

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В ПАКЕТЕ «МАТЕМАТИКА»

студ. **Абросов Я.А.**, к.т.н. **Борисов А.В.**

*филиал ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет  
«МЭИ» в г. Смоленске, Россия*

Пакет «Mathematica» является одной из наиболее эффективных систем вычислений. Программы, написанные с помощью встроенного языка программирования, просты, коротки и результативны. Все математические возможности заключены в небольшом наборе мощных функций, предоставляющих возможность решения равенств, неравенств, систем, матриц. Среда позволяет строить графики, анимации, позволяющие представлять информацию в наглядном виде. Система поддерживает различные графические и текстовые форматы.

Наиболее простым и эффективным для восприятия примером визуализации нелинейных колебаний является визуализация движения двухзвенного математического маятника (рис. 1, а).

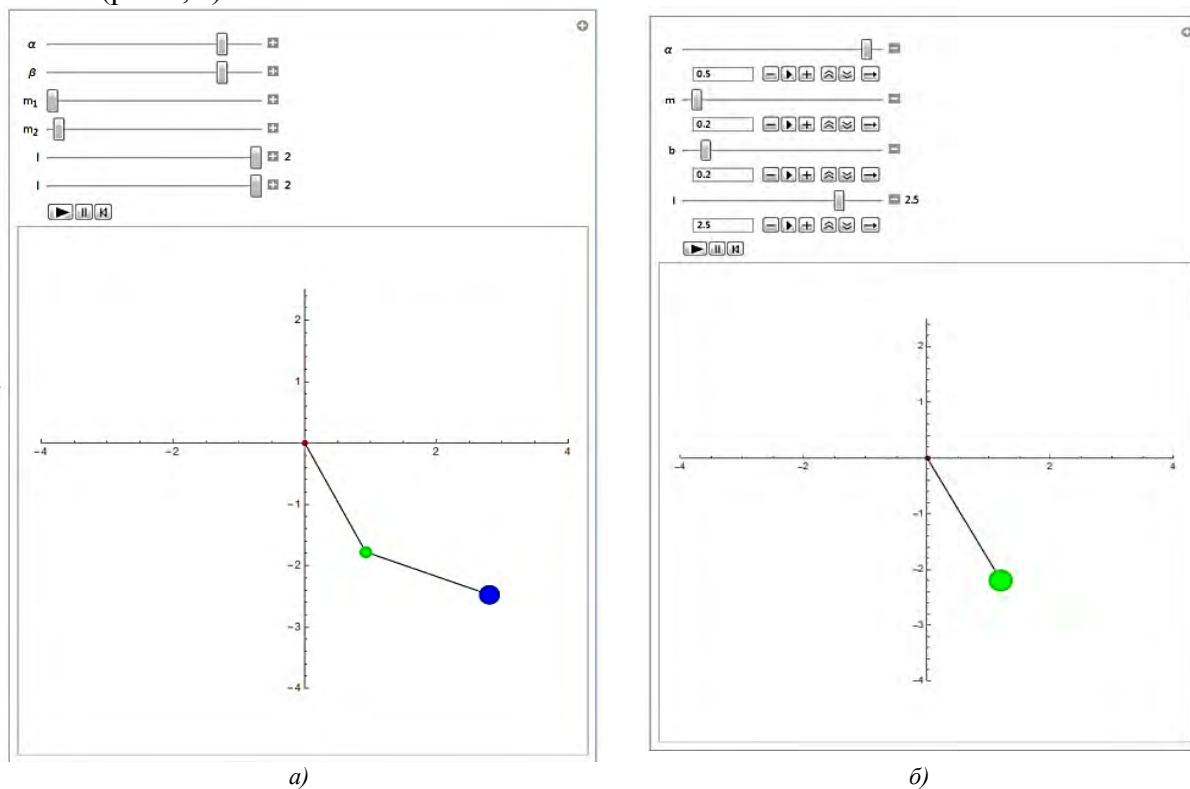


Рис. 1. Анимация движения: а - двухзвенного маятника; б - простого математического маятника (затухающие колебания)

Рассмотрим последовательность создания визуализации с помощью создания анимации движения двойного маятника.

