

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГОПЛОСКОСТНЫХ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

асп. **Чигарев В.А.**, асп. **Конон И.И.**, студ. **Теляк М.О.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Данная работа представляет собой создание численного алгоритма решения контактной задачи осесимметричного тела с поверхностью. Контактная задача в классической постановке предполагает идеальную гладкость поверхностей и сплошность области контактного взаимодействия. В работе представлен типовой алгоритм создания конечно-элементной модели методом линеаризации уравнений напряженно деформированного состояния.

Самой распространенной причиной возникновения дискретности контакта является шероховатость контактирующих поверхностей. Совокупность пятен контакта составляет область фактического контакта. Площадь этой области для реальных сопряжений может составлять десятые или сотые доли номинальной области контакта, которая, как правило, является односвязной и включает в себя все пятна фактического контакта. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик, а также макро- и микрогеометрии взаимодействующих поверхностей [1].

Микрорельеф поверхностей может быть весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу, он может получаться в результате различных видов обработки поверхностей или наноситься искусственно. Для изучения влияния микрорельефа поверхности на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев тел, находящихся в условиях контактного взаимодействия, необходимо решать задачу множественного контакта, т.е. смешанную задачу механики деформируемого твердого тела для системы пятен контакта.

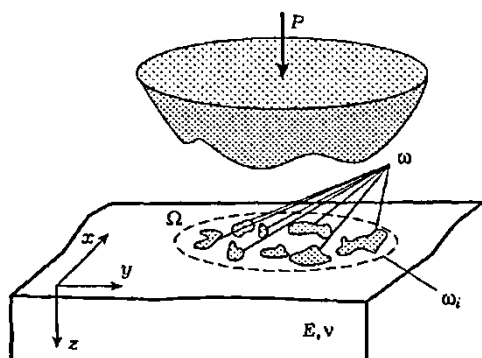


Рис. 1. Контактное взаимодействие двух тел

В достаточно общем виде задача множественного контакта может быть сформулирована в следующем виде. Рассмотрим контактное взаимодействие двух тел (рисунок 1), одно из которых описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством (плоскость Oxy совпадает с границей полупространства, а ось Oz направлена вглубь полупространства). Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на величину D номинальная область контактного

взаимодействия Ω включает в себя конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i .

В пределах каждого пятна контакта действует фактическое давление $p_i(x, y)$ ($x, y \in \omega_i$). Тангенциальные напряжения в областях контакта будем считать пренебрежимо малыми. Под действием давлений $p_i(x, y)$ граница полупространства деформируется, при этом перемещения $u_z(x, y)$ границы в направлении оси Oz связаны с контактными давлениями $p_i(x, y)$ соотношением

$$u_z = A[p_1, p_2, \dots, p_N, \dots]. \quad (1)$$

Оператор A зависит от выбранной модели деформируемого тела. Так, для упругого полупространства соотношение (1) принимает вид

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} \frac{p_i(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}. \quad (2)$$

В каждой области ω_i должно выполняться условие контакта

$$u_z(x, y) = D - F(x, y). \quad (3)$$

Если величина сближения D неизвестна, а задана суммарная нагрузка P , действующая вдоль оси Oz , к уравнениям (2) и (3) следует добавить уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^N \iint_{\omega_i} p_i(x, y) dx dy = P. \quad (4)$$

Система уравнений (2), (3) и (4) может быть использована для определения неизвестных функций распределения фактических давлений $p_i(x, y)$ внутри единичных пятен контакта ω_i .

