

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СИТОВЫХ КЛАССИФИКАТОРАХ

д.т.н. Ахмадиев Ф.Г., к.ф.-м.н. Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

Введение. В различных технологических процессах, в частности, в химической технологии, производстве строительных материалов и других областях промышленности, часто необходимо разделять зернистый материал по некоторым признакам на определенные фракции. Одним из эффективных видов оборудования для разделения зернистых материалов являются ситовые классификаторы (sieve classifiers) [1,2]. При разработке конструкций классификаторов и организации технологических процессов перед проектировщиками возникает сложнейшая задача комплексного учета противоречивых требований. Задача состоит не в простом учете противоречивых требований, а в нахождении оптимального в некотором смысле компромиссного решения. Более точно задачу оптимального проектирования можно определить как поиск режимных и конструктивных параметров по заданным критериям качества. Возникают задачи многокритериальной оптимизации, которые обусловлены стремлением оценить качество решения с разных точек зрения. Сформулировать один критерий, который учитывал бы все желаемые качества проектируемой конструкции, практически невозможно, так как каждый показатель характеризует решение частично и функциональной полнотой обладает лишь их совокупность. Многокритериальность задачи оптимизации не является следствием несовершенства математической модели, а отражает суть – противоречивость, вызванную внешними причинами. Многокритериальные задачи очень разнообразны по содержанию. Основная трудность при их решении связана с вопросом – а что же следует считать наилучшей альтернативой, оптимальным решением, когда целевые функции являются противоречивыми и достигают по отдельности экстремальных значений в разных точках множества допустимых решений.

Основными этапами оптимального проектирования процесса разделения зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах являются [3]:

- 1) построение математической модели процесса и ее идентификация;
- 2) анализ неопределенностей, формирование целевых функций и их формализация, постановка задачи (или задач) оптимизации;
- 3) решение возникающих оптимизационных задач, которые обычно являются многокритериальными.

При оптимальном аппаратурном и технологическом оформлении процесса разделения критериями могут быть выбраны производительность оборудования, эффективность разделения, а также и другие показатели его работы, например, экономические.

Математические модели составляют основу методов расчета и оптимизации различных классификаторов. В целом ряде работ рассмотрены различные методы математического моделирования [1-13]. Исследованию кинетики процесса классификации посвящен целый ряд работ [4-7]. При исследовании кинетики в работе [4] предлагается использовать теорию марковских процессов, что позволяет определить функцию распределения частиц по размерам в аппарате. Процесс сепарации при этом представляется как диффузионный процесс с поглощающим экраном, роль которого выполняет поверхность решета и описывается уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка (Kolmogorov - Fokker - Planck) (К.-Ф.-П.). Моделированию вероятности просеивания

методом Монте-Карло посвящены работы [8-10]. Вероятность просеивания частицы в ячейку является основным параметром с помощью которого достигается эффект разделения, ее изучению посвящены работы [2,6]. Рабочий процесс в ситовых классификаторах складывается из трех процессов вибрационного перемещения: 1) движения слоя материала по поверхности сита; 2) процесса самосортирования; 3) проникновения мелких частиц сквозь отверстия сита. Процессы внутрислоевого перераспределения (самосортирования) частиц изучены в работах [4,5]. Процессам тонкослойного разделения посвящена работа [6]. В работе [7] для описания кинетики процесса классификации на вибрационных грохотах использована стохастическая теория, при этом процесс блуждания частиц считается несимметричным и кроме действия случайных сил учитываются также действия детерминированных гравитационных сил, влияющих на вынужденный перенос частиц.

Таким образом, вероятностный характер свойств частиц каждого компонента в смеси и на поверхности сита и разделения в целом свидетельствует о влиянии на процесс сепарирования случайных факторов. Поэтому среди основных подходов при моделировании этих процессов, особое место занимают статистические методы, в частности, теория марковских процессов [13].

Целью работы является исследование и построение математической модели кинетики разделения зернистых материалов на ситовых классификаторах, проведение идентификации и оптимизация процесса разделения на основе построенных моделей.

Математическое моделирование. Для разделения зернистых материалов по размерам часто используют многоярусные ситовые классификаторы [1,6,11]. Разделяемый материал характеризуется некоторой функцией распределения по размерам (диаметр, длина, ширина и т.д.), описываемой плотностью вероятности $W(\mathbf{d})$, где $\mathbf{d}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – вектор размеров материала. Требуется разделить исходный материал на фракции размерами (d_j, d_{j+1}) . При этом доля (число) частиц j -ой фракции определяется соотношением:

$$n_{d_j} = \int_{d_j}^{d_{j+1}} W(\mathbf{d}) d\mathbf{d}.$$

Во многих практически важных случаях необходимо выделить одну фракцию размерами $\mathbf{d} \leq \mathbf{d}_{кр}$, где $\mathbf{d}_{кр}$ определяется технологическими требованиями, размером и формой отверстия сита. Тогда доля (концентрация) этой фракции равна:

$$n_{\mathbf{d}} = \int_{\mathbf{d}_{min}}^{\mathbf{d}_{кр}} W(\mathbf{d}) d\mathbf{d}.$$

Процессы разделения на ситах являются случайными, поэтому для математического моделирования можно использовать теорию случайных функций, в частности марковские процессы (Markov processes) совместно с уравнениями сохранения механики гетерогенных сред.

