УДК 539.3

НОВОЕ РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

к.ф.-м.н. **Акимов В.А., Гончарова С.В.**

Белорусский национальный технический университет

Бигармоническая функция играет большую роль в теории упругости. Так, например, при решении плоской задачи теории упругости по известной бигармонической функции можно по формулам Эри сразу получить напряженное состояние. Основа предлагаемого нового подхода базируется на построениях разрабатываемого авторами теории операторов бесконечно высокого порядка. В частности, в последних работах был рассмотрен новый класс гиперболо-тригонометрических функций, представляющих собой произведение гиперболической функции на тригонометрическую.

Итак, введем функции вида

$$u_1(x) = shax\sin ax \quad u_2(x) = shax\cos ax \quad u_3(x) = chax\sin ax \quad u_4(x) = chax\cos ax \tag{1}$$

и установим их свойства. Легко видеть:

$$u_1''(x) = 2a^2 chax\cos ax\,,\ u_2''(x) = -2a^2 chax\sin ax$$

$$u_3''(x) = 2a^2 shax\cos ax\ u_4''(x) = -2a^2 shax\sin ax$$

$$u_1^{(4)}(x) = -4a^4 shax\sin ax\,,\quad u_2^{(4)}(x) = -4a^4 shax\cos ax$$

$$u_3^{(4)}(x) = -4a^4 chax\sin ax\,,\quad u_4^{(4)}(x) = -4a^4 chax\cos ax$$

А теперь сконструируем функции вида:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= shax\sin ax shay\sin ay + chax\cos ax chay\cos ay\\
u_2(x,y) &= shax\sin ax shay\sin ay + chax\cos ax chay\cos ay\\
u_3(x,y) &= shax\sin ax chay\sin ay + chax\cos ax shay\cos ay\\
u_4(x,y) &= shax\cos ax chay\cos ay + chax\sin ax shay\sin ay
\end{aligned} \tag{3}$$

На основании соотношений (2)нетрудно убедиться в том, что все введенные функции (3) тождественно удовлетворяют бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 u_i(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_i(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_i(x,y)}{\partial y^4} = 0, \qquad i = 1,2,3,4 \tag{4}$$

В результате бигармоническая функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) = &\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}(sh\lambda_{1n}x\sin\lambda_{1n}xsh\lambda_{1n}y\sin\lambda_{1n}y + ch\lambda_{1n}x\cos\lambda_{1n}xch\lambda_{1n}y\cos\lambda_{1n}y) +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}(sh^2\lambda_{2n}x\cos\lambda_{2n}xsh\lambda_{2n}y\cos\lambda_{2n}y + ch\lambda_{2n}x\sin\lambda_{2n}xch\lambda_{2n}y\sin\lambda_{2n}y) +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} C_{3n}(sh\lambda_{3n}x\sin\lambda_{3n}xch\lambda_{3n}y\sin\lambda_{3n}y + ch\lambda_{3n}x\cos\lambda_{3n}xsh\lambda_{3n}y\cos\lambda_{3n}y) +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} C_{4n}\lambda_{4n}^2(sh^2\lambda_{4n}x\cos\lambda_{4n}xch\lambda_{4n}y\cos\lambda_{4n}y + ch\lambda_{4n}x\sin\lambda_{4n}xsh\lambda_{4n}y\sin\lambda_{4n}y).
\end{aligned} \tag{5}$$

Приведенная бигармоническая функция (5)тождественно удовлетворяет уравнению (4). Входящие сюда параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 задаются или находятся в соответствии с граничными условиями. Так как эта функция построена впервые, то ее свойства еще предстоит установить.

Используя формулу (2), нетрудно определить выражения для напряжений в плоской задаче:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \lambda_{1n}^2 (sh\lambda_{1n} x \sin \lambda_{1n} x ch\lambda_{1n} y \cos \lambda_{1n} y - ch\lambda_{1n} x \cos \lambda_{1n} x sh\lambda_{1n} y \sin \lambda_{1n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \lambda_{2n}^2 (-sh^2 \lambda_{2n} x \cos \lambda_{2n} x ch\lambda_{2n} y \sin \lambda_{2n} y + ch\lambda_{2n} x \sin \lambda_{2n} x sh\lambda_{2n} y \cos \lambda_{2n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{3n} \lambda_{3n}^2 (sh\lambda_{3n} x \sin \lambda_{3n} x sh\lambda_{3n} y \cos \lambda_{3n} y - ch\lambda_{3n} x \cos \lambda_{3n} x sh\lambda_{3n} y \sin \lambda_{3n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n} \lambda_{4n}^2 (-sh^2 \lambda_{4n} x \cos \lambda_{4n} x ch\lambda_{4n} y \sin \lambda_{4n} y + ch\lambda_{4n} x \sin \lambda_{4n} x ch\lambda_{4n} y \cos \lambda_{4n} y).$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \lambda_{1n}^2 (ch\lambda_{1n} x \cos \lambda_{1n} x sh\lambda_{1n} y \sin \lambda_{1n} y - sh\lambda_{1n} x \sin \lambda_{1n} x ch\lambda_{1n} y \cos \lambda_{1n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \lambda_{2n}^2 (-ch^2 \lambda_{2n} x \sin \lambda_{2n} x sh\lambda_{2n} y \cos \lambda_{2n} y + sh\lambda_{2n} x \cos \lambda_{2n} x ch\lambda_{2n} y \sin \lambda_{2n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{3n} \lambda_{3n}^2 (ch\lambda_{3n} x \cos \lambda_{3n} x ch\lambda_{3n} y \sin \lambda_{3n} y - sh\lambda_{3n} x \sin \lambda_{3n} x sh\lambda_{3n} y \cos \lambda_{3n} y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n} \lambda_{4n}^2 (-ch^2 \lambda_{4n} x \sin \lambda_{4n} x ch\lambda_{4n} y \cos \lambda_{4n} y + sh\lambda_{4n} x \cos \lambda_{4n} x sh\lambda_{4n} y \sin \lambda_{4n} y).$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \lambda_{1n}^2 [(ch\lambda_{1n} x \sin \lambda_{1n} x + sh\lambda_{1n} x \cos \lambda_{1n} x)(ch\lambda_{1n} y \sin \lambda_{1n} y + sh\lambda_{1n} y \cos \lambda_{1n} y) +$$

