



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Теория механизмов и машин»

П. П. Анципорович  
В. К. Акулич  
Е. М. Дубовская

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ,  
МАШИН И МАНИПУЛЯТОРОВ.  
КИНЕМАТИКА**

*Пособие*

Минск  
БНТУ  
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теория механизмов и машин»

П. П. Анципорович  
В. К. Акулич  
Е. М. Дубовская

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ,  
МАШИН И МАНИПУЛЯТОРОВ.  
КИНЕМАТИКА

Пособие  
для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2015

УДК 621.01(075.4)  
ББК 34.41я7  
А74

Рецензенты:  
*А. Н. Орда, А. М. Тареев*

**Анципорович, П. П.**

А74 Теория механизмов, машин и манипуляторов. Кинематика : пособие для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Е. М. Дубовская. – Минск : БНТУ, 2015. – 36 с.  
ISBN 978-985-550-572-4.

Методическое пособие представляет собой текст лекций по одному из основных разделов дисциплины «Теория механизмов и машин». Рассматривается методика выполнения кинематического анализа рычажных механизмов методом планов и аналитическим методом.

Рекомендуется для студентов-заочников машиностроительных специальностей.

УДК 621.01(075.4)  
ББК 34.41я7

**ISBN 978-985-550-572-4**

© Анципорович П. П., Акулич В. К.,  
Дубовская Е. М., 2015  
© Белорусский национальный  
технический университет, 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Задачи и методы кинематического анализа рычажных механизмов .....	4
2. Кинематический анализ рычажных механизмов методом планов .....	4
2.1. Масштабные коэффициенты .....	4
2.2. Построение планов положений механизма .....	5
2.3. Построение планов скоростей и ускорений механизма .....	7
2.3.1. Основные сведения из кинематики плоского движения .....	7
2.3.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма .....	11
2.3.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника .....	17
2.3.4. Кинематический анализ кулисного механизма .....	21
3. Кинематический анализ рычажных механизмов аналитическим методом .....	27
3.1. Функции положения точек и звеньев. Аналоги скоростей и ускорений .....	27
3.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма .....	28
4. Примеры кинематического анализа рычажных механизмов .....	31
Литература .....	36

# 1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Кинематический анализ механизма состоит в определении движения его звеньев по заданному закону движения начальных звеньев.

*Основными задачами* кинематического анализа являются:

- 1) определение положений точек и звеньев, траекторий движения точек звеньев;
- 2) определение аналогов скоростей точек и звеньев (передаточных функций) и аналогов ускорений (производных передаточных функций);
- 3) определение линейных скоростей и ускорений точек, угловых скоростей и ускорений звеньев.

В связи с тем, что скорости и ускорения точек и звеньев зависят от сил и моментов сил, а также от масс и моментов инерции звеньев, то они могут быть определены только после динамического исследования машинного агрегата.

Методы кинематического анализа можно разделить на графические (метод планов, метод кинематических диаграмм), аналитические (метод замкнутых векторных контуров, метод преобразования координат с использованием матриц) и экспериментальные.

## 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПЛАНОВ

### 2.1. Масштабные коэффициенты

В теории механизмов и машин многие задачи решаются графически, поэтому для изображения каких-либо физических величин вводится понятие масштабных коэффициентов.

Масштабный коэффициент показывает, сколько единиц той или иной физической величины приходится на 1 мм отрезка, изображающего эту величину.

Так, если звено длиной  $l_{OA} = 0,1$  м изображается на чертеже отрезком  $OA = 50$  мм, то масштабный коэффициент длины

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{0,1}{50} = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Аналогично, если отрезок  $pa = 60$  мм изображает вектор скорости  $V_A = 6$  м/с, то масштабный коэффициент скорости

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{6}{60} = 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

## 2.2. Построение планов положений механизма

**План положений механизма** – графическое изображение кинематической схемы механизма, соответствующей определенной обобщенной координате, выполненной с использованием масштабного коэффициента длины  $\mu_l$ .

В связи с периодичностью движения звеньев обычно производится построение нескольких планов положений механизма с определенным шагом по обобщенной координате за один цикл. Исследование движения звеньев за цикл начинается с построения плана положения механизма, соответствующего наиболее удаленному положению выходного звена. Затем строятся положения начального звена через заданный шаг обобщенной координаты и методом засечек положения остальных звеньев.

Поставленную задачу рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 1). Заданными являются размеры  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{AS_2}$  и  $e$ . Требуется построить 8 планов положений.

Приняв масштабный коэффициент  $\mu_l$ , определяем чертежные размеры звеньев:

$$OA = \frac{l_{OA}}{\mu_l}; \quad AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}; \quad AS_2 = \frac{l_{AS_2}}{\mu_l}; \quad E = \frac{e}{\mu_l}.$$

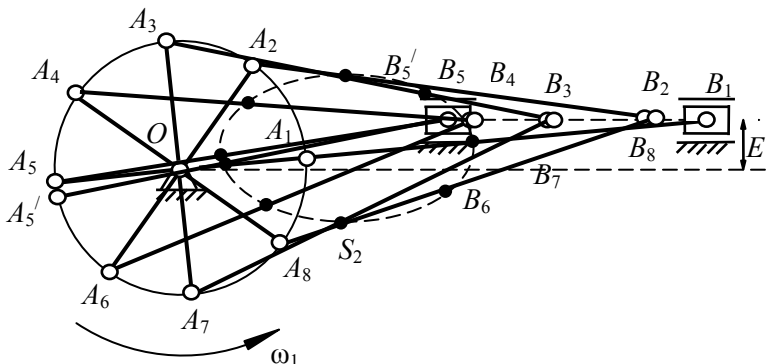


Рис. 1. Кривошипно-ползунный механизм

Вначале радиусом  $OA$  проводим окружность, являющуюся траекторией точки  $A$ . Наиболее удаленным является положение точки  $B$ , когда звенья  $OA$  и  $AB$  вытягиваются в одну линию (положение 1), т. е.  $OB = OA + AB$ .

Для получения положения точки  $B$  на направляющей ползуна из центра  $O$  делаем засечку радиусом  $OB$ , получая точку  $B_1$ . Соединяем точки  $O$  и  $B_1$  прямой линией и на пересечении этой прямой с окружностью получаем точку  $A_1$ .