Система кинетических уравнений процесса разделения зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах может быть представлена в виде:

$$\frac{dN_i}{dt} = F_i(N_i, x, \bar{z}, t) + \beta_i \eta_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где F_i – кинетическая функция, характеризующая скорость просеивания, $N_i = N_i(x, t; d_j)$ – линейная плотность распределения частиц выбранной фракции размерами d_j вдоль i -го сита на расстоянии x от его начала в момент времени t (число

частиц на единицу длины), \bar{z} – вектор свойств материала, n – количество сит, $\eta_i(t)$ – белый шум.

Случайный процесс N_i рассматривается как диффузионный марковский процесс, а плотность его распределения $W_i(N_1, \dots, N_i, x, t)$ удовлетворяет системе уравнений (К.-Ф.-П.):

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(V_i W_i) - \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial N_k}(F_i W_i) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}(B_{kj} W_i), \quad i = \overline{1, n},$$

где $x_k \equiv N_k$, $k = \overline{1, i}$; $x_{i+1} \equiv x$, B_{kj} – коэффициенты диффузии, V_i – средняя скорость вибрационного перемещения зернистых материалов вдоль сит. Решения уравнений (К.-Ф.-П.) для некоторых частных случаев приведены в [6]. При этом центральной проблемой является построение кинетических функций F_i .

Для процесса тонкослойного разделения зернистых материалов на ситовых классификаторах кинетические функции F_i из (1) могут быть представлены в виде:

$$F_i(N_i, x, \bar{z}, t) = \alpha_{i-1} \cdot N_{i-1} - \alpha_i \cdot N_i, \quad \alpha_0 \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты кинетических уравнений α_i определяются по зависимости [6]:

$$\alpha_i = V_i \cdot P / 2a_i, \quad (2)$$

где P – вероятность просеивания частиц в ячейку сита, $2a_i$ – шаг i – го сита.

Вероятность просеивания частицы в ячейку P является основным параметром, определяющим процесс разделения, и ее определение представляет собой весьма сложную задачу. Она зависит от большого количества различных факторов, например, геометрических размеров и формы ячейки сита и частиц разделяемого материала, скорости движения частицы по поверхности сита, неравномерности подачи зернистого материала на поверхность сита, условий стесненности и т.д. В научной литературе в основном рассмотрены вычисления вероятности просеивания для частиц круглой формы, для которых удается рассчитать критическую скорость перемещения зернистого материала вдоль сита [2]. Критическая скорость используется для вычисления критерия Фруда (Froude number) ($Fr = g \cdot r / v^2$) для определения условий гарантированного провала частицы в ячейку, где r – радиус, v – относительная скорость частицы. Для частиц неправильной формы трудно рассчитать критическое значение угла встречи, с которым связана критическая скорость. Вычисление вероятности просеивания частиц не круглой формы в ячейку с квадратным отверстием рассмотрено в [6].

В первом приближении вероятность просеивания частицы в ячейку можно представить в виде произведения вероятностей двух независимых событий [2]: $P = P_z \cdot P_v$, где P_z – геометрическая вероятность, зависящая от геометрических размеров и формы ячейки сита и частиц разделяемого материала и P_v – вероятность, зависящая от скорости движения частицы по вибрирующей поверхности сита.

Для определения геометрической вероятности просеивания P_z в зависимости от размеров и формы частицы и ячейки сита, рассмотрим следующую задачу. В ячейку прямоугольной формы размерами $2a \times 2b$, внутри которого помещено круглое отверстие диаметра D , наудачу попадает прямоугольник размерами $l \times d$, где l и d – наибольшие значения, соответственно, продольного и поперечного размеров частицы, $D < 2a$ и $D < 2b$. Необходимо определить вероятность того, что при параллельном переносе прямоугольника в направлении некоторого вектора \vec{V} , его половина могла бы оказаться внутри круга. Тогда под действием собственного веса частица провалится в отверстие ячейки. Схема расположения фигур приводится на рис. 1.

Обозначим θ угол наклона одной из сторон «наудачу упавшего» прямоугольника к направлению оси, совмещенной с направлением параллельного переноса, а ρ – отклонение центра прямоугольника от оси. Пусть условия опыта таковы, что случайная величина θ равномерно распределена на отрезке $[0, \pi]$, а случайная величина ρ – на отрезке $[-b, b]$, причем θ и ρ независимы. Очевидно, геометрические размеры связаны условием $k < 1$, где $k = \sqrt{l^2/4 + d^2}/D$. Параллельный перенос прямоугольника можно учитывать некоторым параметром τ , $\tau \in [-a, a]$. Тогда координаты вершин интересующей нас половины частицы, которая на рис.1 обозначена прямоугольником $A_1A_2A_3A_4$, можно записать следующим образом (табл.1):