Для описания движения механической системы, состоящей из двух тел, необходимо составить дифференциальные уравнения движения. За их основу возьмём дифференциальные уравнения Лагранжа 2 рода. [1]

В данном случае будем считать, что двухзвенный маятник движется свободно, т.е. обобщённая сила  $Q$  равна 0. За обобщённую координату  $q_1$  примем угол отклонения

маятника от вертикали и обозначим его как  $\theta_1$ , за  $q_2$  – угол отклонения маятника от вертикали  $\theta_2$ .

Для нахождения функции Лагранжа определим координаты  $x$  и  $y$  маятников в момент времени  $t$ . Найдём значения кинетической и потенциальной энергий, определим частные производные. Найденные выражения упростим, подставим в уравнения Лагранжа. Полученные дифференциальные уравнения являются уравнениями движения двухзвенного маятника (рис. 2, а). [2]

Для визуализации системы воспользуемся стандартным набором команд, предоставляемых пакетом Mathematica (рис.2, б) [3].

```

xm1 = l1 * Sin[θ1[t]];
ym1 = -l1 * Cos[θ1[t]];
xm2 = l1 * Sin[θ1[t]] + l2 * Sin[θ2[t]];
ym2 = -l1 * Cos[θ1[t]] - l2 * Cos[θ2[t]];
T1 =  $\frac{m1 * ((\partial_t xm1)^2 + (\partial_t ym1)^2)}{2}$  // Simplify;
T2 =  $\frac{m2 * ((\partial_t xm2)^2 + (\partial_t ym2)^2)}{2}$  // Simplify;
T = T1 + T2 // Simplify;
U = -m1 * g * ym1 - m2 * g * ym2 // Simplify;
L = T - U // Simplify;
Dθ1[t] L;
Dθ2[t] L;
Dθ1'[t] L;
Dθ2'[t] L;
QQ1 := Dt (Dθ1'[t] L) - Dθ1[t] L == 0;
QQ2 := Dt (Dθ2'[t] L) - Dθ2[t] L == 0;
{QQ1, QQ2}
 $\left\{ \frac{1}{2} (-2 g l1 (m1 + m2) \sin[\theta_1[t]] + 2 l1 l2 m2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1'[t] \theta_2'[t]) + \frac{1}{2} (-2 l1 l2 m2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] (\theta_1'[t] - \theta_2'[t]) \theta_2'[t] + 2 l1^2 (m1 + m2) \theta_1''[t] + 2 l1 l2 m2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_2''[t]) = 0, \frac{1}{2} (-2 g l2 m2 \sin[\theta_2[t]] - 2 l1 l2 m2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1'[t] \theta_2'[t]) + \frac{1}{2} (-2 l1 l2 m2 \sin[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1'[t] (\theta_1'[t] - \theta_2'[t]) + 2 l1 l2 m2 \cos[\theta_1[t] - \theta_2[t]] \theta_1''[t] + 2 l2^2 m2 \theta_2''[t]) = 0 \right\}$ 

```

a)

```

In[1]:= Manipulate[
Module[
{f, z, θ1, θ2, x, t},
f = {
Dt ((m1 + m2) * (l1)^2 * θ1'[t] + m2 * l1 * l2 * θ2'[t] * Cos[θ1[t] - θ2[t]]) +
m2 * l1 * l2 * θ1'[t] * θ2'[t] * Sin[θ1[t] - θ2[t]] + (m1 + m2) * 9.81 * l1 * Sin[θ1[t]] == 0,
Dt (m2 * (l2)^2 * θ2'[t] + m2 * l1 * l2 * θ1'[t] * Cos[θ1[t] - θ2[t]]) -
m2 * l1 * l2 * θ1'[t] * θ2'[t] * Sin[θ1[t] - θ2[t]] + m2 * 9.81 * l2 * Sin[θ2[t]] == 0,
θ1[0] = int1, θ2[0] = int2, θ1'[0] = 0, θ2'[0] = 0};
z = Flatten[NDSolve[f, {θ1, θ2}, {t, 0, p}]];
With[{α = θ1[p] /. z, β = θ2[p] /. z},
Graphics[
{Red, Disk[{0, 0}, .050],

```

б)

Рис. 2. Экранные копии фрагментов программы: а – составления и решения дифференциальных уравнений движения двухзвенного маятника; б – последующая визуализация полученных решений в виде анимации

В результате на экран выводится анимация движения двойного математического маятника (см. рис. 1, а). В качестве задаваемых параметров системы можно задать массы маятников, длины нитей и углы их отклонения от вертикали.