Затем строятся последующие положения кривошипа через  $45^\circ$  в направлении его вращения (точки  $A_2, A_3$  и т. д.). Из этих точек делаем засечки на направляющей радиусом  $AB$ , получая точки  $B_2, B_3$  и т. д. Изображение звена 2 во всех по-

ложениях получим соединением точек  $A_2$  и  $B_2$ ,  $A_3$  и  $B_3$  и т. д. Используя размер  $AS_2$ , аналогично получим положения точки  $S_2$  и ее траекторию.

Второе крайнее положение точки  $B$  ( $B_{5'}$ ) получим, сделав засечку на направляющей ползуна радиусом  $OB = AB - OA$ .

## 2.3. Построение планов скоростей и ускорений механизма

### 2.3.1. Основные сведения из кинематики плоского движения

При составлении векторных уравнений для построения планов скоростей и ускорений встречаются два основных случая.

1. Две точки принадлежат одному звену и удалены друг от друга на расстоянии  $l_{AB}$  (рис. 2, а).

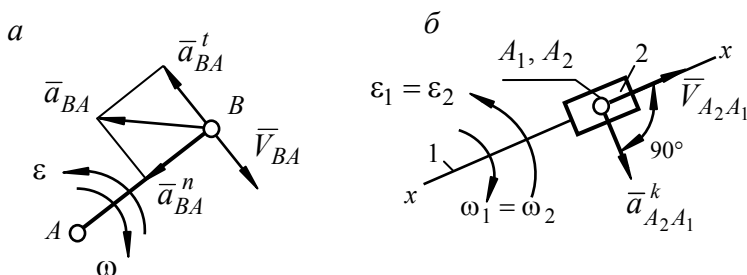


Рис. 2

Звено  $AB$  совершает плоскопараллельное движение. Из теоретической механики известно, что в этом случае движение какой-либо точки звена (например, точки  $B$ ) можно представить состоящим из двух движений: 1) из движения какой-либо другой точки этого звена (например, точки  $A$ ); 2) из враща-



тельного движения точки  $B$  вокруг точки  $A$ . В соответствии с этим векторное уравнение, связывающее скорости указанных точек, имеет вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки  $B$  во вращательном движении звена  $AB$  вокруг точки  $A$  (кратко: относительная скорость), причем  $\vec{V}_{BA} \perp AB$ .

Скорость  $V_{BA}$  и угловая скорость звена  $\omega$  связаны соотношением

$$V_{BA} = \omega l_{AB}. \quad (1)$$

По формуле (1) определяется  $\omega$ , если известна  $V_{BA}$ , и наоборот.

Ускорение точки  $B$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

где  $\vec{a}_{BA}$  – ускорение точки  $B$  во вращательном движении звена  $AB$  вокруг точки  $A$ , принятой за центр относительного вращения.

Так как во вращательном движении ускорение точки складывается из нормального  $\vec{a}_{BA}^n$  и тангенциального (касательного)  $\vec{a}_{BA}^t$ , то

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t.$$

Нормальное ускорение  $\bar{a}_{BA}^n$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$  (т. е. к центру относительного вращения) и определяется по формуле

$$a_{BA}^n = \omega^2 l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}. \quad (2)$$

Тангенциальное ускорение  $\bar{a}_{BA}^t \perp AB$ . Величина  $a_{BA}^t$  и углового ускорения звена  $\varepsilon$  связаны соотношением

$$a_{BA}^t = \varepsilon l_{AB}. \quad (3)$$

По формуле (3) определяется  $\varepsilon$ , если известно  $a_{BA}^t$ , и наоборот.

2. Две точки принадлежат двум звеньям, образующим поступательную пару, и в данный момент совпадают (см. рис. 2, б).

Точка  $A_1$  принадлежит звену 1, а точка  $A_2$  – звену 2. В соответствии с представлением о сложном движении, движение точки  $A_2$  складывается из переносного движения вместе с точкой  $A_1$  (в данном случае вращательного с угловой скоростью  $\omega_1 = \omega_2$ ) и относительного движения по отношению к точке  $A_1$  (в данном случае поступательного вдоль оси  $x-x$ ).

Поэтому

$$\bar{V}_{A_2} = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{A_2A_1}.$$

Относительная скорость  $\bar{V}_{A_2A_1}$  направлена вдоль направляющей  $x-x$ .

Согласно теореме Кориолиса, ускорение точки  $A_2$   $\bar{a}_{A_2}$  складывается из переносного ускорения  $\bar{a}_{A_1}$ , кориолисова (поворотного) ускорения  $\bar{a}_{A_2A_1}^k$  и относительного ускорения  $\bar{a}_{A_2A_1}^r$ :

$$\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{A_2A_1}^k + \bar{a}_{A_2A_1}^r.$$

Кориолисово ускорение, появляющееся в результате переносного вращательного движения, для плоских механизмов определяется по формуле

$$a_{A_2A_1}^k = 2\omega_1 V_{A_2A_1}. \quad (4)$$

Направление  $\bar{a}_{A_2A_1}^k$  определяется по правилу Жуковского: вектор  $\bar{a}_{A_2A_1}^k$  направлен в ту сторону, куда окажется направленным вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_2A_1}$ , если повернуть его на  $90^\circ$  в сторону переносной угловой скорости  $\omega_1 = \omega_2$ .

В ряде случаев переносное движение по рассмотренной схеме не является вращательным. Тогда кориолисово ускорение отсутствует.

Приведенные сведения из кинематики применяются для определения скоростей и ускорений точек и звеньев путем построения планов скоростей и ускорений.

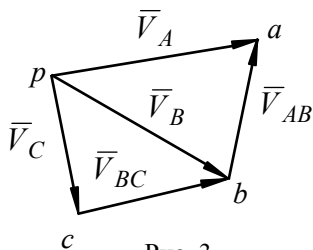


Рис. 3

**Планом скоростей звена** называется плоский пучок, лучи которого, выходящие из полюса, изображают абсолютные скорости точек звена, а отрезки, соединяющие концы лучей, изображают относительные скорости точек (рис. 3).

**Планом скоростей механизма** называется совокупность планов скоростей звеньев с одним общим полюсом  $p$ . Аналогичное определение имеют планы ускорений.

Построение планов скоростей и ускорений механизма производится в порядке, определенном формулой строения механизма, т. е. сначала строится план скоростей и ускорений начального звена, затем рассматривается присоединенная группа Ассура в соответствии с формулой строения. К моменту рассмотрения этой группы известными являются скорости и ускорения точек, принадлежащих внешним кинематическим парам. Определению, в первую очередь, подлежит скорость и ускорение точки внутренней кинематической пары с помощью векторных уравнений. Затем с помощью теоремы подобия определяются скорости и ускорения любых других точек звеньев группы, не принадлежащих кинематическим парам.

