УДК 539.3

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

к.ф.-м.н. **Акимов В.А., Гончарова С.В.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Дифференциальное уравнение теплопроводности для пластины большой толщины неограниченных размеров, нагреваемой сосредоточенным источником тепла с объемной плотностью теплового потока W_0 в цилиндрической системе координат, начало которой совмещено с источником, имеет вид [1]

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{W_0}{\lambda} \qquad (1)$$

где a – коэффициент температуропроводности;
λ – коэффициент теплопроводности материала пластины.

Построим решение уравнения (1) в операторной форме, считая упомянутые выше физические характеристики материала постоянными величинами, не зависящими от координат, времени, температуры.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$LT=W \qquad (2)$$

Здесь обозначено: $W=\frac{W_0}{\lambda}$; $L=\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}-\Delta^2$;

$\Delta^2=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - осесимметричный оператор Лапласа

Решение уравнения (2) представим в виде решения однородного уравнения

$$L\widetilde{T}=0 \qquad (3)$$

и частного решения

$$LT^*=W \qquad (4)$$

Таким образом, $T=\widetilde{T}+T^*$ где в соответствии с [2], [3]

$$\widetilde{T}=A(\Delta)e^{at\Delta^2}f(r;z) \qquad (5)$$

$$T^*=a\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau \qquad (6)$$

В формулах (5) и (6) $A(\Delta)$– произвольная операторная функция; $f(r;z)$ – произвольная аналитическая функция двух переменных r и z; $W(r;z;t)$ – заданная аналитическая функция трех переменных r, z и t; τ – параметр интегрирования; t – время; a – коэффициент температуропроводности;

$\Delta^2=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - осесимметричный оператор Лапласа.

Убедимся в справедливости формул (5) и (6) непосредственно. Учитывая в (5) перестановочность операторного коэффициента $A(\Delta)$ операторной функции $e^{at\Delta^2}$ и производной $\frac{\partial}{\partial t}$ устанавливаем

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}-\Delta^2\right)\left[A(\Delta)e^{at\Delta^2}f(r;z)\right]=A(\Delta)\Delta^2e^{at\Delta^2}f(r;z)-\Delta^2A(\Delta)e^{at\Delta^2}f(r;z)=0\,.$$

Для проверки (6) будем использовать известную формулу [2] интегрирования функции под знаком интеграла с переменными пределами, на основании которой записываем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau=a\nabla^2\int_0^t e^{a(t-\tau)\nabla^2}W(r;z;\tau)d\tau+W(r;z;t)$$

В результате получим

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}-\Delta^2\right)\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau=a\Delta^2\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau-$$

$$-a\Delta^2\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau+W(r;z;\tau)dt=W(r;z;\tau)dt$$

что требовалось установить.

Основываясь на понятии обратного оператора и обозначая $\frac{\partial}{\partial t}=\partial_t$, из (4) и (6) определяем

$$a\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau=\left(a^{-1}\partial_t-\Delta^2\right)W(r;z;\tau)dt\,.$$

Раскладывая $\left(a^{-1}\partial_t-\Delta^2\right)^{-1}$ в ряд вида $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$, окончательно получаем формулу, удобную в ряде случаев для упрощения используемой на практике техники вычислений связанных с конкретным набором аналитически задаваемой функции $W(r;z;t)$.

$$a\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2}W(r;z;\tau)d\tau=a\partial_t^{-1}(1+a\partial_t^{-1}\Delta^2+a^2\partial_t^{-2}\Delta^4+\ldots+a^n\partial_t^{-n}\Delta^{2n}+\ldots)W(r;z;\tau)dt \quad (7)$$

Раскладывая теперь подынтегральную функцию $e^{a(t-\tau)\Delta^2}$ в ряд Маклорена $e^{a(t-\tau)\Delta^2}=1+\frac{a(t-\tau)\Delta^2}{1!}+\frac{a^2(t-\tau)^2\Delta^4}{2!}+\ldots+\frac{a^n(t-\tau)^n\Delta^{2n}}{n!}+\ldots$ и приравнивая выражения при одинаковых степенях $a^n\Delta^{2n}$, получим

$$\frac{W(r;z;\tau)}{\partial_t^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^t(t-\tau)W(r;z;\tau)d\tau \quad (8)$$

Формула (8) отражает известное понятие обратного оператора [3]. Из (8) следует равенство $\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1}\int_0^t(t-\tau)^nW(r;z;\tau)d\tau=W(r;z;\tau)$.

Убедимся в его справедливости. Как и выше, определяем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\tau)^n W(r;z;\tau)d\tau = n\int_0^t (t-\tau)^{n-1} W(r;z;\tau)d\tau + (t-\tau)^n W(r;z;\tau)\Big|_{\tau=t} = n\int_0^t (t-\tau)^{n-1} W(r;z;\tau)d\tau,$$ а

значит $\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1}\int_0^t (t-\tau)^n W(r;z;\tau)d\tau = W(r;z;\tau)$, что и требовалось установить.

Итак, общее решение уравнения (2) принимает вид

$$T = A(\Delta)e^{at\Delta^2} f(r;z)d\tau + a\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2} W(r;z;\tau)d\tau = e^{at\Delta^2}\left(A(\Delta)f(r;z) + a\int_0^t e^{a(t-\tau)\Delta^2} W(r;z;\tau)d\tau\right) \quad (9)$$

Неизвестную функцию f(r; z)определяем из начального условия

$$T(r;z;t)\Big| = \varphi(r;z) \quad (10)$$

Тогда из (9) находим $f(r;z) = A^{-1}(\Delta)\varphi(r;z)$.

Подставляя найденное значение обратно в (9), окончательно получаем

$$T = e^{at\Delta^2}\left(\varphi(r;z) + a\int_0^t e^{=a\tau\Delta^2} W(r;z;\tau)d\tau\right) \quad (11)$$

Построенная таким образом функция (11) точно удовлетворяет исходному уравнению (2) и начальному условию (10) для любых заданных функций $\varphi(r;z)$ и $W(r;z;\tau)$.

РЕЗЮМЕ

В статье операторным методом построено решение уравнения теплопроводности. Подбирая определенным образом функции $\varphi(r;z)$ и $W(r;z;\tau)$, можно использовать разработанный алгоритм для решения разнообразных задач теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Недосека А.Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций.- К.:1998.-640 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. II – М.:1974.-656 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости.-Мн.:2003.-101 с.

SUMMARY

It was built the solution of the thermal conductivity of the operator method in the article. Selecting a function $\varphi(r;z)$ *and* $W(r;z;\tau)$ *in a certain way, you can use the algorithm developed for solving various problems of heat conduction .*

E-mail: vakim50@mail.ru

Поступила в редакцию 22.10.2015