Однако наибольший интерес в нелинейных колебательных системах представляет построение и исследование фазовых траекторий маятника, т.е. графиков зависимости  $\theta'[t]$  от  $\theta[t]$ , где  $\theta$  – угол отклонения маятника от вертикали в момент времени  $t$ . [4]

Если требуется представление о возможных движениях нелинейной колебательной системы, то строится семейство траекторий, т.е. фазовый портрет.

Рассмотрим фазовые портреты математических маятников постоянной длины в условиях свободных, затухающих и вынужденных колебаний.

Построим анимации маятников с помощью уравнений Лагранжа 2 рода (рис. 1, б).

В первом случае обобщённая сила равна нулю, т.к. колебания совершаются в отсутствие внешних воздействий за счёт первоначально сообщённой энергии. Фазовый портрет представляет собой совокупность окружностей. В данном случае точка пересечения с осью абсцисс имеет постоянное значение, по которому возможно определить амплитуду колебаний.

Т.к. в данном случае рассматривается идеальный маятник (т.е. колебания без сил сопротивления), то состояние покоя для него невозможно, что характеризуется особой точкой типа центр на фазовой плоскости (рис.3, а).

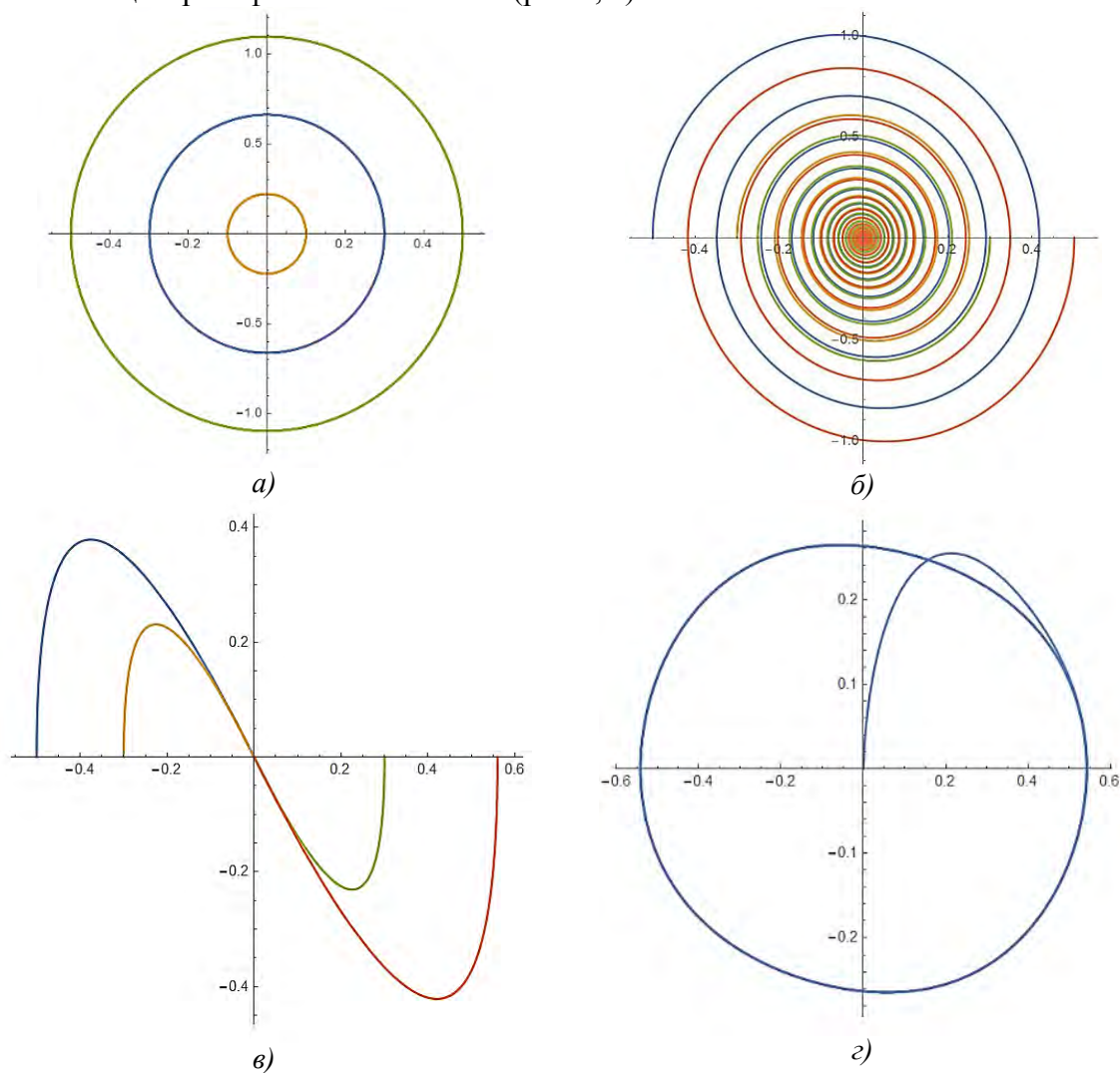


Рис. 3. Фазовые портреты математических маятников постоянной длины в условиях: а - свободных колебаний; б - затухающих колебаний при малом значении демпфирования; в - затухающих колебаний при большом значении демпфирования; г - вынужденных колебаний

Далее рассмотрим колебания маятника в среде с сопротивлением, пропорциональной первой степени скорости. Для этого приложим к системе силу сопротивления среды

$$Q_1 = -b\theta'[t], \quad (1)$$

где  $Q_1$  – сила сопротивления среды,  $b$  – коэффициент сопротивления среды.

По методу, приведённому выше, выведем уравнение Лагранжа для затухающих колебаний математического маятника. Фазовый портрет представляет собой спираль (рис. 3, б), причём, чем меньше демпфирование (гашение колебаний), тем ближе расположены витки друг к другу. Траектории сходятся в особую точку типа устойчивый фокус.

Однако при увеличении силы сопротивления (рис.3, в) фазовый портрет значительно меняется, фазовые траектории стягиваются в особую точку типа устойчивый узел.

Рассмотрим ситуацию, когда к маятнику в среде с сопротивлением приложена вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$Q_2 = H \sin [pt], \quad (2)$$

где  $Q_2$  – вынуждающая сила,  $H$  – амплитуда вынуждающей силы,  $p$  – частота вынуждающей силы.