### **2.3.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма**

В рассматриваемом механизме (рис. 4, а) заданы размеры  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{AS_2}$ ,  $l_{AC}$ ,  $l_{BC}$ , закон движения начального звена ( $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ ). Для построения схемы использован масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ .

Формула строения механизма:  $I(0, 1) \rightarrow II(2, 3)$ .

Для точки  $A$  начального звена  $I$  определяется скорость  $V_A = \omega_1 l_{OA}$ . Вектор скорости  $\vec{V}_A \perp OA$  и направлен в сторону вращения звена  $I$ .

Приняв масштабный коэффициент скорости  $\mu_V$ , вычисляем отрезок  $pa = \frac{V_A}{\mu_V}$ , изображающий на плане скоростей  $\vec{V}_A$ .

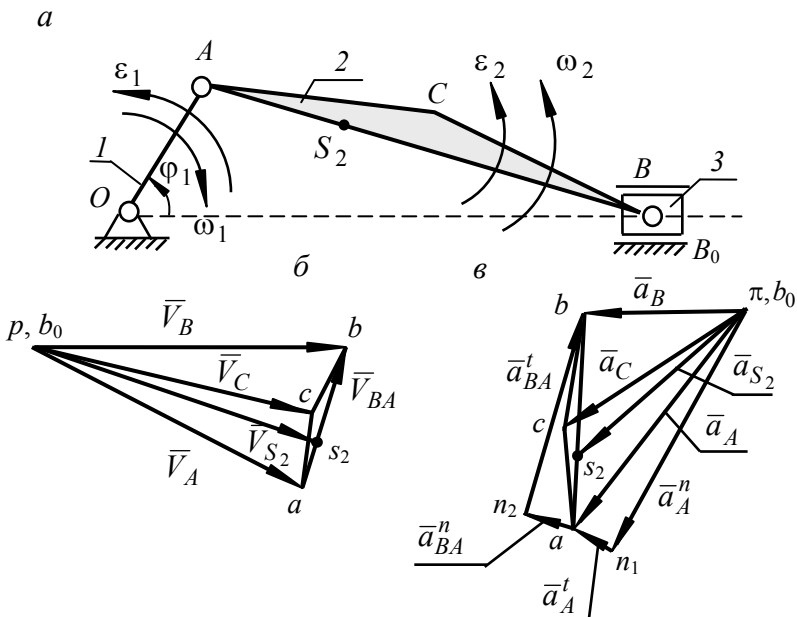


Рис. 4

Выбрав полюс  $p$ , откладываем отрезок  $pa \perp OA$  в сторону вращения кривошипа (рис. 4, б).

Далее рассматривается группа Ассур (2, 3). Известными к началу рассмотрения группы являются  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_{B_0} = 0$  (точка  $B_0$  принадлежит стойке). Определению подлежит скорость точки  $B$  внутренней кинематической пары  $\vec{V}_B$ . Рассматривая движение  $B$  относительно  $A$  и  $B_0$ , составляем два векторных уравнения:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad (5)$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B_0} + \vec{V}_{BB_0}, \quad (6)$$

где  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_{B_0}$  известны ( $\vec{V}_{B_0} = 0$ ),  $\vec{V}_{BA} \perp AB$ ,  $\vec{V}_{BB_0} //$  направляющей ползуна.

Здесь  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки  $B$  при вращении звена 2 относительно точки  $A$  (относительная скорость);  $\vec{V}_{BB_0}$  – скорость точки  $B$  при поступательном движении звена 3 относительно точки  $B_0$ .

Уравнения (5) и (6) решаем графически, для чего через конец вектора  $\vec{V}_A$  (точку  $a$ ) проводим направление  $\vec{V}_{BA} \perp AB$ , а через точку  $b_0$  (находится в полюсе  $p$ ) – направление  $\vec{V}_{BB_0}$ . В пересечении этих направлений находится точка  $b$ .

Точки  $s$ ,  $s_2$  на плане скоростей находим на основании теоремы подобия [1]:

*Фигура, образованная векторами относительных скоростей точек звена, подобна и сходственно расположена с фигурой, образованной этими же точками звена.*

Сходственное расположение фигур означает одинаковую последовательность чтения букв на обоих контурах в одном направлении.

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB}, \text{ откуда } as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB};$$

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } ac = ab \cdot \frac{AC}{AB};$$

$$\frac{bc}{ab} = \frac{BC}{AB}, \text{ откуда } bc = ab \cdot \frac{BC}{AB}.$$

По вычисленным значениям  $ac$  и  $bc$  находим положение точки  $c$  методом засечек.

Из плана скоростей вычисляем линейные и угловые скорости:

$$V_B = (pb)\mu_V; \quad V_{S_2} = (ps_2)\mu_V;$$

$$V_C = (pc)\mu_V; \quad \omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ab)\mu_V}{l_{AB}}.$$

Направление угловой скорости  $\omega_2$  звена 2 получим, поместив вектор относительной скорости  $\bar{V}_{BA}$  (вектор  $a\bar{b}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот звена 2 относительно точки  $A$ .

Переходим к построению плана ускорений (см. рис. 4, в).

Ускорение точки  $A$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t,$$

где  $\bar{a}_A^n$  – нормальное ускорение точки  $A$ , направленное от точки  $A$  к точке  $O$ ;

$\bar{a}_A^t$  – касательное (тангенциальное) ускорение точки  $A$ , направленное перпендикулярно  $OA$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon_1$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \quad a_A^t = \varepsilon_1 l_{OA}.$$

Приняв масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a$ , находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_A^n$  и  $\bar{a}_A^t$ :

$$\pi n_1 = \frac{a_A^n}{\mu_a}; \quad n_1 a = \frac{a_A^t}{\mu_a}.$$

Из полюса плана ускорений  $\pi$  откладываем отрезок  $\pi n_1$  в направлении  $\bar{a}_A^n$ , а из точки  $n_1$  – отрезок  $n_1 a$  в направлении  $\bar{a}_A^t$ . Тогда отрезок  $\pi a$  изображает полное ускорение точки  $A$

$$a_A = l_{OA} \cdot \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Далее на основании теоремы о сложении ускорений в плоском движении составляем векторные уравнения для определения ускорения точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t; \quad (7)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_0} + \bar{a}_{BB_0}, \quad (8)$$

где  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^t$  – нормальная и касательная составляющие ускорения точки  $B$  при вращательном движении звена 2 относительно точки  $A$ ;

$\bar{a}_{B_0} = 0$  (так как точка  $B_0$ , принадлежащая стойке и в данный момент совпадающая с точкой  $B$ , неподвижна);

$\bar{a}_{BB_0}$  – относительное ускорение точки  $B$  по отношению к точке  $B_0$ , направленное вдоль направляющей ползуна.