Наличие микрорельефа на поверхностях взаимодействующих тел изменяет их контактные характеристики на макроуровне, к которым относятся номинальные давления, номинальная область контакта, зависимость внедрения от приложенной нагрузки. Для их определения И.Я. Штаерманом [2] была предложена модель комбинированного основания, при нагружении которого помимо упругих деформаций принимались во внимание дополнительные смещения его границы за счет смятия микронеровностей. Для определения номинального давления $p(x, y)$ и номинальной области контакта ω использовалось интегральное уравнение вида

$$D - f(x, y) = C[p](x, y) + \iint_{\Omega} K(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5)$$

где $f(x, y)$ – функция, описывающая макроформу взаимодействующих поверхностей, $K(x, y, x', y')$ – ядро интегрального уравнения соответствующей контактной задачи без учета шероховатого слоя, D – сближение тел под нагрузкой, $C[p]$ – дополнительное смещение за счет смятия шероховатости.

Функция $C[p]$ может быть построена исходя из модельных описаний взаимодействий шероховатых поверхностей. Метод построения функции дополнительного смещения позволяет представить функцию $C[p]$ в виде

$$C[p](x, y) = -f(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left(\sum_{i=0}^k \iint_{\omega_i} \frac{p_i(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}} - 2\pi R_0 p(x, y) \right), \quad (6)$$

где R_0 – радиус подобласти Ω_0 с центром в точке $(x, y) \in \Omega_0$, включающей пятна контакта ω_i ($i = 0, 1, \dots, k$), внутри которых принимаются во внимание фактические

давления $p_i(x, y)$ (локальный эффект), $h(x, y)$ - функция, описывающая форму неровности при $(x, y) \in \omega_0$. В [3] показана возможность использования для определения функции дополнительного смещения (6) решений периодических контактных задач, в которых пространственное расположение инденторов моделирует параметры микрогеометрии поверхности в окрестности рассматриваемой точки (x, y) , а номинальное давление определяется величиной $p(x, y)$. Проведены расчеты функции $C[p]$ для разных модельных описаний микрогеометрии поверхности, которые показали, что с ростом номинального давления величина дополнительной податливости контакта dC/dp , связанная с наличием микрорельефа, постепенно уменьшается и стремится к нулю при переходе от дискретного контакта к непрерывному.

Полученные соотношения дают возможность рассчитать характеристики номинального и дискретного контакта при взаимодействии упругих тел с учетом их макро- и микрогеометрии.

Математические трудности, связанные с решением контактной задачи в общей постановке, обусловили разнообразие методов и подходов к ее исследованию, приведём к построению решений для более или менее широких классов частных случаев [4]. Обширную группу среди них составляют двумерные стационарные задачи статического контакта, где взаимодействие между телами происходит при полном сцеплении или проскальзывании или с сухим трением, подчиненным закону Кулона.

Двумерная постановка задач существенно упрощает анализ контактных явлений. Вследствие снижения мерности задачи происходит вырождение площадок контакта в отрезки кривых или, в частном случае, прямых линий, лежащих в плоскости меридионального сечения конструкции. Решение контактной задачи сводится в данном случае к определению участков отрыва и прилегания контура взаимодействующих тел, зон сцепления и проскальзывания внутри последних, а также компонентов напряженного и деформированного состояний в плоскости сечения рассматриваемых тел.

Рассмотрим систему взаимодействующих упругих или упругопластических тел, напряженно-деформированное состояние которых может быть описано уравнениями двумерной задачи в цилиндрической или декартовой системе координат.

В обоих случаях область S представлена объединением $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ контактирующих подобластей $S_i (i = \overline{1, N})$ в декартовой системе координат rz . НДС подобластей S_i полагается осесимметричным либо плоским и описывается системой дифференциальных уравнений равновесия осесимметричной

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

или плоской задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать, что граница области S включает совокупность свободных участков контура L , а также общие границы взаимодействующих подобластей L_K , рассматриваемые в качестве предполагаемых зон контакта.