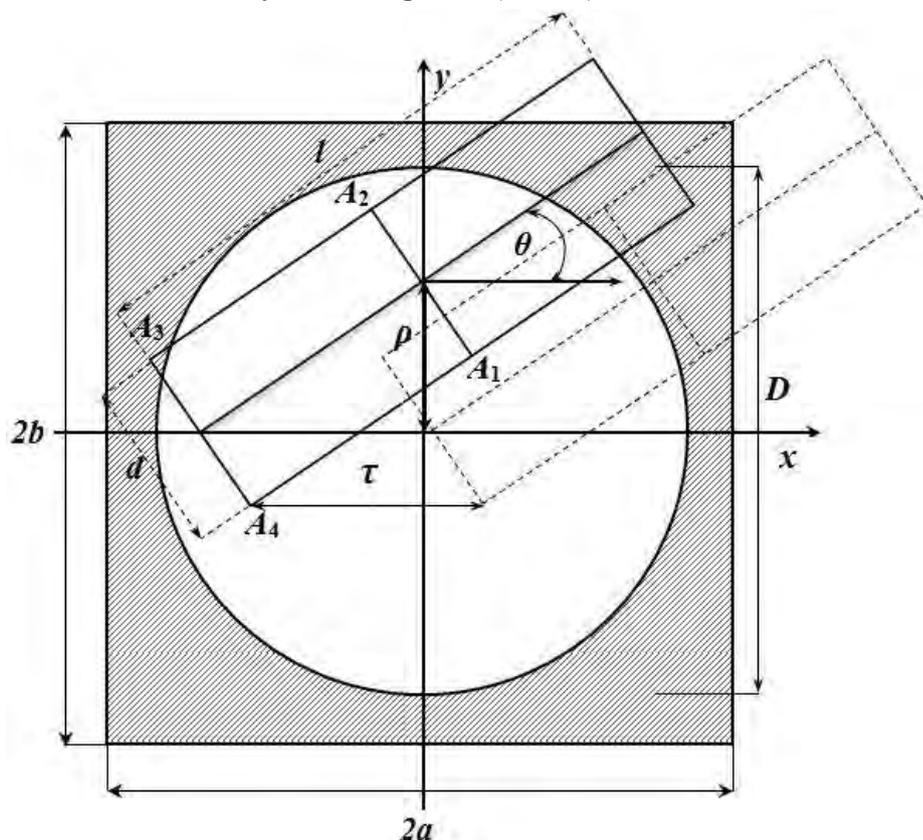


Рис.1. Схема ячейки сита

Для того чтобы выяснить вероятность попадания половины прямоугольника в круг, необходимо определить некоторое его оптимальное расположение по отношению к кругу. Такое расположение позволит установить возможность попадания интересующей нас части прямоугольника в круг. Сформулируем эту задачу в следующем виде:

$$\Delta\rho(\theta) = \max_{\tau} \Delta\rho(\theta, \tau),$$

$$\text{при условиях: } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -a \leq \tau \leq a \quad (3)$$

$$x_i^2 + y_i^2 \leq D^2/4, \quad i = \overline{1,4},$$

где $\Delta\rho(\theta, \tau) = \rho_1(\theta, \tau) - \rho_2(\theta, \tau)$; $\rho_1(\theta, \tau)$, $\rho_2(\theta, \tau)$ – максимальное и минимальное значения параметра ρ для фиксированного значения θ с учетом попадания прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ в круг. Координаты вершин прямоугольника приведены в табл.1.

С учетом симметрии значение θ можно рассматривать в диапазоне $[0, \pi/2]$. Тогда интересующую нас вероятность можно вычислить по формуле:

$$P_z = \int_0^{\pi/2} \Delta\rho(\theta)d\theta/(\pi \cdot b) \quad (4)$$

Табл.1

Вершины	Координаты X и Y
A_1	$x_1 = \tau + d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_1 = \rho - d \cdot \cos \theta / 2$
A_2	$x_2 = \tau - d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_2 = \rho + d \cdot \cos \theta / 2$
A_3	$x_3 = \tau - d \cdot \sin \theta / 2 - l \cdot \cos \theta / 2$
	$y_3 = \rho + d \cdot \cos \theta / 2 - l \cdot \sin \theta / 2$
A_4	$x_4 = \tau + d \cdot \sin \theta / 2 - l \cdot \cos \theta / 2$
	$y_4 = \rho - d \cdot \cos \theta / 2 - l \cdot \sin \theta / 2$

Решение задачи оптимизации (3) с учетом данных табл.1 приводит к оптимальному значению параметра $\tau = l \cdot \cos \theta / 4$. Таким образом, оптимальное расположение половинки достигается, когда ее центр (точка пересечения диагоналей) оказывается на вертикальной оси, проходящей через центр круга. В табл.2 приводятся координаты вершин прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ при его оптимальном расположении по отношению к кругу.

Табл.2.

Вершины	Координаты X и Y
A_1	$x_1 = l \cdot \cos \theta / 4 + d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_1 = \rho - d \cdot \cos \theta / 2$
A_2	$x_2 = l \cdot \cos \theta / 4 - d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_2 = \rho + d \cdot \cos \theta / 2$
A_3	$x_3 = -l \cdot \cos \theta / 4 - d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_3 = \rho + d \cdot \cos \theta / 2 - l \cdot \sin \theta / 2$
A_4	$x_4 = -l \cdot \cos \theta / 4 + d \cdot \sin \theta / 2$
	$y_4 = \rho - d \cdot \cos \theta / 2 - l \cdot \sin \theta / 2$

Нетрудно убедиться, что площадь прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ равна $S = l \times d / 2$, т.е. половине площади наудачу брошенного прямоугольника. Следует отметить, что такой же результат можно получить, если оптимальное значение параметра τ определить из

$$\text{условия } \sum_{i=1}^4 x_i = 0.$$

Тогда определение геометрической вероятности по формуле (4) с учетом оптимального значения τ сводится к вычислению эллиптического интеграла:

$$P_z = (D \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\theta - \varphi)} d\theta - (l/2 + d)) / (\pi \cdot b),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = l/2d$.

На рис.2 приводится график зависимости величины $\Delta\rho$ от параметра θ .