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлен от точки  $B$  к точке  $A$  и равен

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB},$$

где  $\bar{a}_{BA}^t$  перпендикулярно  $AB$ .



Находим отрезок  $an_2$ , изображающий  $\bar{a}_{BA}^n$ :

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}.$$

Уравнения (7) и (8) решаем графически. Для этого из точки  $a$  откладываем отрезок  $an_2$  в направлении  $\bar{a}_{BA}^n$ , через точку  $n_2$  проводим линию в направлении  $\bar{a}_{BA}^t$ . Затем из точки  $b_0$ , расположенной в полюсе  $\pi$ , проводим линию в направлении  $\bar{a}_{BB_0}$ . В пересечении указанных линий находим точку  $b$ , которую соединяем с полюсом  $\pi$  и получаем отрезок  $\pi b$ , изображающий  $\bar{a}_B$ .

Точки  $c$ ,  $s_2$  на плане ускорений находим на основании теоремы подобия (аналогично тому, как это было сделано при построении плана скоростей).

Из плана ускорений вычисляем линейные и угловые ускорения:

$$a_B = (\pi b)\mu_a; \quad a_{S_2} = (\pi s_2)\mu_a;$$

$$a_C = (\pi c)\mu_a; \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{(n_2 b)\mu_a}{l_{AB}}.$$

Направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  звена 2 получим, поместив вектор тангенциального ускорения  $\bar{a}_{BA}^t$  (вектор  $n_2 \bar{b}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот звена 2 относительно точки  $A$ .

### 2.3.3. Кинематический анализ шарнирного четырехзвенника

В рассматриваемом механизме (рис. 5, а) заданы размеры  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{OC}$ ,  $l_{BC}$ , закон движения начального звена ( $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ ). Для построения схемы использован масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ .

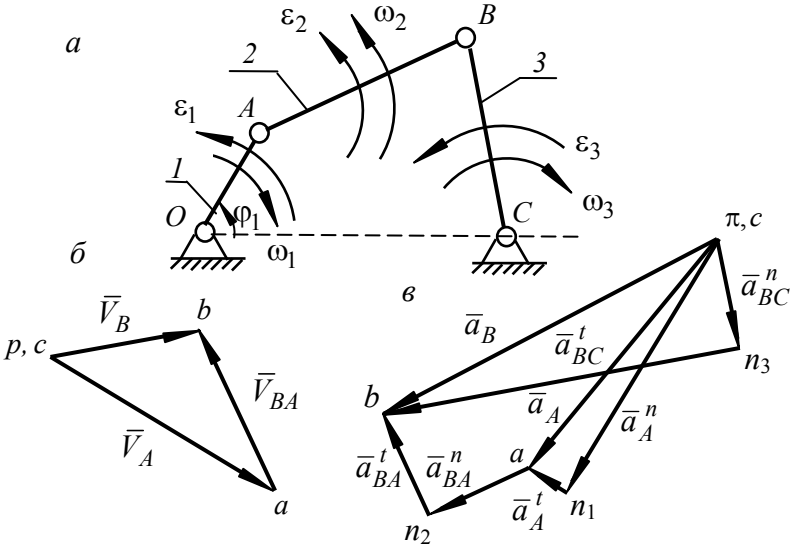


Рис. 5

Формула строения механизма: I(0, 1)  $\rightarrow$  II(2, 3).

Для точки A начального звена I определяется скорость  $V_A = \omega_1 l_{OA}$ . Вектор скорости  $\vec{V}_A \perp OA$  и направлен в сторону вращения звена I.

Приняв масштабный коэффициент скорости  $\mu_V$ , вычисляем отрезок  $pa = \frac{V_A}{\mu_V}$ , изображающий на плане скоростей  $\vec{V}_A$ .

Выбрав полюс  $p$ , откладываем отрезок  $pa \perp OA$  в сторону вращения кривошипа (рис. 5, б).

Далее рассматривается группа Ассур (2, 3). Известными к началу рассмотрения группы являются  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_C = 0$ . Определению в первую очередь подлежит скорость точки  $B$  внутренней кинематической пары  $\vec{V}_B$ . Рассматривая движение точки  $B$  относительно  $A$  и  $C$ , составляем два векторных уравнения

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad (9)$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}, \quad (10)$$

где  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_C$  известны ( $\vec{V}_C = 0$ ),  $\vec{V}_{BA} \perp AB$ ,  $\vec{V}_{BC} \perp CB$ .

Здесь  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки  $B$  при вращении звена 2 относительно точки  $A$  (относительная скорость);

$\vec{V}_{BC}$  – скорость точки  $B$  при вращении звена 3 относительно точки  $C$ .

Уравнения (9) и (10) решаем графически, для чего через конец вектора  $\vec{V}_A$  (точку  $a$ ) проводим направление  $\vec{V}_{BA}$ , а через точку  $c$  (находится в полюсе  $p$ ) – направление  $\vec{V}_{BC}$ . В пересечении этих направлений находится точка  $b$ .

Из плана скоростей находим линейные и угловые скорости:

$$V_B = (pb)\mu_V;$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ab)\mu_V}{l_{AB}};$$

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_V}{l_{CB}}.$$

Направление угловой скорости  $\omega_2$  звена 2 получим, поместив вектор относительной скорости  $\bar{V}_{BA}$  (вектор  $\overline{ab}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот звена 2 относительно точки  $A$ . Аналогично определяется направление угловой скорости третьего звена.

Переходим к построению плана ускорений (см. рис. 5, в).

