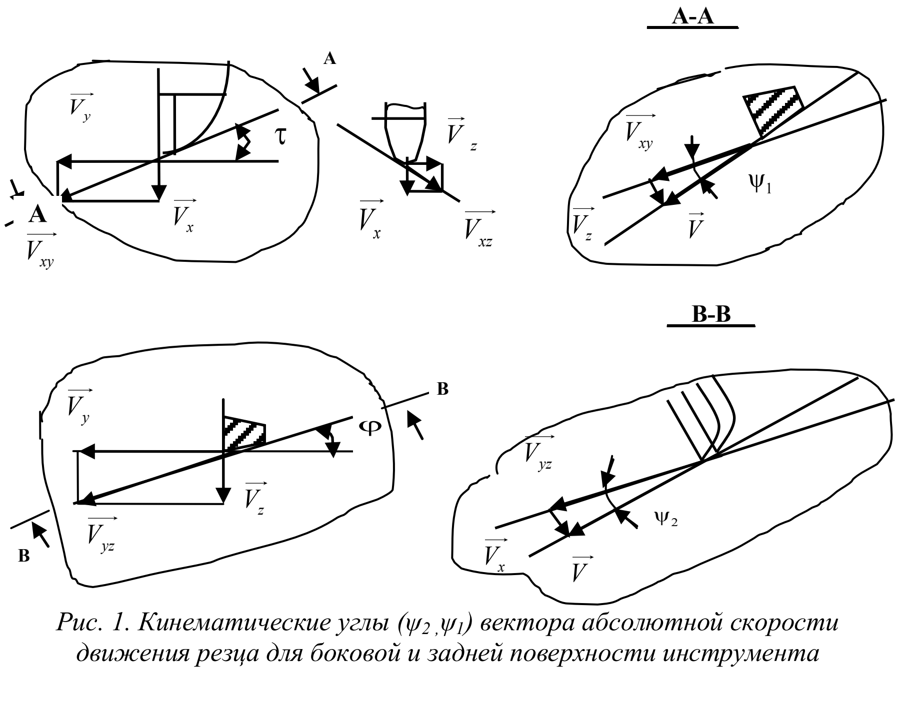

Рис. 1. Кинематические углы (ψ_2, ψ_1) вектора абсолютной скорости движения резца для боковой и задней поверхности инструмента

Углы φ и τ являются кинематическими углами резца в процессе резания. Чтобы оценить эффективность работы резцов, а, следовательно, и исполнительного механизма, достаточно знать отдельные составляющие вектора абсолютной скорости, которые устанавливают необходимые углы их заточки. Для определения угла φ необходимо знать V_z и V_y, а для определения угла τ - V_x и V_y. Кинематический угол ξ для передней грани находится по формуле . Ось X направлена вдоль оси резца, ось $У$ – перпендикулярно оси X в плоскости симметрии резца, ось Z – перпендикулярно плоскости симметрии резца.

Исходные конструктивные параметры должны быть едины для исполнительных механизмов любой конфигурации: выполненных в виде конуса, сферы, цилиндра, диска. Для всех конструкций исходными расчетными конструктивными параметрами будут расстояние от оси поворота исполнительного механизма до плоскости вращения или до центра диска (R) и текущий радиус (r) вращения резца (рисунок 2). Угловые скорости вращения и перемещение режущей головки должны соответствовать сумме элементарных движений резца в процессе резания [6].

Расчет кинематических характеристик пространственного исполнительного механизма с использованием углов Эйлера. Рассмотрим кинематические параметры исполнительного механизма, совершающего сферическое движение (рисунок 2). На головке исполнительного механизма выберем точку М. Для задания её положения относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ следует задать положение подвижной системы координат относительно неподвижной. Для этой цели используем углы Эйлера, три независимых параметра – углы прецессии, нутации и собственного вращения.

Одним из этих углов является угол ψ – угол прецессии. Для изменения этого угла тело должно вращаться вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\psi}$. Ось OZ – ось прецессии. В результате поворота система XYZ переходит в систему $X_1Y_1Z_1$, где ось OX – ось узлов.

Вторым углом Эйлера является угол θ – угол нутации. Для его измерения тело вращается вокруг оси OX_1 с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\theta}$, которая соответственно называется осью нутации. В результате этого поворота система $X_1Y_1Z_1$ переходит в систему $X_2Y_2Z_2$.

Третий угол Эйлера – угол φ – угол собственного вращения. При измерении угла φ тело вращается вокруг оси OZ_2, которую называют осью собственного вращения, с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\varphi}$. В результате последнего поворота система $X_2Y_2Z_2$ переходит в положение $X_3Y_3Z_3$.

