УДК 539.3

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

к.т.н. **Косых Э.Г.**

Введение. Более ста лет, начиная с работ Гринхилла [1], критическое – в смысле Эйлера – значение интенсивности сжимающей продольной нагрузки, например вес вертикально ориентированной консольной стойки, определено неверно. В предлагаемой работе показано, что для упомянутой стойки меньшее критическое значение весовой нагрузки на 22,5% ниже, чем общепризнанное, которое приводится в научной литературе [2,3]. К сожалению этот результат «прижился» не только в научной литературе, но стал содержанием справочников и учебников [4, 5]. Важно заметить, что новое критическое значение нагрузки - это не вычислительная проблема, а проблема корректности постановки краевой задачи.

Решение краевой задачи продольного изгиба. Известно [6], что линейная система уравнений с произвольными матрицами- коэффициентами

$$Y'' + f_1(x)\cdot Y' + f_2(x)\cdot Y = 0.$$

может быть приведена к виду помощью определенной функции преобразования V(x):

$$Y'' + In(x)\cdot Y = 0$$

Матрица $In(x)$ определяется как инвариант системы и определяет решение этой системы. В работах [7,8] были введены и определены функции, которые являются фундаментальными решениями системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и были представлены сходящимися рядами :

$$Y_I = Com(In(x)) = I + \sum_1^n (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\max\sum_{t=1}^n k_t} x^m \sum_{(\sum_{t=1}^n k_t)=m} \prod_{t=1}^n In_{k_t} a_t\,; \tag{1}$$

$$Y_{II} = Sim(In(x)) = xI + \sum_1^n (-1)^{2n+1}\cdot x^{2n+1} \sum_{m+0}^{\max\sum_{t+1}^n k_t} x^m \sum_{(\sum_{t=1}^n k_t)=m} \prod_{t=1}^n In_{k_t} b_t\,.$$

Здесь $In(x)$ – матрица–инвариант системы дифференциальных уравнений; In_{k_i} - соответствующие матричные коэффициенты при разложении матрицы-инварианта в степенной ряд. Скалярные множители $a_{n_t i}$, $b_{n_t i}$ определены формулами

$$a_{n_t i} = \{k_i!(2n_t - 1 + \sum k_j)(2n_t + \sum k_j)\}^{-1}, \tag{2}$$

$$b_{n_t i} = \{k_i!(2n_t + \sum k_j)(2n_t + 1 + \sum k_j)\}^{-1}.$$

Под знаками «произведение» в (1) стоят произведения производных инварианта соответствующего порядка при значении $x = 0$ со своими коэффициентами (2). С помощью функций (1) решаем задачу о критической нагрузке и собственных формах для стойки, сжатой распределенной нагрузкой постоянной интенсивности. Уравнение продольного изгиба имеет вид

$$(Y'')'' + (\frac{pl^3}{EI} x\, Y')' = 0; \tag{3}$$

Здесь p – интенсивность распределенной нагрузки; l, EI –длина и изгибная жесткость стойки.

Обозначим $\beta^2 = \dfrac{pl^3}{EI}$ Очевидно, что для уравнения (3) существует первый интеграл

$$Y''' + \beta^2 x\, Y' = 0; \qquad (4)$$

Значение первого интеграла полагают равным нулю, C = 0, исходя из того, что $Y'''(0)$=0

Преобразуем (3) к матричному виду в инвариантной форме: $(Y)'' + In(x)\cdot(Y) = 0;$

$$In(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5\beta^2 & 0 \\ 0 & 0.5\beta^2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.25\beta^4 & 0 \end{pmatrix} x^2;$$