Ускорение точки  $A$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t,$$

где  $\bar{a}_A^n$  – нормальное ускорение точки  $A$ , направленное от точки  $A$  к точке  $O$ ;

$\bar{a}_A^t$  – касательное (тангенциальное) ускорение точки  $A$ , направленное перпендикулярно  $OA$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon_1$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}; \quad a_A^t = \varepsilon_1 l_{OA}.$$

Приняв масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a$ , находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_A^n$  и  $\bar{a}_A^t$ :

$$\pi n_1 = \frac{a_A^n}{\mu_a}; \quad n_1 a = \frac{a_A^t}{\mu_a}.$$

Из полюса плана ускорений  $\pi$  откладываем отрезок  $\pi n_1$  в направлении  $\bar{a}_A^n$ , а из точки  $n_1$  – отрезок  $n_1 a$  в направлении  $\bar{a}_A^t$ . Тогда отрезок  $\pi a$  изображает полное ускорение точки  $A$ :

$$a_A = l_{OA} \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Далее на основании теоремы о сложении ускорений в плоском движении составляем векторные уравнения для определения ускорения точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t; \quad (11)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t, \quad (12)$$

где  $\bar{a}_C = 0$  (точка  $C$  неподвижна);

$\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BA}^t$  – нормальная и касательная составляющие ускорения точки  $B$  при вращательном движении звена 2 относительно точки  $A$ ;

$\bar{a}_{BC}^n$  и  $\bar{a}_{BC}^t$  – нормальная и касательная составляющие ускорения точки  $B$  при вращательном движении звена 3 вокруг точки  $C$ .

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлен от точки  $B$  к точке  $A$ ,  $\bar{a}_{BA}^t$  – перпендикулярно  $AB$ ;

вектор  $\bar{a}_{BC}^n$  направлен от точки  $B$  к точке  $C$ ,  $\bar{a}_{BC}^t$  – перпендикулярно  $CB$ .

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}; \quad a_{BC}^n = \omega_3^2 l_{CB}.$$

Находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BC}^n$ :

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}; \quad \pi n_3 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}.$$

Уравнения (11) и (12) решаем графически. Для этого из точки  $a$  откладываем отрезок  $an_2$  в направлении  $\bar{a}_{BA}^n$ , через точ-

ку  $n_2$  проводим линию в направлении  $\bar{a}_{BA}^t$ . Затем из точки  $c$ , которая совпадает с полюсом  $\pi$ , откладываем отрезок  $\pi n_3$  в направлении  $\bar{a}_{BC}^n$ , через точку  $n_3$  проводим линию в направлении  $\bar{a}_{BC}^t$ . В пересечении указанных линий получаем точку  $b$ , которую соединяем с полюсом  $\pi$  и получаем отрезок  $\pi b$ , изображающий  $\bar{a}_B$ .

Из плана ускорений находим линейные и угловые ускорения:

$$a_B = (\pi b)\mu_a;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{(n_2 b)\mu_a}{l_{AB}};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^t}{l_{CB}} = \frac{(n_3 b)\mu_a}{l_{CB}}.$$

Направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  звена 2 получим, поместив вектор тангенциального ускорения  $\bar{a}_{BA}^t$  (вектор  $n_2 \bar{b}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот звена 2 относительно точки  $A$ . Аналогично определяется направление углового ускорения третьего звена.

#### **2.3.4. Кинематический анализ кулисного механизма**

В рассматриваемом механизме (рис. 6, а) заданы размеры  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{OB}$ ,  $l_{BC}$ , закон движения начального звена ( $\varphi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ ). Для построения схемы использован масштабный коэффициент длины  $\mu_l$ .

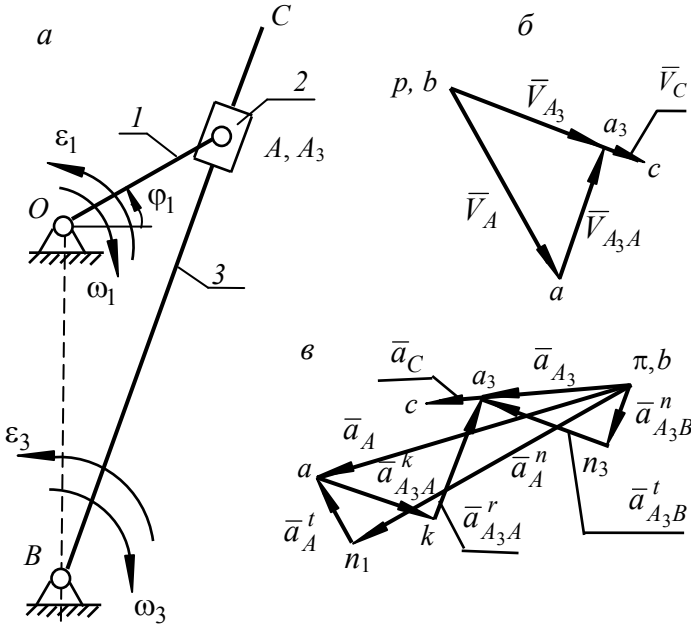


Рис. 6

Формула строения механизма:  $I(0, 1) \rightarrow II(2, 3)$ .

Для точки  $A$  начального звена  $1$  определяется скорость  $V_A = \omega_1 l_{OA}$ . Вектор скорости  $\vec{V}_A \perp OA$  и направлен в сторону вращения звена  $1$ .

Приняв масштабный коэффициент скорости  $\mu_V$ , вычисляем отрезок  $pa = \frac{V_A}{\mu_V}$ , изображающий на плане скоростей  $\vec{V}_A$ .

Выбрав полюс  $p$ , откладываем отрезок  $pa \perp OA$  в сторону вращения кривошипа (рис. 6, б).

Далее рассматривается группа Ассур (2, 3). Известными к началу рассмотрения группы являются  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B = 0$ . Определению подлежит скорость точки  $A_3$  звена 3. Рассматривая

движение точки  $A_3$  относительно  $A$  и  $B$ , составляем два векторных уравнения:

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_A + \bar{V}_{A_3A}; \quad (13)$$

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_B + \bar{V}_{A_3B}, \quad (14)$$

где  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$  известны ( $\bar{V}_B = 0$ ),  $\bar{V}_{A_3A} \parallel AB$ ,  $\bar{V}_{A_3B} \perp AB$ .

Здесь  $\bar{V}_{A_3A}$  – скорость точки  $A_3$  при движении звена 2 относительно звена 3;

$\bar{V}_{A_3B}$  – скорость точки  $A_3$  при вращении звена 3 относительно точки  $B$ .

Уравнения (13) и (14) решаем графически, для чего через конец вектора  $\bar{V}_A$  (точку  $a$ ) проводим направление  $\bar{V}_{A_3A}$ , а через точку  $b$  (находится в полюсе  $p$ ) – направление  $\bar{V}_{A_3B}$ .

Пересечение их определяет положение точки  $a_3$ .