$$+ (sh\lambda_{1n} x \cos \lambda_{1n} x - ch\lambda_{1n} x \sin \lambda_{1n} x)(sh\lambda_{1n} y \cos \lambda_{1n} y - ch\lambda_{1n} y \sin \lambda_{1n} y)] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \lambda_{2n}^2 [(ch\lambda_{2n} x \cos \lambda_{2n} x - sh\lambda_{2n} x \sin \lambda_{2n} x)(ch\lambda_{2n} y \cos \lambda_{2n} y + sh\lambda_{2n} y \sin \lambda_{2n} y) +$$

$$+ (sh\lambda_{2n} x \sin \lambda_{2n} x - ch\lambda_{2n} x \cos \lambda_{2n} x)(sh\lambda_{2n} y \sin \lambda_{2n} y - ch\lambda_{2n} y \cos \lambda_{2n} y)] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} C_{3n} \lambda_{3n}^2 [(ch\lambda_{3n} x \sin \lambda_{3n} x + sh\lambda_{3n} x \cos \lambda_{3n} x)(ch\lambda_{3n} y \sin \lambda_{3n} y + sh\lambda_{3n} y \cos \lambda_{3n} y) +$$

$$+ (sh\lambda_{3n} x \cos \lambda_{3n} x - ch\lambda_{3n} x \sin \lambda_{3n} x)(sh\lambda_{3n} y \cos \lambda_{3n} y - ch\lambda_{3n} y \sin \lambda_{3n} y)] -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n} \lambda_{4n}^2 [(ch\lambda_{4n} x \cos \lambda_{4n} x - sh\lambda_{4n} x \sin \lambda_{4n} x)(ch\lambda_{4n} y \cos \lambda_{4n} y + sh\lambda_{4n} y \sin \lambda_{4n} y) +$$

$$+ (sh\lambda_{4n} x \sin \lambda_{4n} x - ch\lambda_{4n} x \cos \lambda_{4n} x)(sh\lambda_{4n} y \sin \lambda_{4n} y - ch\lambda_{4n} y \cos \lambda_{4n} y)] =$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \lambda_{1n}^2 [(ch\lambda_{1n} x \sin \lambda_{1n} x ch\lambda_{1n} y \sin \lambda_{1n} y + sh\lambda_{1n} x \cos \lambda_{1n} x sh\lambda_{1n} y \cos \lambda_{1n} y) =$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \lambda_{2n}^2 [(ch\lambda_{2n} x \cos \lambda_{2n} x ch\lambda_{2n} y \cos \lambda_{2n} y + sh\lambda_{2n} x \sin \lambda_{2n} x sh\lambda_{2n} y \sin \lambda_{2n} y) =$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{3n} \lambda_{3n}^2 [(ch\lambda_{3n} x \sin \lambda_{3n} x ch\lambda_{3n} y \sin \lambda_{3n} y + sh\lambda_{3n} x \cos \lambda_{3n} x sh\lambda_{3n} y \cos \lambda_{3n} y) =$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n} \lambda_{4n}^2 [(ch\lambda_{4n} x \cos \lambda_{4n} x ch\lambda_{4n} y \cos \lambda_{4n} y + sh\lambda_{4n} x \sin \lambda_{4n} x sh\lambda_{4n} y \sin \lambda_{4n} y).$$

Построенное таким образом новое решение существенно расширяет известное до этого в учебной и научной литературе решение Леви. В дальнейшем при проведении при проведении расчетов при помощи новых формул и сравнивании результатов с известными нам понадобятся значения следующих интегралов:

$$J_{ss} = \int_{-\pi}^{\pi} shmx \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{m^2 + n^2} shm\pi \,, \; J_{cc} = \int_{-\pi}^{\pi} chmx \cos nx dx = \frac{(-1)^{n+1} 2m}{m^2 + n^2} shm\pi$$

$$J_{cs} = \int_{-\pi}^{\pi} chmx \sin nx dx = 0 \,, J_{sc} = \int_{-\pi}^{\pi} shmx \cos nx dx = 0 \,.$$

Следует также отметить, что построенное новое решение обладает определенной симметрией, а это обстоятельство может значительно упростить вычислительные трудности при решении некоторых задач.

РЕЗЮМЕ

Построено новое решение бигармонического уравнения. Получены формулы для определения плоского напряженного состояния. Таким образом представляется еще одна возможность решать задачи и обсуждать вопросы об оптимальности, точности, устойчивости и трудоемкости решений по сравнению с известными.

SUMMARY

It was built a new solution biharmonic equation. There were formulas for determining the plane stress. Thus it was presented another opportunity to solve problems and to discuss issues of optimality, accuracy, stability and complexity of solutions in comparison with known.

E-mail: vakim50@mail.ru

Поступила в редакцию 22.10.2015