Рассмотрим теперь классическое решение, следуя [2,3]. В обоих случаях, как, впрочем, и во многих других, исходным для решения задачи берут уравнение третьего порядка (4): Вводят новую переменную $Y' = V$, и получают уравнение в инвариантной форме, то есть $V'' + \beta^2 x V = 0$. В данном случае речь идет о скалярном инварианте или матричном, но с матрицей первого порядка: $In(x) = (\beta^2)\, x$. Введем обозначения для производных инварианта прописными буквами: $In_0(0) = A, In_1(0) = B, In_2(0) = C$, тогда в первом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = 0.5\beta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = 0.5\beta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все другие производные тождественно равны нулю. Во втором случае ненулевой производной будет только первая, то есть $B = (\beta^2)$. Подставим полученные значения производных в (1), Тогда решения примут вид:

$$Y_I = I - x^2[\frac{A}{0!\cdot 1\cdot 2} + \frac{B}{1!\cdot 2\cdot 3}x + \frac{C}{2!\cdot 3\cdot 4}x^2] + x^4[(\frac{AB}{0!\cdot 1\cdot 2\cdot 1!\cdot 4\cdot 5} + \cdots)x +$$

$$Y_{II} = xI - x^3[\frac{A}{0!\cdot 2\cdot 3} + \frac{B}{1!\cdot 3\cdot 4}x + \frac{C}{2!\cdot 4\cdot 5}x^2] + x^5[(\frac{AB}{0!\cdot 2\cdot 3\cdot 1!\cdot 5\cdot 6} + ..)x + \cdots. \qquad (5)$$

Во втором случае решения будут:

$$V_I = I - x^3\,\frac{\beta^2}{3!} + x^6\,\frac{\beta^4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - ....$$

$$V_{II} = xI - x^4\,\frac{\beta^2}{3\cdot 4} + x^7\,\frac{\beta^4}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - ..... \qquad (6)$$

Эти степенные ряды суть ни что иное, как функции Бесселя $J_\nu(x\}$ дробного индекса $\nu = \pm 1/3$, первого рода.

Критическая нагрузка и собственные функции. Решения (1) относятся к преобразованному уравнению. Поэтому могут возникнуть проблемы при формировании граничных условий при постановке краевых задач. Необходимо вернуться к исходным переменным, используя ту же функцию преобразования $V(x)$ Тогда

$$\begin{bmatrix} Y_I \\ Y_{II} \end{bmatrix} = V\cdot Com(In(x))\cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + V\cdot Sim(In(x))\cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Определим постоянные интегрирования (C), (D) начальными параметрами $Y_I(0), Y_{II}(0)$.

Подставим значения этих постоянных, получим:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\cdot Com(In,x) - V\cdot Sim(In,x)\cdot V'(0) & V\cdot Sim(In,x) \\ ((V\cdot Com(In,x))' - (V\cdot Sim(In,x)\cdot V'(0))') & (V\cdot Sim(In,x))' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix}' \\ \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Имея это решение общего вида, нет трудностей формулировать граничные условия:

$$Y_1(1)=0; Y_1'(1)=0; Y_2'(1)=0; Y_2(0)=0$$

Подчиняя решение (6) граничным условиям получим, например, для стойки:

$$\left(\begin{bmatrix} (V\cdot Com(In,1) - V\cdot Sim(In,1)\cdot V'(0)) & V\cdot Sim(In,1) \\ (V\cdot Com(In,1) - V\cdot Sim(In,1)\cdot V'(0))' & (V\cdot Sim(In,1))' \end{bmatrix}\right)\cdot \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ 0 \\ Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (8)$$

Для существования нетривиального решения здесь необходимо, чтобы детерминант матрицы–множителя в (8) слева – равнялся нулю. В рассматриваемом примере – это будет детерминант третьего порядка, конкретный вид которого можно получить помощью (5). Другое решение дается общепринятой постановкой задачи и, как было отмечено выше, сводится к определению корней функции Бесселя. Граничные условия краевой задачи в исходных переменных примут вид:

$$Y'(1)=0;\ Y''(0)=0.$$

Тогда, полагая $x = 1$, аналогично (8), получим с учетом (5):

$$[(I - \frac{\beta^2}{3!} + \frac{\beta^4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - ....) \quad (I - \frac{\beta^2}{3\cdot 4} + \frac{\beta^4}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - .....)] \begin{pmatrix} Y'(0) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Решая (9) или (8) в других случаях, будут получены собственные значения соответствующих краевых задач Конечно нас интересуют меньшие из них и соответствующие этим числам собственные формы, в данном случае – формы выпучивания, Этот вопрос решают формулы (7), Если подставить собственное значение в (7), выбрать линейно независимые уравнения, нормировать подходящим образом правый столбец, то , решая систему, получим коэффициенты собственной формы.