Исходными параметрами для расчета являются координаты точки M в подвижной системе координат $X_3Y_3Z_3$, равные (r, O, R) углы β_1 и β_2, углы поворота ψ, θ, φ корончатого механизма и соответствующие им угловые скорости $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

Для определения проекции вектора скорости точки M используем кинематические уравнения и формулы Эйлера, имеющие соответственно следующий вид: проекции вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости на неподвижные оси XYZ определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения, определяющие проекции вектора скорости $\vec{V}$ на неподвижные оси координат XYZ имеют вид:

$$V_x = \left(\omega_y \cdot Z - \omega_z \cdot Y\right),\ V_y = \left(\omega_z \cdot X - \omega_x \cdot Z\right),\ V_z = \left(\omega_x \cdot Y - \omega_y \cdot X\right).$$

Тогда $V_{x_3}, V_{y_3}, V_{z_3}$ определяются из выражений:

$$\begin{aligned} V_{x_3} &= R\left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right), \\ V_{y_3} &= r\dot{\psi} + \dot{\psi}\left(r\cos\theta - R\sin\theta\sin\varphi\right) - R\dot{\theta}\cos\varphi, \\ V_{y_3} &= -r\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

где ψ, θ, φ – углы прецессии, нутации и собственного вращения.

Рассматривая $V_{x_3}, V_{y_3}, V_{z_3}$ как координаты точки, принадлежащей годографу вектора скорости, и, используя формулы поворота координатных осей на углы β_1 и β_2, поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ на β_1 вокруг оси OY_3 и получим систему $X_4Y_4Z_4$, которая в свою очередь поворачивается на угол β_2 вокруг оси OX_4. Получим искомую систему $X_5Y_5Z_5$. Проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси $X_5Y_5Z_5$ определяются из выражений:

$$\begin{aligned} V_{x_5} &= V_{x_3}\cos\beta_1\cos\beta_2 + V_{y_3}\sin\beta_2 + V_{z_3}\sin\beta_1\sin\beta_2, \\ V_{y_5} &= -V_{x_3}\cos\beta_1\sin\beta_2 + V_{y_3}\cos\beta_2 - V_{z_3}\sin\beta_1\sin\beta_2, \\ V_{z_5} &= -V_{x_3}\sin\beta_1 + V_{z_3}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{3}$$