Точку  $c$  на плане скоростей находим на основании теоремы подобия

$$\frac{ba_3}{bc} = \frac{AB}{BC},$$

откуда

$$bc = ba_3 \frac{BC}{AB}.$$

Из плана скоростей определяем линейные и угловые скорости:

$$\begin{aligned} V_{A_3} &= (pa_3)\mu_V; & V_{A_3A} &= (aa_3)\mu_V; \\ V_C &= (pc)\mu_V; & \omega_3 &= \frac{V_{A_3B}}{l_{AB}} = \frac{(ba_3)\mu_V}{l_{AB}}. \end{aligned}$$



В выражении  $\omega_3$  размер  $l_{AB}$  определяется по отрезку  $BA$  на плане положения, т. е.  $l_{AB} = BA\mu_l$ .

Направление угловой скорости  $\omega_3$  звена 3 получим, поместив вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3B}$  (вектор  $\bar{b}a_3$ ) в точку  $A_3$  и рассматривая поворот звена 3 относительно точки  $B$ .

Переходим к построению плана ускорений (рис. 6, в).

Ускорение точки  $A$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t,$$

где  $\bar{a}_A^n$  – нормальное ускорение точки  $A$ , направленное от точки  $A$  к точке  $O$ ;

$\bar{a}_A^t$  – касательное (тангенциальное) ускорение точки  $A$ , направленное перпендикулярно  $OA$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon_1$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}; \quad a_A^t = \varepsilon_1 l_{OA}.$$

Приняв масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a$ , находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_A^n$  и  $\bar{a}_A^t$ :

$$\pi n_1 = \frac{a_A^n}{\mu_a}; \quad n_1 a = \frac{a_A^t}{\mu_a}.$$

Из полюса плана ускорений  $\pi$  откладываем отрезок  $\pi n_1$  в направлении  $\bar{a}_A^n$ , а из точки  $n_1$  – отрезок  $n_1 a$  в направлении  $\bar{a}_A^t$ .

Тогда отрезок  $pa$  изображает полное ускорение точки  $A$ :

$$a_A = l_{OA} \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Далее на основании теоремы о сложении ускорений в плоском движении составляем векторные уравнения для определения ускорения точки  $A_3$ :

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A_3A}^k + \bar{a}_{A_3A}^r; \quad (15)$$

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A_3B}^n + \bar{a}_{A_3B}^t, \quad (16)$$

где  $\bar{a}_B = 0$  (точка  $B$  неподвижна);

$\bar{a}_{A_3A}^k$  и  $\bar{a}_{A_3A}^r$  – кориолисово и относительное (релятивное) ускорения точки  $A_3$  при движении звена 2 относительно звена 3;  $\bar{a}_{A_3B}^n$  и  $\bar{a}_{A_3B}^t$  – нормальная и касательная составляющие ускорения точки  $A_3$  при вращательном движении звена 3 вокруг точки  $B$ .

Направление вектора  $\bar{a}_{A_3A}^k$  получим, повернув вектор  $\bar{V}_{A_3A}$  в направлении  $\omega_3$  на  $90^\circ$ , вектор  $\bar{a}_{A_3A}^r$  направлен параллельно  $AB$ .

$$\bar{a}_{A_3A}^k = 2\omega_3 V_{A_3A}.$$

Вектор  $\bar{a}_{A_3B}^n$  направлен от точки  $A_3$  к точке  $B$ ,  $\bar{a}_{A_3B}^t$  – перпендикулярно  $AB$ .

$$a_{A_3B}^n = \omega_3^2 l_{AB}.$$

Находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_{A_3A}^k$  и  $\bar{a}_{A_3B}^n$ :

$$ak = \frac{a_{A_3A}^k}{\mu_a}; \quad \pi n_3 = \frac{a_{A_3B}^n}{\mu_a}.$$

Уравнения (15) и (16) решаем графически. Для этого из точки  $a$  откладываем отрезок  $ak$  в направлении  $\bar{a}_{A_3A}^k$ , через точку  $k$  проводим линию в направлении  $\bar{a}_{A_3A}^r$ . Затем из точки  $b$ , которая совпадает с полюсом  $\pi$ , откладываем отрезок  $\pi n_3$  в направлении  $\bar{a}_{A_3B}^n$ , через точку  $n_3$  проводим линию в направлении  $\bar{a}_{A_3B}^t$ . В пересечении указанных линий получаем точку  $a_3$ , которую соединяем с полюсом  $\pi$  и получаем отрезок  $\pi a_3$ , изображающий  $\bar{a}_{A_3}$ .

Точку  $c$  на плане скоростей находим на основании теоремы подобия (аналогично тому, как это было сделано при построении плана скоростей).

Из плана ускорений определяем линейные и угловые ускорения:

$$a_C = (\pi c) \mu_a; \quad a_{A_3} = (\pi a_3) \mu_a;$$

$$\bar{a}_{A_3A}^r = (ka_3) \mu_a; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{A_3B}^t}{l_{AB}} = \frac{(n_3 a_3) \mu_a}{l_{AB}}.$$

Направление углового ускорения  $\varepsilon_3$  звена 3 получим, поместив вектор тангенциального ускорения  $\bar{a}_{A_3B}^t$  (вектор  $n_3 \bar{a}_3$ ) в точку  $A_3$  и рассматривая поворот звена 3 относительно точки  $B$ .

### 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

#### 3.1. Функции положения точек и звеньев. Аналоги скоростей и ускорений

Функцией положения звена называется зависимость его координаты от обобщенной координаты механизма. Например, если звено  $k$  совершает вращательное движение,  $\varphi_k$  – угол его поворота и  $\varphi_1$  – угол поворота начального звена (обобщенная координата), то зависимость  $\varphi_k = \varphi_k(\varphi_1)$  есть функция положения звена  $k$ . Если звено  $n$  совершает прямолинейное движение вдоль оси  $X$  и  $x_M$  – координата точки  $M$  этого звена, то зависимость  $x_M = x_M(\varphi_1)$  есть функция положения звена  $n$ .

Первая производная функции положения по обобщенной координате механизма называется аналогом скорости, вторая производная называется аналогом ускорения:

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \text{ – аналог угловой скорости звена } k;$$

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} \text{ – аналог углового ускорения звена } k;$$

$$\frac{dx_M}{d\varphi_1} \text{ – аналог скорости точки } M;$$

$$\frac{d^2x_M}{d\varphi_1^2} \text{ – аналог ускорения точки } M.$$

Скорости и ускорения выражаются через их аналоги:

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \omega_1;$$

$$\varepsilon_k = \frac{d^2\varphi_k}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \varepsilon_1;$$

$$V_M = \frac{dx_M}{dt} = \frac{dx_M}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dx_M}{d\varphi_1} \omega_1;$$

$$a_M = \frac{d^2x_M}{dt^2} = \frac{d^2x_M}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{dx_M}{d\varphi_1} \varepsilon_1,$$

где  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  – угловая скорость и угловое ускорение начального звена.