На контуре L полагаются известными компоненты перемещений или напряжений либо формулируются смешанные граничные условия. Кроме поверхностной нагрузки рассматриваемая конструкция может быть подвержена воздействию температурного поля $T(r, z)$, сосредоточенных сил с компонентами P_{rj} , P_{zj} , объемных сил F_r, F_z , обусловленных вращением с угловой скоростью Ω и осевым ускорением ω вдоль оси z . Вместо компонент поверхностной нагрузки P_r и P_z , направленных вдоль осей r и z , можно задать компоненты P_n и P_τ , направленные по нормали n и касательной τ к нагруженной поверхности, расположенной в плоскости rz , что удобно при нагружении давлением некоординатных поверхностей. Местная система nr может быть использована при задании перемещений или смешанных граничных условий. Температурное поле $T(r, z)$ считается заданным в узлах прямоугольной сетки. Температура в промежуточных точках определяется с помощью линейной или квадратичной интерполяции.

Для точек, лежащих на линии раздела L_K контактирующих подобластей S_{i-l}, S_{i+l} граничные условия не могут быть заранее заданы однозначно и формулируются в виде неравенств

$$\begin{aligned} u_n^{i-1} + u_n^{i+1} - \delta_n^i &\leq 0; \\ (u_n^{i-1} + u_n^{i+1} - \delta_n^i) \delta_n^i &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $u_n^{i-1}, u_n^{i+1}, \delta_n^i$ - перемещения точек подобластей и S_{i-l}, S_{i+l} и начальный зазор (натяг) в направлении положительных нормалей контактирующих участков, наклон которых совпадает с направлением общей нормали n ; σ_n^i - напряжение взаимодействия тел в направлении нормали n .

Поскольку задача рассматривается в геометрически линейной постановке, считаем, что контактируют между собой одни и те же точки подобластей S_{i-l}, S_{i+l} через специальный упругий контактный слой S_i свойства которого обеспечивают заданные условия взаимодействия.

При этом нормальные σ_n^i и касательные τ_n^i напряжения подчинены соотношению

$$[\tau_n^i] \leq f_{mp} \sigma_n^i, \quad (10)$$

где f_{mp} - коэффициент сухого трения. Последнее соотношение выполняется за счет проскальзывания контактирующих поверхностей друг относительно друга, сдерживаемых фрикционными касательными напряжениями.

Связь между перемещениями и деформациями определяется следующими линейными соотношениями [5]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_r}{r}, \quad (11)$$

где последнее равенство используется для решения осесимметричной задачи.

Алгоритмом решения задачи предусмотрено последовательное разбиение области S конструкции на составляющие ее конечные элементы. Первоначально рассматриваемый объект расчленяется на отдельные подобласти S_i , отличные между собой по группе признаков. К последним относятся механические свойства материалов, различие пластических свойств, вида напряженного состояния, принадлежность подобласти контактному слою с определенным механизмом взаимодействия и т. п.

Следует отметить, что при наличии упругого слоя между телами условия непроникания выполняются приближенно, так как все же происходит некоторое сжатие слоя.

Между взаимодействующими подобластями S_{i-1} , S_{i+1} в пределах возможной области контакта вводится специальный контактный слой S_{ik} , наделённый особыми свойствами. Такой приём позволяет внешнюю нелинейность, обусловленную граничными условиями, свести к внутренней нелинейности контактного слоя и осуществить переход к рассмотрению задачи взаимодействия упругих тел, связанных нелинейным упругим слоем.

Решение краевой задачи проводится по МКЭ в перемещениях с использованием вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta(\Pi - A_\Omega - A_p) = 0, \quad (12)$$

где Π , A_Ω , A_p - соответственно потенциальная энергия деформации упругой системы, работа объёмных и поверхностных сил, которые для осесимметричной задачи запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi \iint_{S_i} \left[\sigma_{rr} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^0) + \sigma_{zz} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^0) + \sigma_{\theta\theta} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^0) + \sigma_{rz} (\gamma_{rz} - \gamma_{rz}^0) \right] r dS_i; \\ A_\Omega &= 2\pi \iint_{S_i} \left[\rho_i u_r \Omega^2 r + \omega u_z \right] r dS_i; \\ A_p &= 2\pi \int_{L_r} P_r u_r r dL_r + 2\pi \int_{L_z} P_z u_z dL_z + 2\pi \sum_j (P_{rj} u_{rj} + P_{zj} u_{zj}) r_j. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь ρ_i - плотность материала; u_r , u_z - перемещения точки тела в направлении осей r и z .