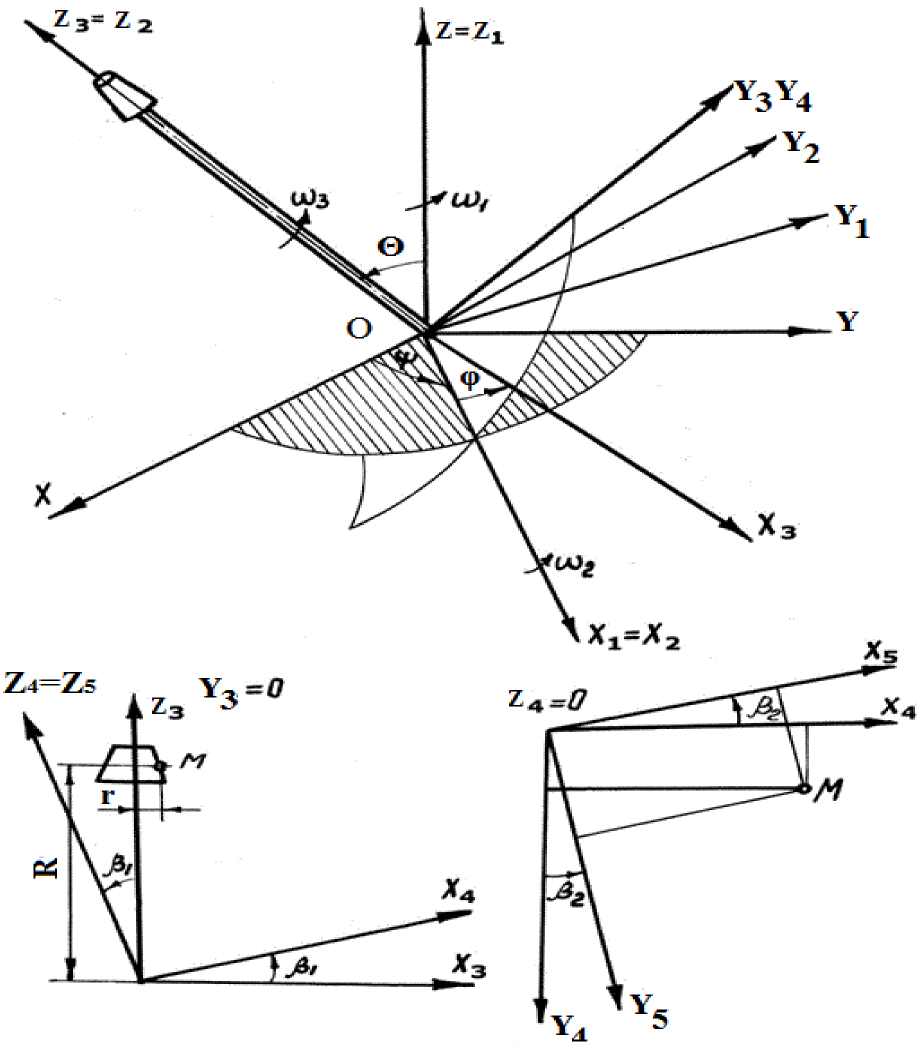

Рис. 2. Расчетная схема для определения кинематических параметров исполнительного механизма

Расчет кинематических характеристик пространственного исполнительного механизма матричным методом. Рассмотрим исполнительный механизм, совершающий сферическое движение (рисунок 2). Определим скорость точки *M* исполнительного механизма в общем случае его движения с использованием матричной записи кинематических параметров.

Методика расчета кинематических параметров матричным методом заключается в том, что координаты точки рассматриваются в неподвижной системе и выражаются через координаты этой точки в подвижной системе координат. Дифференцированием текущих координат определяются проекции скорости точки на неподвижные оси. С использованием транспонированной матрицы определяются проекции скорости точки на подвижные оси координат. Векторным дифференцированием текущих координат определяются проекции ускорения на неподвижные оси. Аналогично с использованием транспонированной матрицы определяются проекции ускорения на подвижные оси координат. Модули скорости и ускорения рассчитываются по известным формулам, а их направление определяются направляющими косинусами. Получаемые расчетные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки матричным методом. Для численного расчета можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

Оси по рисунку 2 образуют между собой углы, косинусы которых являются коэффициентами матриц $P_\psi, P_\theta, P_\varphi$. Для расчета кинематических углов резцов необходимо найти проекции абсолютной скорости точки *M* на координаты осей $X_5Y_5Z_5$.

Формулы преобразования координат точек при переходе к новому базису можно представить как произведение матриц в виде:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \text{где } P = P_\psi P_\theta P_\varphi .$$

Скорость $\vec{V}$ точки *M* без учета скорости подачи $\vec{V}_n$ определится дифференцированием текущих координат X, Y, Z по формуле:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Скорость точки *M* в подвижной системе $X_3Y_3Z_3$ определяется из выражения:

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} \dot{X}_3 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Z}_3 \end{pmatrix} = P'\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $P' = P'_\varphi P'_\theta P'_\psi$ - транспонированная матрица.

Векторы $\vec{V}$ и $\vec{V}_3$ в равенствах (4) – (5) представляют разложение одного и того же вектора $\vec{V}$ по разным базисам систем координат XYZ и $X_3Y_3Z_3$.

С учетом равенства (4) равенство (5) примет вид:

$$\vec{V}_3 = \left(P'_\varphi P'_\theta P'_\psi \frac{dP_\psi}{d\psi} P_\theta P_\varphi \dot{\psi} + P'_\varphi P'_\theta \frac{dP_\theta}{d\theta} P_\varphi \dot{\theta} + P'_\varphi \frac{dP_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Обозначив коэффициенты при $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ через *B*, *C*, *D*, соответственно получим:

$$\vec{V}_3 = \left(B\dot{\psi} + C\dot{\theta} + D\dot{\varphi}\right)\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) получим проекции вектора скорости точки *M* на подвижные оси координат $X_3Y_3Z_3$:

$$V_{x_3} = R\left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right), \tag{8}$$

$$V_{y_3} = r\dot{\varphi} + \dot{\psi}\left(r\cos\theta - R\sin\theta\sin\varphi\right) - R\dot{\theta}\cos\varphi, \tag{9}$$

$$V_{z_3} = -r\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\sin\varphi. \tag{10}$$

Используя повороты координатных осей на углы β_1 и β_2 вокруг осей OY_3 и OX_4 соответственно (рисунок 2), получим искомую систему $OX_5Y_5Z_5$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_5 \\ \dot{Y}_5 \\ \dot{Z}_5 \end{pmatrix} = P'_\beta \begin{pmatrix} \dot{X}_3 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Z}_3 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $P'_\beta = P'_{\beta_2}P'_{\beta_1}$ – транспонированная матрица. $P_\beta = P_{\beta_1}P_{\beta_2}$, где P_{β_1} и P_{β_2} – матрицы косинусов углов между осями рассматриваемых систем определим по рисунку 2.