Выводы:

1. Полученные решения (1) позволяют эффективно и правильно формулировать и решать краевые задачи строительной механики, если модель описана уравнениями с переменными коэффициентами
2. Решая (9), получим критическое значение силового параметра $\beta_{kr1}^2 = 7.84$, что естественно повторяет общеизвестное значение. Обратим внимание на тот факт, что краевая задача поставлена без учета всех граничных условий, и можно сомневаться «задача ли это о продольном изгибе стойки?».
3. Решая (8) с учетом (4;4а), критическое значение силового параметра будет $\beta_{kr1}^2 = 6.41$.
4. Сравнивая общепринятое значение с вновь полученным, видим, что оно завышено на 22.5%.
5. Как и должно быть, в обоих случаях существуют следующие (большие) значения собственных чисел, которым соответствуют высшие собственные формы выпучивания. В задаче (п.2) $\beta_{kr2}^2 = 56.3$, что почти на порядок больше, чем 7.84. В то же время решение (п.3) определяет второе значение критического параметра «близкое» к первому, т.е. $\beta_{kr2}^2 = 10.26$, Соответственно и собственные формы

геометрически очень похожи, третье собственное значение будет равно $\beta_{kr3}^2 = 58.2$.

Следовательно, общепринятое решение «пропускает» одну из форм продольного изгиба стойки. Более того [8] если ввести параметр изменения жесткости (увеличение жесткости к (основанию), то с увеличением этого параметра первое критическое значение и второе сближаются; и после совпадения этих значений стойка может потерять устойчивость только согласно форме, близкой к третьей, то есть при очень большой интенсивности *p*, более чем: $p_{kr} = 58.2 EI/l^3$ Этот факт полностью «потерян» общепринятым решением.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена устойчивость сжатых стержней под действием неравномерно распределенной нагрузки. Приведено аналитическое решение и численные результаты для двух видов граничных условий. Показано, что поправки в известное решение составляют до 24 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenchill, A. On height consistent with stability / A. Greenchill // Proc. Cambr. Phil. Soc. 4. 1881. P. 65-75.
2. Динник, А. Избранные труды, т.2. изд. АН УССР, Киев, 1955,73-86.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир.— М.:изд. Наука. 1967. С.133-139
4. Феодосьев, В. Сопротивление материалов / В. Феодосьев. – М.: изд. Наука. 1974. С. 427-477.
5. Биргер, И.А. Расчет на прочность деталей машин / И.А. Биргер и др. – М: Машиностроение, 1966, 459с.
6. Степанов, В. Курс дифференциальных уравнений / В. Степанов. – М.: Физматгиз. 1959, с. 240 – 245.
7. Косых, Э.Г. Продольно- поперечный изгиб трехслойных стержней / Э.Г. Косых //Вестник СамГУ, Естественная серия. 2008.№8/1(67). С. 390-399.
8. Косых, Э.Г. Критическая нагрузка для сжатой стойки переменной жесткости / Э.Г. Косых, Д.В. Сейфер // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 41–45.

SUMMARY

It was built the solution of the thermal conductivity of the operator method in the article. Selecting a function $\varphi(r;z)$ *and* $W(r;z;\tau)$ *in a certain way, you can use the algorithm developed for solving various problems of heat conduction.*

E-mail: ed-ksykh@rambler.ru

Поступила в редакцию 10.11.2015

УДК 629.33

ВЛИЯНИЕ СМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ В ПОГРУЗЧИКЕ

к.т.н. **Сафонов А.И.,** асп. **Евдокимова В.С.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

В условиях дорожного и коммунального строительства с увеличение земляных и погрузочно-разгрузочных работ в ограниченном пространстве возникает необходи-