Одним из узловых моментов при решении задач МКЭ является выбор типа конечного элемента. В предлагаемой реализации в качестве базового используется изопараметрический косоугольный четырехугольник с узлами в вершинах (рисунок 2) и билинейной аппроксимацией перемещений внутри элемента. Использование четырехугольных элементов в сочетании с топологическими регулярными сетками дискретизации не требует построения матрицы индексов и значительно сокращает объем входной информации о геометрии объекта. Нумерация элементов и узловых неизвестных естественным образом проводится по рядам топологически регулярной сетки в направлении меньшего числа узлов.

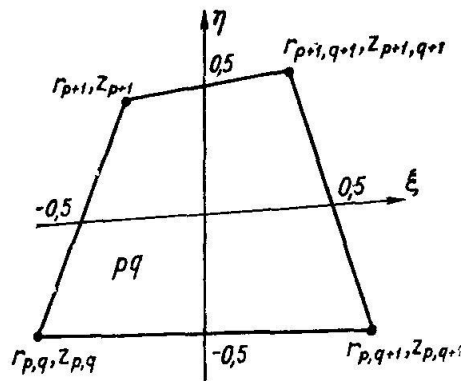


Рис. 2. Базовый изопараметрический конечный элемент

Рассмотрим контактный слой S_{ik} , находящийся между подобластями S_{i-1} , S_{i+1} (рисунок 3). Будем считать, что контактирующие тела сближаются без взаимодействия на минимальную толщину слоя δ_{0n} , которая может быть равной толщине прокладки или приведенной высоте шероховатостей. Текущая толщина слоя Δ , определяется геометрией контактирующих тел и в случае различной кривизны взаимодействующих поверхностей является переменной. Отклонение ее от величины δ_{0n} объявляется

зазором ($\delta_{ni} = \Delta_i - \delta_{0i} > 0$) либо натягом ($\delta_{ni} = \Delta_i - \delta_{0i} < 0$) и учитывается при формировании матрицы жесткости в виде начальной деформации слоя.

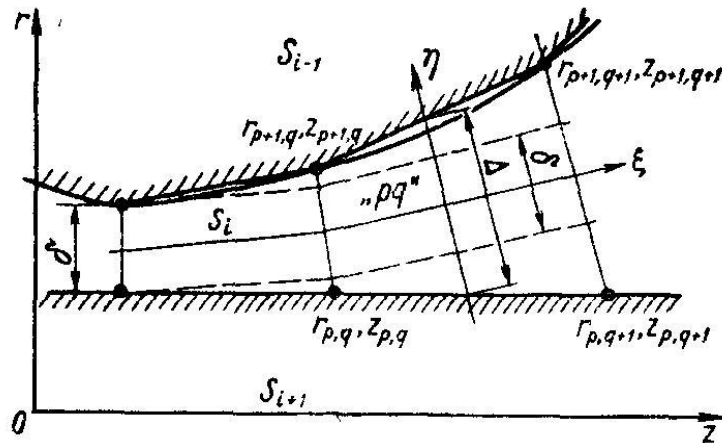


Рис. 3. Модель контактного конечного элемента

Поскольку интегрирование при вычислении матрицы жесткости и определение деформаций элементов проводятся исходя из геометрии контактного слоя, модули упругости и сдвига приводятся к минимальной толщине слоя по формулам

$$E_{ik}^* = \frac{E_i \Delta_i}{\delta_{0i}}; G_{ik}^* = \frac{G_i \Delta_i}{\delta_{0i}}. \quad (14)$$

Следует отметить, что в рамках рассмотренного алгоритма с использованием контактного слоя легко реализовать и более сложные условия взаимодействия между телами, например ввести условия неидеальной односторонней связи с учетом напряжений отрыва или скалывания по поверхности контакта.