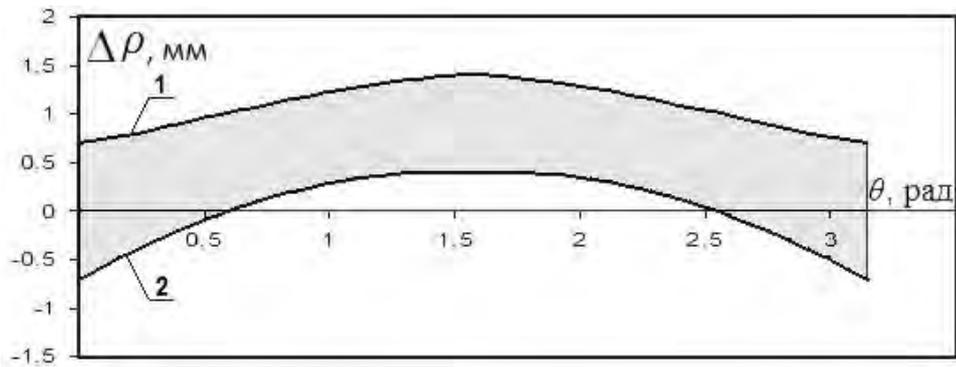


Рис. 2. Зависимость $\Delta\rho$ от параметра θ : 1 – верхняя, 2 – нижняя границы изменения значений при $D = 3\text{ мм}$, $l \times d = 3,6 \times 1\text{ мм}$

В зависимости от размеров и формы частиц случайные величины ρ и θ могут подчиняться различным законам распределения, которые могут быть найдены выравниванием по результатам наблюдений. Границы изменения угла θ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) зависят от многих факторов, в частности, значения θ_1 и θ_2 зависят от геометрических размеров и формы частиц, учитывают ориентацию частиц на плоскости, вызванную вибрацией. Под ориентацией частицы на плоскости понимается ее положение по отношению к направлению движения в зависимости от ее размеров и формы, а также и от других факторов, которые заставляют частицу принимать такое положение.

Результаты расчетов вероятностей, когда половина прямоугольника размерами $l \times d$ может оказаться внутри круга диаметра D , приводятся на рис.3. Вероятности определяются в зависимости от параметра D/l и коэффициента формы частицы $kf = d/l$ ($0 < kf \leq 1$). Вычисления проводились для случая, когда параметры ρ и θ имеют равномерное распределение в заданных интервалах: $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $-b \leq \rho \leq b$.

Таким образом, зная геометрические размеры и форму ячейки сита, также коэффициент формы частицы, можно определить геометрическую вероятность просеивания частицы в ячейку. Результатами расчетов, представленными на рис.3, следует пользоваться следующим образом. Например, выбрана ячейка сита размерами $3,2 \times 3,2\text{ мм}$ с круглым отверстием диаметра $D = 2\text{ мм}$. Пусть значение коэффициента формы $kf = d/l = 0,5$. Тогда для частицы с линейным размером $l = 2,2\text{ мм}$ по горизонтальной оси рис.3 определяется значение $D/l = 0,909$ и по вертикальной оси – значение геометрической вероятности равно $P_z(2,2) = 0,150$.

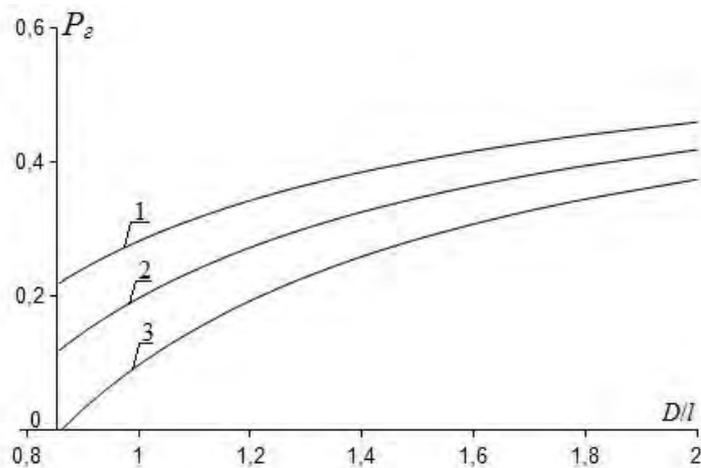


Рис. 3. Зависимость геометрической вероятности P_z от параметра D/l и коэффициента формы kf : 1 – $kf = 0,3$; 2 – $kf = 0,5$; 3 – $kf = 0,7$ при $2a \times 2b = 3,2 \times 3,2\text{ мм}$; $D = 2\text{ мм}$

Далее определим вероятность P_v , зависящую от относительной скорости. Относительная скорость частицы в момент отрыва от кромки отверстия ячейки сита рассматривается как нормально распределенная случайная величина и вероятность того, что она может принимать значения от нуля до некоторого значения V_1 , равна:

$$P\{0 < V < V_1\} = \Phi((V_1 - V_k)/\sigma) + \Phi(V_k/\sigma),$$

где V_k, σ – параметры нормального закона, $\Phi(x)$ – функция Лапласа (Laplace):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$$

Просеивание частицы в ячейку в зависимости от скорости её перемещения по вибрирующей поверхности рассматривается как случайное явление с нормальным законом распределения [2]:

$$P_v = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{V_a} \exp(-(u - V_k)^2 / 2\sigma^2) du$$

Тогда вероятность просеивания частицы в ячейку в зависимости от относительной скорости движения с учетом условия $P_v = 0,5$ при $V_a = V_k$ можно определять следующим образом: $P_v = 0,5 - \Phi((V_a - V_k)/\sigma)$, где V_a – амплитуда скорости частицы относительно сита.