Отсюда видно, что если  $\omega_1 = 1$  рад/с и  $\varepsilon_1 = 0$ , то аналоги скоростей и ускорений равны соответствующим скоростям и ускорениям.

Аналоги скоростей называются также передаточными функциями:

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = \frac{\omega_k}{\omega_1} = i_{k1}; \quad \frac{dx_M}{d\varphi_1} = \frac{V_M}{\omega_1} = i_{n1}.$$

Функции положения, аналоги скоростей и ускорений являются геометрическими характеристиками механизма, не зависящими от закона его движения.

### 3.2. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Для механизма с горизонтальным движением ползуна (рис. 7) выражения кинематических характеристик получаем следующим образом.

Координаты точки  $A$

$$x_A = l_1 \cos \varphi_1, \quad y_A = l_1 \sin \varphi_1.$$

Тогда координата точки  $B$

$$x_B = x_A + a \cdot \sqrt{l_2^2 - (y_B - y_A)^2},$$

где  $a$  – признак сборки механизма:

$a = +1$ , если ползун расположен справа от начала координат;

$a = -1$ , если ползун расположен слева от начала координат.

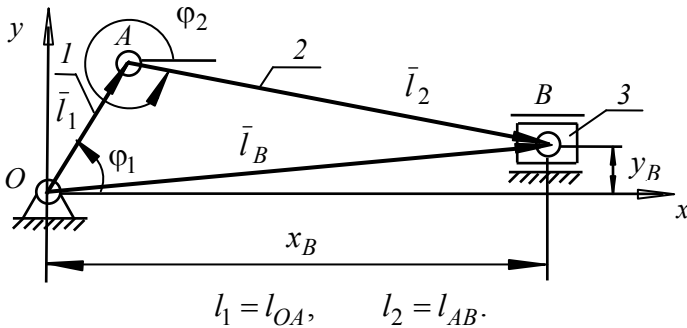


Рис. 7

Перемещение ползуна, отсчитываемое от крайнего положения:

$$S_B = |x_{B \max}| - |x_B|.$$

Координата  $x_{B \max}$  точки  $B$

$$x_{B \max} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - y_B^2}.$$

Угол  $\varphi_2$  определяется из выражений:

$$\cos \varphi_2 = \frac{x_B - x_A}{l_2}; \quad \sin \varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{l_2}.$$

Уравнения замкнутости векторного контура в проекциях имеют вид

$$x_B = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \quad (17)$$

$$0 = -y_B + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2. \quad (18)$$

После дифференцирования (17) и (18) по  $\varphi_1$  и преобразований получим

$$i_{31} = x_B' = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 i_{21} \sin \varphi_2; \quad (19)$$

$$0 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2, \quad (20)$$

откуда

$$i_{21} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), получим значение  $i_{31}$ . Аналоги ускорений  $i_{31}' = \frac{d^2 x_B}{d\varphi_1^2}$  и  $i_{21}' = \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}$  получим после дифференцирования (19) и (20) по  $\varphi_1$  и преобразований:

$$i_{21}' = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_2 i_{21}^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2};$$

$$i_{31}' = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 i_{21}' \sin \varphi_2 - l_2 i_{21}^2 \cos \varphi_2.$$

#### 4. ПРИМЕРЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

**Пример 1.** В крайнем положении кривошипно-ползунного механизма (рис. 8, а) определить скорость и ускорение точки  $B$ , угловую скорость и ускорение звена 2. Угловая скорость звена 1 постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  рад/с. Размеры  $l_{OA} = 0,1$  м,  $l_{AB} = 0,4$  м,  $e = 0,07$  м.

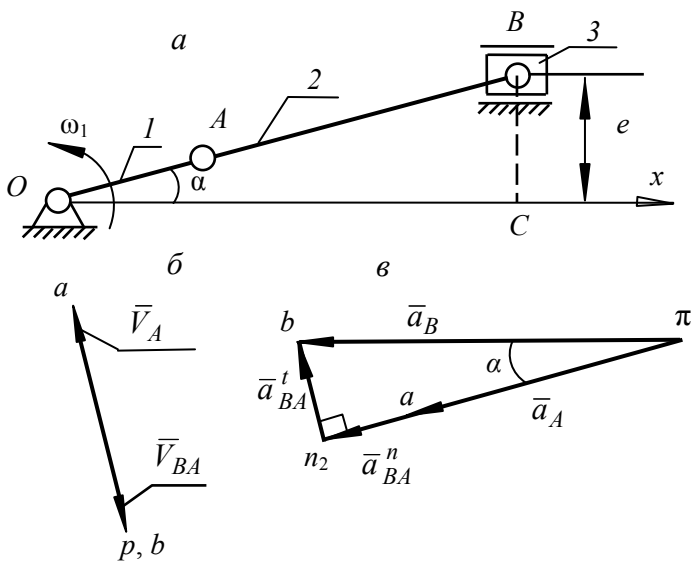


Рис. 8

Графическое решение.

Скорость точки  $A$

$$V_A = \omega_1 l_{OA} = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ м/с,}$$

причем  $\vec{V}_A \perp OA$  и направлена в сторону  $\omega_1$ .



Для построения плана скоростей используем векторные уравнения (5) и (6). Из построения (рис. 8, б) следует, что

$$pb = 0, \quad V_B = 0, \quad ab = pa, \quad V_{BA} = V_A = 2 \text{ м/с.}$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{2}{0,4} = 5 \text{ рад/с.}$$

Ускорение точки  $A$

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = 20^2 \cdot 0,1 = 40 \text{ м/с}^2,$$

причем  $\vec{a}_A^n$  направлено от точки  $A$  к точке  $O$ .

Для построения плана ускорений используем векторные уравнения (7) и (8). При этом

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = 5^2 \cdot 0,4 = 10 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлен от точки  $B$  к точке  $A$ .

План ускорений (рис. 8, в) построен схематично. По построению  $\angle b\pi n_2 = \angle BOC = \alpha$ . Из  $\triangle BOC$  следует, что

$$\sin \alpha = \frac{e}{l_{OA} + l_{AB}} = \frac{0,07}{0,1 + 0,4} = 0,14 \quad \text{и} \quad \alpha = 8,048^\circ,$$

тогда из  $\triangle b\pi n_2$  находим

$$a_B = \frac{a_A + a_{BA}^n}{\cos \alpha} = \frac{40 + 10}{0,9902} = 50,5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^t = (a_A + a_{BA}^n) \cdot \operatorname{tg} \alpha = (40 + 10) \cdot 0,1414 = 7,07 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{7,07}{0,4} = 17,7 \text{ рад/с}^2.$$

**Пример 2.** Для заданного положения тангенсного механизма (рис. 9, а) определить скорость и ускорение звена 3. Угловая скорость звена 1 постоянна и составляет  $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$ , угол  $\varphi_1 = 60^\circ$ ,  $a = 0,25 \text{ м}$ .