Фазовый портрет, изображённый на рисунке 3, г, позволяет установить, что траектория нелинейных колебаний выходит из особой точки типа неустойчивый фокус, а также то, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы.

Таким образом, визуализация данных – это важный процесс, способствующий наиболее доступному и понятному представлению информации. Она помогает исследователю объективно рассмотреть объект со всех сторон, выявить его свойства и недостатки. Используя пакет Mathematica, пользователь получает один из самых мощных инструментов вычислений, позволяющий представить любую информацию, независимо от сферы деятельности человека.

#### РЕЗЮМЕ

В статье описан процесс исследования нелинейной динамики колебаний с помощью анимационного и графического представления движения систем. На примере двухзвенного маятника и простого математического маятника представлен порядок создания анимации колебательных систем и произведён анализ различных видов фазовых портретов в зависимости от условий нелинейных колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев, А. П. О движении связанных маятников / А. П. Маркеев // Нелинейная динамика. – 2013. – № 9:1. – С. 27-38.
2. Абросов, Я.А. Анимационная визуализация решения дифференциальных уравнений в пакете МАТЕМАТИКА / Я.А. Абросов, А.В Борисов // Информационные технологии, энергетика и экономика (электроэнергетика, электротехника и теплоэнергетика, математическое моделирование и информационные технологии в производстве). Сб. трудов XII - ой Межд. науч. - техн. конф. студентов и аспирантов. В 3 т. Т 1. – 2015. – С. 167-171.
3. Дьяконов, В. П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах / В. П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 744 с.
4. Беленький, И. М. Введение в аналитическую механику / И. М. Беленький. – М.: Высш. школа, 1964. – 324 с.

#### SUMMARY

*The article presents the research process of the nonlinear dynamics of oscillations by using animation and graphical representation of motion systems. Creating an animation of vibrating systems is presented by the example of the double pendulum and the analysis of various types of phase portraits depending on the conditions of nonlinear oscillations produced on the example of a simple mathematical pendulum.*

**E-mail:** [yaabrosov@inbox.ru](mailto:yaabrosov@inbox.ru)  
[borisowAndrej@yandex.ru](mailto:borisowAndrej@yandex.ru)

Поступила в редакцию 10.10.2015