Параметры V_k, σ определяются по экспериментальным данным в процессе идентификации построенных моделей. Для этого экспериментальные значения коэффициентов извлечения или эффективности разделения сравниваются с расчетными значениями на основе сходовых (непросеянных) остатков с сит. Расчетные значения коэффициентов извлечения определяются на основе решений системы кинетических уравнений (1), приведенных в [6].

Коэффициент извлечения (сходоная доля) j -ой фракции с i -го сита определяется по формуле:

$$\eta_i^j = \exp(-\alpha_i^j \cdot L_i / V_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = i, i+1,$$

где $j = i$ – крупная (сходоная) фракция, $j = i+1$ – следующая по крупности (проходоная) фракция с учетом разделения зернистого материала от крупного к мелкому.

Эффективность разделения на i -м сите определяется по зависимости:

$$E_i = \eta_i^i (1 - \eta_i^{i+1}) \times 100\%, \quad i = \overline{1, n},$$

где η_i^{i+1} – сходоная доля мелкой фракции в крупной, которая для i -й фракции рассматривается как доля примесей в целевом продукте.

По экспериментальным данным для каждого сита классификатора определяются статистические оценки вероятности просеивания:

$$\bar{P}_i^{j,s} = -\frac{2a_i}{L_i} \ln \bar{\eta}_i^{j,s}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = i, i+1, \quad s = \overline{1, k_s}, \quad (5)$$

где k_s – количество включенных в выборку экспериментальных точек ($k_s \geq 4$), проведенных при разных скоростных режимах.

Экспериментальные значения коэффициента извлечения $\bar{\eta}_i^{j,s}$ – (сходоная доля j -ой фракции с i -го сита при скоростном режиме с порядковым номером s) определяются по сходовым остаткам с сит. Выбор скоростного режима (параметров A, ω, α, β) и характеристик сит (L_i, D_i) необходимо вести с учетом требований на конечные продукты разделения первого и второго по крупности фракций. Первая фракция не просеива-

ясь должна сходиться с сита, а вторая с него просеяться, оставляя незначительный сходовый остаток:

$$\bar{\eta}_i^{i,s} > \eta_i^{1*}, \quad 0 < \bar{\eta}_i^{i+1,s} < \eta_i^{2*}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Значения η_i^{1*}, η_i^{2*} выбираются с учетом требований на конечные продукты разделения.

На основании статистических оценок вероятности просеивания (5) для выбранных скоростных режимов определяются наблюдаемые значения p – квантили скорости (безразмерное значение скорости, при котором скоростная вероятность равна p_v)

$$\bar{U}_i^{j,s} = \Phi^{-1}(0,5 - \bar{p}_i^{j,s} / p_{ai}^j), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = i, i+1; \quad s = \overline{1, k_s},$$

где $\Phi^{-1}[*]$ – операция вычисления аргумента функции Лапласа (Laplace) $\Phi(x) = p_v$.

Расчетное значение p – квантили скорости можно найти по формуле:

$$U_i^{j,s} = (V_{ai}^s - V_{ki}^j) / \sigma_i^j, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = i, i+1; \quad s = \overline{1, k_s}, \quad (6)$$

где V_{ai}^s – амплитуда относительной скорости частиц на i – ом сите.

Неизвестные параметры зависимости (6) V_{ki}^j, σ_i^j определяются в результате сравнения наблюдаемого и расчетного значений p – квантили скорости:

$$\sum_{s=1}^{k_s} (\bar{U}_i^{j,s} - U_i^{j,s})^2 \rightarrow \min_{V_{ki}^j, \sigma_i^j}. \quad (7)$$

для мелких фракций, не имеющих остатков с сит, параметры распределения определяются из аппроксимирующей зависимости, которая строится используя найденные ранее значения параметров для крупных фракций с остатками по формуле (7).

Для плетеного сита зависимость параметров V_k и σ от размеров ячейки и частицы можно представить в виде [6]:

$$\begin{aligned} V_k(D, l) &= \sqrt{\frac{g}{2r}} (A_v D - B_v l), \\ \sigma(D, l) &= A_\sigma V_k(D, l) + B_\sigma, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где r – радиус боковой грани плетеного сита, l – характерный размер j – ой фракции, D – размер отверстия ячейки i – го сита.

Для пробивных сит параметры скоростной вероятности можно найти из следующей аппроксимирующей зависимости [6]:

$$V_k(D, l) = \sqrt{\frac{g}{l}} (A_v D - B_v l). \quad (8.2)$$

Коэффициенты зависимостей (8.1) и (8.2) $A_v, B_v, A_\sigma, B_\sigma$ определяются в результате сравнения расчетных значений параметров V_k и σ с найденными ранее их оптимальными значениями из (7) методом наименьших квадратов из соотношений:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{i+1} (V_k(D_i, l_j) - V_{ki}^j)^2 \rightarrow \min_{A_v, B_v}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{i+1} (\sigma(D_i, l_j) - \sigma_i^j)^2 \rightarrow \min_{A_\sigma, B_\sigma}.$$

Вид зависимостей (8.1) и (8.2) согласуется с теоретическими формулами, известными в научной литературе [2].

Результаты расчетов коэффициента извлечения на рис.4 показывают, что в интервале $0 < V_a < V_1 = 0,15$ м/сек обе фракции проходят сквозь сито, а в интервале $V_a > V_2 = 0,4$ м/сек обе фракции сходят с сита. Следовательно, в обоих случаях разделение не происходит. Разделение происходит в интервале $V_1 < V_a < V_2$.