Графическое решение.

Из  $\triangle OAC$  находим

$$l_{OA} = \frac{a}{\sin \varphi_1} = \frac{0,25}{0,866} = 0,2887 \text{ м.}$$

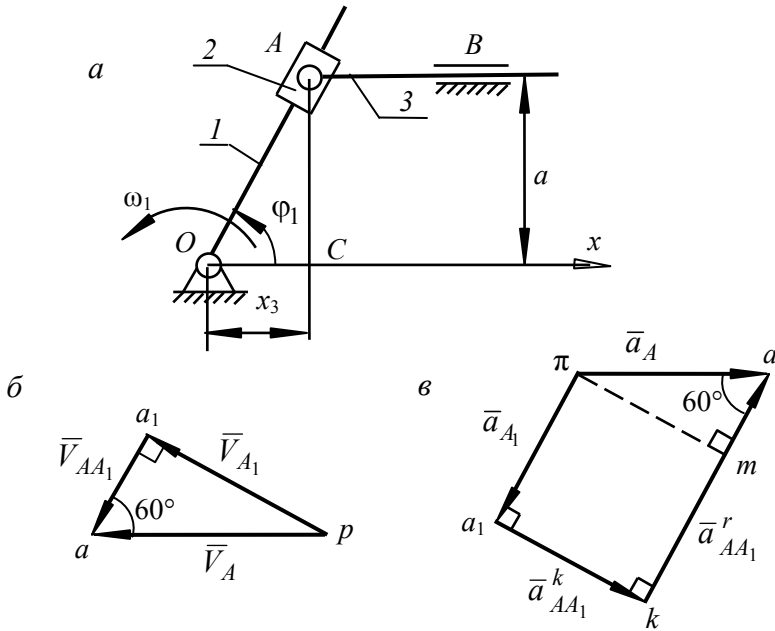


Рис. 9

Тогда скорость точки  $A_1$

$$V_{A_1} = \omega_1 l_{OA} = 3 \cdot 0,2887 = 0,866 \text{ м/с,}$$

причем  $\vec{V}_{A_1} \perp OA$  и направлена в сторону  $\omega_1$ .

Для построения плана скоростей используем векторные уравнения, составленные на основании п. 2.3.1:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{A_1} + \bar{V}_{AA_1};$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{A_0} + \bar{V}_{AA_0}.$$

где  $\bar{V}_{A_0} = 0$  (точка  $A_0$  неподвижна),  $\bar{V}_{AA_1} \parallel OA$ ,  $\bar{V}_{AA_0} \parallel X$ .

План скоростей построен схематично (рис. 9, б) без использования конкретного масштабного коэффициента. Так как по построению  $\angle paa_1 = \varphi_1 = 60^\circ$ , то из  $\Delta paa_1$  следует, что

$$V_A = \frac{V_{A_1}}{\sin 60^\circ} = \frac{0,866}{0,866} = 1 \text{ м/с};$$

$$V_{AA_1} = V_A \cos 60^\circ = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки  $A_1$

$$a_{A_1} = a_{A_1}^n = \omega_1^2 l_{OA} = 3^2 \cdot 0,2887 = 2,598 \text{ м/с}^2,$$

причем  $\bar{a}_{A_1}^n$  направлено от точки  $A$  к точке  $O$ .

Для построения плана ускорений используем векторные уравнения

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}_{AA_1}^k + \bar{a}_{AA_1}^r;$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A_0} + \bar{a}_{AA_0}^r,$$

где  $\bar{a}_{A_0} = 0$ ,  $\bar{a}_{AA_1}^r \parallel OA$ ,  $\bar{a}_{AA_0}^r \parallel X$ .

Кориолисово ускорение

$$a_{AA_1}^k = 2\omega_1 V_{AA_1} = 2 \cdot 3 \cdot 0,5 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Поворот вектора  $\vec{V}_{AA_1}$  ( $\vec{a}_1 \vec{a}$ ) в сторону  $\omega_1$  указывает направление вектора  $\vec{a}_{AA_1}^k$  (перпендикулярно  $OA$  вправо).

План ускорений (рис. 9, в) построен схематично. Так как по построению  $\angle \text{пam} = \varphi_1 = 60^\circ$  и  $\text{пт} = a_1 k$ , то из  $\Delta \text{пam}$  следует, что

$$a_A = \frac{a_{AA_1}^k}{\sin \varphi_1} = \frac{3}{0,866} = 3,464 \text{ м/с}^2.$$

Звено 3 в данном положении движется замедленно, так как направления  $\vec{V}_A$  и  $\vec{a}_A$  противоположны.

Аналитическое решение.

Из  $\Delta OAC$  следует, что функция положения

$$x_3 = a \operatorname{ctg} \varphi_1,$$

тогда

$$V_3 = \frac{dx_3}{d\varphi_1} \omega_1 = -\frac{a\omega_1}{\sin^2 \varphi_1} = -\frac{0,25 \cdot 3}{0,866^2} = -1 \text{ м/с};$$

$$a_3 = \frac{d^2 x_3}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{dx_3}{d\varphi_1} \varepsilon_1 = \frac{2a\omega_1^2 \cos_1}{\sin^3 \varphi_1} + 0 =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 3^2 \cdot 0,5}{0,866^3} = 3,464 \text{ м/с}^2.$$

## Литература

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – 2-е изд. – М. : Наука, 1975. – 256 с.

2. Филонов, И. П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И. П. Филонов, П. П. Анципорович, В. К. Акулич. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.

3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / В. К. Акулич [и др.]; под общ. ред. Г. Н. Девойно. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 286 с.

Учебное издание

**АНЦИПОРОВИЧ** Петр Петрович  
**АКУЛИЧ** Валерий Константинович  
**ДУБОВСКАЯ** Елена Михайловна

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ,  
МАШИН И МАНИПУЛЯТОРОВ.  
КИНЕМАТИКА**

Пособие

для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения»,  
1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»

Редактор *О. В. Ткачук*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 23.09.2015. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,64. Тираж 500. Заказ 689.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.