Используя формулы (8)-(10), из равенства (11) получим проекции абсолютной скорости $\vec{V}$ резца на координате оси $X_5Y_5Z_5$, которые без учета скорости подачи исполнительного механизма вдоль оси OX будут иметь вид (3).

Конструктивные параметры R, r и углы β_1, β_2 применимы при различной конфигурации исполнительного механизма. Поэтому формулы (3, 6, 11) можно использовать для механизмов, выполненных в виде конуса, сферы, цилиндра, овального корпуса.

Равенство (11) окончательно можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_5 \\ \dot{Y}_5 \\ \dot{Z}_5 \end{pmatrix}. = \left[P'_{\beta_2}P'_{\beta_1}\right]\left(B\dot{\psi} + C\dot{\theta} + D\dot{\varphi}\right)\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

По формуле (12) определяются проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси $X_5Y_5Z_5$, которые имеют вид (3).

Методика их определения, помимо компактности математической записи, сравнительно проста. Полученные расчетные формулы позволяют исследовать кинематические характеристики корончатого исполнительного механизма, сравнить различные методики их расчета: с использованием углов Эйлера и матричным методом.

Определение кинематических характеристик для рассматриваемого исполнительного механизма матричным методом значительно проще, чем, например, при координатном способе их определения. Методика их определения более универсальна по сравнению с исследованием кинематических параметров исполнительного механизма при его сферическом движении.

При оснащении исполнительного механизма резцами необходимо знать расчетные формулы для определения кинематических углов резцов в процессе работы механизма, которые определяются из соотношения проекций (3) скорости точки М (резца) на подвижные оси координат X_5, Y_5, Z_5, связанные с режущим инструментом (рисунок 2). Индексация осей принимается с учетом рассматриваемой расчетной схемы исполнительного механизма. По рисунку 2 это оси X_5, Y_5, Z_5: ось X_5 направлена вдоль оси резца, ось Y_5 – перпендикулярно оси X_5 в плоскости симметрии резца, ось Z_5 – перпендикулярно плоскости симметрии резца (рисунок 2). Искомые соотношения равенств (3) позволяют получить формулы для расчета и исследования кинематических углов резцов в процессе резания. Они применимы для механизма по рисунку 2, у которого скорость его подачи вдоль оси ОХ не учитывается и равна нулю.

РЕЗЮМЕ

Проанализированы методика и методы расчета кинематических параметров исполнительных механизмов. Получены расчетные формулы для определения кинематических характеристик пространственного исполнительного механизма, работающего в сферической системе координат. Дана сравнительная оценка методик расчета кинематических характеристик пространственного исполнительного механизма с использованием углов Эйлера и матричным методом. Установлено, что расчет матричным методом значительно проще по сравнению с использованием расчетных формул при сферическом движении исполнительного механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтионов, А. В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма. Современные методы проектирования машин / А. В. Локтионов, А. В Гусаков // Республ. межведомств. сб. науч. тр. Вып. 2. В 7 т. Т. 2. Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций / Под общ. ред. П. А. Витязя. – Минск : УП «Технопринт», 2004. - С. 132 - 136.
2. Федута, А. А., Теоретическая механика и методы математики : Уч. пособие / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. - Минск: УП «Технопринт», 2000. – 504 с.
3. Локтионов, А. В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика: межведомств. науч.-техн. журнал. – Минск, 2004. – Вып. 17. – С. 115-118.
4. Рощева, Т. А. Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. / Выпуск 3 / Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель : БелГУТ, 2009. - С.197-205.
5. Рощева, Т. А. Универсальные алгоритмы кинематики точки и твердого тела / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов, О. С. Киелева // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. / Выпуск 6 / Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель : БелГУТ, 2012. - С.221-227.
6. Грановский, Г. И. Кинематика резания / Г. И. Грановский – Москва : Машгиз, 1947. – 200 с.

SUMMARY

Analyzed the methodology and methods of calculation of kinematic parameters of the actuators. The formulae are derived to determine the kinematic characteristics of the spatial actuator operating in a spherical coordinate system. Comparative evaluation of methods of calculation of the kinematic characteristics of spatial actuator using Euler angles and the matrix method. It is established that the calculation of the matrix method is much easier than using calculation formulas in spherical movement of the actuator.

E-mail: cancelaria@vstu.by

Поступила в редакцию 07.09.2015