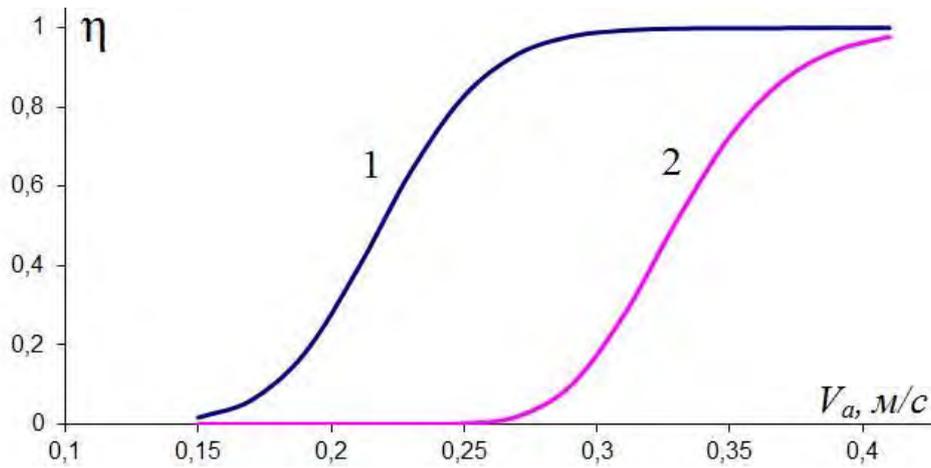


Рис. 4. Зависимость коэффициента извлечения η от амплитуды относительной скорости V_a при:
 $L = 1,6\text{ м}$; $D = 2\text{ мм}$; $2a \times 2b = 3,2 \times 3,2\text{ мм}$; $1 - l \times d = 2,5 \times 1,5\text{ мм}$; $2 - l \times d = 2,0 \times 1,5\text{ мм}$;
 $V_{k_1} = 0,148\text{ м/сек}$, $\sigma_1 = 0,051\text{ м/сек}$; $V_{k_2} = 0,185\text{ м/сек}$, $\sigma_2 = 0,069\text{ м/сек}$

Результаты расчетов эффективности разделения, представленные на рис.5, показывают, что для выбранных значений геометрических параметров, зная требования на конечные продукты разделения, можно подобрать параметры скоростного режима, т.е. значения параметров A, ω, α, β , при которых эффективность будет принимать максимальное значение, т.е. необходимо построить и решить задачу оптимальной организации процесса.

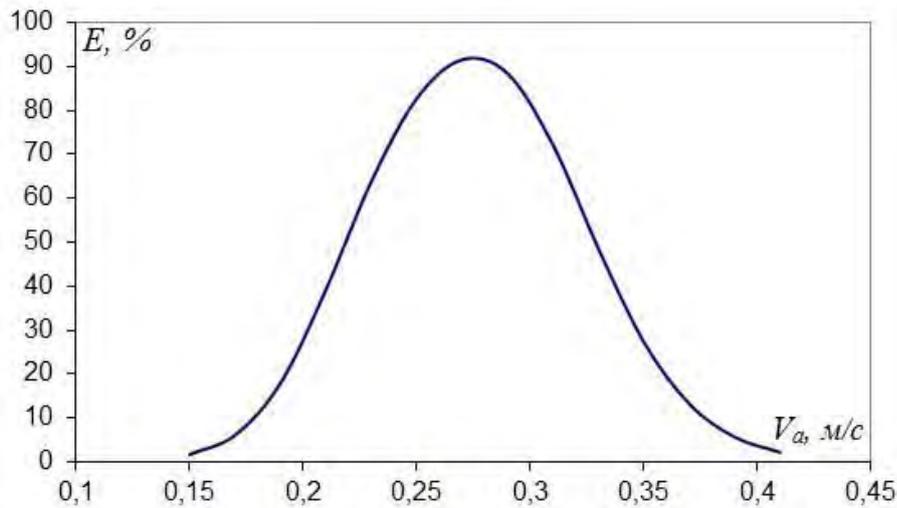


Рис. 5. Зависимость эффективности разделения E от амплитуды относительной скорости V_a при:
 $L = 1,6\text{ м}$; $D = 2\text{ мм}$; $2a \times 2b = 3,2 \times 3,2\text{ мм}$; $1 - l \times d = 2,5 \times 1,5\text{ мм}$; $2 - l \times d = 2,0 \times 1,5\text{ мм}$;
 $V_{k_1} = 0,148\text{ м/сек}$, $\sigma_1 = 0,051\text{ м/сек}$; $V_{k_2} = 0,185\text{ м/сек}$, $\sigma_2 = 0,069\text{ м/сек}$

Оптимизация. Для установления оптимальных параметров классификатора ставится задача оптимизации в многокритериальной постановке. В качестве критериев рассматриваются производительность аппарата и коэффициенты эффективности разделения на ситах:

$$\begin{aligned} \max Q(A, \omega, \alpha, \beta, h, B) &= \rho_c h B V_{cp}, \\ \max E_i(A, \omega, \alpha, \beta, D_i, L_i, \delta_i) &= \eta_i^i (1 - \eta_i^{i+1}) \times 100\%, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9)$$

при условиях:

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad \varphi_k^{\min} \leq \varphi_k(A, \omega, \alpha, \beta) \leq \varphi_k^{\max},$$

где x_j^{\min} , x_j^{\max} – наименьшее и наибольшее значение компонента вектора $\bar{x} = (A, \omega, \alpha, \beta, D, L, h, \delta)$, φ_k – функциональные ограничения, связанные с выбранным скоростным режимом, ρ_c – сыпучая плотность, B – ширина сита, V_{cp} – средняя скорость перемещения зернистого материала на сите, h – толщина слоя зернистого материала в начале первого сита, δ_i – требования на конечные продукты разделения, например, для каждой i – й фракции значение $\eta_i^{i+1} < \delta_i$.