Для решения физически нелинейной контактной задачи в данной реализации используется метод переменных параметров упругости. В точках, где обнаружена пластическая деформация, упругие свойства изотропного материала пересчитываются согласно теории малых упругопластических деформаций [6] по формулам

$$G^* \mu(T) = \frac{\sigma_i^\mu(\epsilon_i T)}{3\epsilon_i};$$

$$A_{ii}^{*\mu}(T) = \frac{4}{9} \frac{\sigma_i^\mu(\epsilon_i T)}{\epsilon_i} + \frac{A_{ii}^\mu(T) + 2A_{ij}^\mu(T)}{3}; \quad (15)$$

$$A_{ij}^{*\mu}(T) = \frac{2}{9} \frac{\sigma_i^\mu(\epsilon_i T)}{\epsilon_i} \frac{A_{ii}^\mu(T) + 2A_{ij}^\mu(T)}{3} \quad (i, j = r, z, \theta),$$

где ϵ_i – интенсивность деформации; $\sigma_i^\mu(\epsilon_i T)$ – интенсивность напряжений, определяемая по диаграмме деформаций μ -го материала.

Итерационный процесс решения упругопластической задачи идёт до тех пор, пока накопление по всем неупругим конечным элементам разности интенсивности деформаций текущих точек и начала пластичности на данной и предыдущей итерации не будут отличаться на заданную малую величину.

Изменение границ контактных площадок зон проскальзывания, а также появление и развитие пластических зон в процессе деформирования материала приводят к необходимости коррекции жесткостных характеристик рассматриваемой конструкции. Описанный метод позволяет учесть все имеющиеся нелинейности и найти искомые пара-

метры линеаризованной задачи [7]. Схема итерационного процесса может быть представлена уравнением

$$[B_{ij}(\varphi)]^{N-1} \{u\}^N = \{b_j\}^{N-1}. \quad (16)$$

Где φ – некоторый параметр, определяющий нелинейность процесса, N – номер итерации.

Такой подход обеспечивает быструю сходимость обоих процессов и обычно требует выполнения не более 10 итераций. Задача является решённой после выполнения заданного N_{\max} числа итераций либо при одновременном выполнении на определённом шаге «контактного» и «пластического» критериев окончания счёта. Зона пластичности, контакта-отрыва, а также участки проскальзывания определяются с точностью до размеров конечного элемента.

РЕЗЮМЕ

Получены основные соотношения для проведения численных экспериментов контакта двух упругопластических тел методом конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзикович, С.М. Механика контактных взаимодействий / С.М. Айзикович, В.М. Александров, И.И. Аргатов и др. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 418-434 с.
2. Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. 270с.
3. Горячёва, И.Г. Расчёт контактных характеристик с учётом параметров макро- и микрогеометрии поверхности / И.Я. Штаерман // Трение и износ 1999, Т. 20 № 3. 239-248 с.
4. Подгорный, А.Н. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.М. Подгорный, П.П. Гонтаровский, Б.Ч. Киркач и др. – Киев: Наук. Думка, 1989. – 16 с.
5. Абрамян, Б.Л. Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара/ Б.Л. Абрамян, А.А. Баблюян// Прикладная математика и механика 26, 1962 - 471 с.
6. Илюшин, А.А. Пластичность / А.А. Илюшин. – М. : Л. : Гостехиздат, 1948 – 376 с.
7. Биргер, И.А. Расчёт конструкций с учётом пластичности и ползучести / И.А. Биргер// Изв. АН СССР. Механика – 1965, 113 с.

SUMMARY

We received some basic rations for the numerical experiments of contact between two elastoplastic bodies by the final elements method.

E-mail: vitalikchigir@yandex.ru
ivankonon2@gmail.com

Поступила в редакцию 12.11.2015