Анализ влияния основных факторов на разделение показывает, что производительность и эффективность разделения на ситах при фиксированных значениях некоторых параметров, например, L_i, D_i, B, h, δ_i зависят от одних и тех же факторов, а именно, A, ω, α, β . Требуемую производительность для безотрывных режимов можно получить при различных сочетаниях указанных выше параметров. Однако выбор оптимальных значений напрямую зависит от эффективности разделения на ситах. Максимальную производительность можно выбрать, обеспечивая необходимую эффективность.

Оптимизация и управление процессом с большим количеством параметров затруднительно, так как существует взаимозависимость параметров, приводящая к искажению их влияния на процесс. Поэтому многокритериальную задачу (9) будем решать поэтапно. На начальном этапе определяют оптимальные конструктивные параметры аппарата: длину L_i , ширину B , размеры ячеек сит D_i . Увеличение начальной толщины слоя h способствует возрастанию производительности, в то же время с некоторого момента приводит к снижению эффективности и повышению доли примесей в целевых продуктах. В явной форме вероятность просеивания не зависит от h , но нормирующие множители V_k, σ получены при некотором значении h . Поэтому толщину слоя h необходимо поддерживать в определенном интервале. Так как подаваемый зернистый материал подвержен влиянию случайных факторов, аппарат должен поддаваться управлению без серьезных изменений параметров конструкции, т.е. за счет изменения значений управляющих параметров. Оптимальные значения настроечных параметров, например, A, α могут быть выбраны перед эксплуатацией, а оптимальные значения управляющих параметров ω, β выбираются лицом, принимающим решение, из некоторого множества оптимальных решений (множество Парето (Pareto set)).

Для построения множества Парето n ярусного классификатора составляется линейная свертка нормированных целевых функций и определяется ее максимум для различных значений λ_i , принимая во внимание условия $\sum \lambda_i = 1$ и $0 \leq \lambda_i \leq 1$,

$$\max_{\beta, \omega} W = \lambda_0 (Q(\beta, \omega) - Q_{\min}) / (Q_{\max} - Q_{\min}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (E_i(\beta, \omega) - E_i^{\min}) / (E_i^{\max} - E_i^{\min}),$$

где $Q_{\max} = \max_{\beta, \omega} Q(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, h^*, B^*)$, $Q_{\min} = \min_{\beta, \omega} Q(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, h^*, B^*)$,

$$E_i^{\max} = \max_{\beta, \omega} E_i(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, D_i^*, L_i^*, \delta_i^*), \quad E_i^{\min} = \min_{\beta, \omega} E_i(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, D_i^*, L_i^*, \delta_i^*), \quad i = \overline{1, n}.$$

Значения $A^*, \alpha^*, h^*, B^*, D_i^*, L_i^*$ – оптимальные значения соответствующих параметров, найденные на предыдущих этапах. Область Парето (area of Pareto), как правило, содержит много элементов, в связи с этим возникает необходимость в дальнейшем сужении области. Рассмотрим процедуру выбора оптимального решения по принципу гарантированного результата из множества Парето (Pareto set): $W_1(\beta, \omega) = \min \{ (Q(\beta, \omega) - Q_{\min}) / (Q_{\max} - Q_{\min}), (E_i(\beta, \omega) - E_i^{\min}) / (E_i^{\max} - E_i^{\min}) \}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Полученное решение дает нам для каждой точки (β, ω) из множества Парето (Pareto sets) значение наихудшего из критериев. Далее максимизация $W_1(\beta, \omega)$ обеспечи-

вает наибольшее значение для наихудшего из показателей, т.е. гарантированный результат. Можно использовать и другие дополнительные процедуры по усмотрению лица принимающего решение (ЛПР).

Результаты и их обсуждение. На основе построенной математической модели кинетики процесса разделения и поставленной задачи оптимизации были проведены численные расчеты (вычислительный эксперимент). Для проведения вычислительного эксперимента был разработан комплекс программ. Рассматривался зернистый материал на полимерной основе с линейными размерами в диапазоне от 0,75 до 2,75 мм и одинаковыми диаметрами 1,5 мм. Выборочные размеры зернистого материала: длина – 1,78 мм, среднее квадратичное отклонение 0,506 мм. Сыпучая плотность материала составила $\rho_c = 1150 \text{ кг/м}^3$. Доля частиц первой фракции с размерами (2,25 – 2,75) мм в исходном материале составила 21%, а доля частиц второй фракции с размерами (1,75 – 2,25) мм составила 32%. Для выделения первой фракции выбрано сито длиной $L = 1,6 \text{ м}$ и шириной $B = 1,0 \text{ м}$ с размерами ячеек $2a \times 2b = 3,2 \times 3,2 \text{ мм}$ с круглым отверстием диаметра $D = 2 \text{ мм}$. По сходным остаткам с сит для выбранных фракций определены параметры скоростной вероятности: $V_{k1} = 0,148 \text{ м/сек}$, $\sigma_1 = 0,051 \text{ м/сек}$ – для первой фракции и $V_{k2} = 0,185 \text{ м/сек}$, $\sigma_2 = 0,069 \text{ м/сек}$ – для второй фракции. При проведении численных расчетов были приняты: угол наклона сита $\alpha = -5^\circ$, амплитуда колебаний $A = 5 \text{ мм}$, высота выходной щели загрузочного бункера $h = 4 \text{ мм}$, требование на чистоту разделения δ не более 8%.

В качестве критериев оптимизации выбираются: производительность оборудования (массовый расход) Q , кг/час и эффективность разделения E , %. Параметрами оптимизации были выбраны: частота колебаний ω , сек⁻¹ и угол вибрации β , градус. Строится множество допустимых решений, для этого в программном комплексе все параметрические и функциональные ограничения приводятся к одному типу. Процедурой выделения основного критерия для допустимого множества вычисляются экстремальные значения каждого из критериев, которые в дальнейшем используются для получения нормированных значений целевых функций. При этом $\max Q = 1360 \text{ кг/час}$, оптимальное значение $\omega = 48,34 \text{ сек}^{-1}$ и $\beta = 11,69^\circ$ с учетом того, что эффективность разделения должна быть не ниже 80%. В случае, когда главным критерием была выбрана эффективность, получено $\max E = 91,96\%$, оптимальное значение $\omega = 47,78 \text{ сек}^{-1}$ и $\beta = 9,98^\circ$ с учетом того, что производительность должна быть не ниже 80% наибольшего значения. С помощью полученных решений однокритериальных задач строится обобщенная целевая функция по принципу гарантированного результата. Для каждой допустимой точки выбирается наименьшее из нормированных (или безразмерных) значений критериев, далее выбирается наибольшее значение для наихудшего из показателей.

В результате решения многокритериальной задачи оптимизации получено компромиссное решение: $E = 89,64\%$, $Q = 1340 \text{ кг/час}$. Оптимальные значения параметров: $\omega = 48,56 \text{ сек}^{-1}$ и $\beta = 10,5^\circ$. Средняя скорость составила $V = 8,2 \times 10^{-2} \text{ м/сек}$; амплитуда относительной скорости $V_a = 0,287 \text{ м/сек}$. Коэффициенты кинетических уравнений для первых двух фракций равны: $\alpha_1^1 = 1,31 \times 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ и $\alpha_1^2 = 0,127 \text{ сек}^{-1}$, коэффициент извлечения первой фракции равен $\eta_1^1 = 0,97$.

Заключение. Теория случайных функций, дополненная экспериментальными исследованиями для определения параметров модели, позволяет построить математические модели кинетики разделения зернистых материалов по размерам на ситовых классификаторах, которые являются основой для оптимизации и управления процессом

разделения. Построенные математические модели были использованы для компьютерного моделирования и оптимизации процесса разделения полимерных зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена математическая модель кинетики разделения зернистых материалов на многоярусном ситовом классификаторе на основе теории случайных процессов и проведена её идентификация. Сформулирована и решена задача оптимизации процесса классификации в многокритериальной постановке. В качестве критериев выбраны производительность аппарата и эффективность разделения на ситах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсберг, Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов / Л.А. Вайсберг. – М.: Недра, 1986.
2. Гортинский, В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. — М.: Колос, 1973.
3. Ахмадиев, Ф.Г. Некоторые задачи многокритериальной оптимизации технологических процессов / Ф.Г. Ахмадиев // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т.48. № 5. С. 574-582.
4. Непомнящий, Е.А. Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов / Е.А. Непомнящий // Теоретические основы химической технологии. 1973. Т.7. №5. С.754-763.
5. Блехман, И.И. О теории вибрационного разделения сыпучих смесей / И.И. Блехман, В.Я. Хайнман // Изв. АН СССР. Механика, 1965. – №5. – С. 22–30.
6. Ахмадиев, Ф.Г. Математическое моделирование процесса тонкослойного разделения зернистых материалов по размерам на ситовых классификаторах / Ф.Г. Ахмадиев, Р.Ф. Гиззятов, Х.Г. Киямов // Теоретические основы химической технологии. 2013. Т.47. № 3. С.309-317.
7. Огурцов, В.А. Метод расчета процесса классификации сыпучих материалов на виброгрохотах. Ивановский химико-технологический институт, межвузовский сборник научных трудов, 1987, С. 93-96.
8. Beeckmans, J. Monte carlo simulation of a probability screen / J. Beeckmans, A. Jutan, J. Can // Chem. Eng. – The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 1989, V.67, Issue 2, p. 329-336.
9. Rosato, A. Monte Carlo Simulation of particulate matter segregation / A. Rosato, F. Prinz, K. Standburg, R. Swendsen // Powder Technol. – 1986, v.49, №1, p.59-69.
10. Pascoe, R. D. Prediction of automated sorter performance utilising a Monte Carlo simulation of feed characteristics / R.D. Pascoe, R. Fitzpatrick, J.R. Garratt // Minerals Engineering, 2015, volume 72, Pages 101–107
11. Мизонов, В.Е. Моделирование классификации полидисперсных материалов на виброгрохотах / В.Е. Мизонов, В.А. Огурцов, С.В.Федосов //Строительные материалы, 2007, № 11.- С.26-28
12. Иванов, О.О. Повышение эффективности барабанного аппарата путем управления сегрегированными потоками зернистых материалов / О.О. Иванов, А.Н. Куди, В.Н. Долгунин, Ю.В. Шарый// Известия ВУЗов. Пищевая технология, 2011. № 2-3. - С.89.
13. Тихонов, В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977.

Поступила в редакцию 15.11.2015