МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Методические указания и задания
к выполнению самостоятельных работ*

Минск
БНТУ
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и задания
к выполнению самостоятельных работ
для студентов 1-го курса

Минск
БНТУ
2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
Ф94

С о с т а в и т е л и :
Е.В. Емеличева, С.Ю. Лошкарева,
Л.Д. Матвеева, О.Б. Савченко

Р е ц е н з е н т ы :
канд. физ.-мат. наук, доцент *И.Н. Катковская*;
канд. физ.-мат. наук, доцент *О.Р. Габасова*

Издание предназначено для студентов инженерно-педагогических и инженерных специальностей 1 курса и содержит подробные решения типовых примеров.

Задачи для самостоятельного решения составлены так, чтобы студенты могли полностью усвоить изучаемый материал и справиться самостоятельно с подобными задачами.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задание 1.1. Найти и схематически изобразить область определения функций.

1.1.1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

1.1.2. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

1.1.3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

1.1.4. $z=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

1.1.5. $z=\dfrac{3x-5y}{x-y}$.

1.1.6. $z=\dfrac{2xy}{2x+y}$.

1.1.7. $z=\dfrac{x+1}{y^2-1}$.

1.1.8. $z=\dfrac{y}{x}$.

1.1.9. $z=\ln(xy)$.

1.1.10. $z=\ln(xy-1)$.

1.1.11. $z=\ln(x+y-3)$.

1.1.12. $z=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1}$.

1.1.13. $z=\arccos(y-x)$.

1.1.14. $z=\arcsin(2x+y)$.

1.1.15. $z=\sqrt{100-25x^2-4y^2}$.

1.1. Частные производные функции нескольких переменных

Пример 1.1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=5x+\cos(2x-y)$.

Решение. При вычислении частной производной по одной переменной все остальные переменные рассматриваются как константы.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5+2\sin(2x-y);\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\sin(2x-y).$$

Задание 1.2. Найти частные производные первого порядка для указанных функций.

1.2.1. $z=5x^2-y^3+2x\sqrt{y}-3.$

1.2.2. $z=x^4+3xy-8y+x.$

1.2.3. $z=\dfrac{5x-y}{2y-3x}.$

1.2.4. $z=\dfrac{x^2-5y}{xy-1}.$

1.2.5. $z=e^{2x-4y}.$

1.2.6. $z=\ln\left(xy+2x\right).$

1.2.7. $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}+2\right).$

1.2.8. $z=x^y.$

1.2.9. $u=5x^2+3xz+4y^2z^3.$

1.2.10. $u=xyz+y^{xz}.$

Пример 1.2. Найти значение частных производных функции $z=3x-\dfrac{y}{x}$ в точке $M\left(1;\ 2\right)$.

Решение.Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3+\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{x}$.

Подставив $x=1;\ y=2$ получим $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M=3+\dfrac{y}{1^2}=5;\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-\dfrac{1}{1}=1.$

Задание 1.3. Найти значение частных производных для указанных функций в заданной точке $M\left(x_o;\ y_o\right)$.

1.3.1. $z=x^2+y^3-4xy;\ M\left(2;\ -1\right).$ *Ответ.* $\dfrac{\partial z}{\partial x}=8;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-11.$

1.3.2. $z=\dfrac{5x+1}{y-2};\ M\left(0;\ 3\right).$ *Ответ.* $\dfrac{\partial z}{\partial x}=5;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-5.$

1.3.3. $z=y^5+x^4-3x^2y;\ M\left(1;\ -2\right).$ *Ответ.* $\dfrac{\partial z}{\partial x}=16;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=77.$

1.3.4. $z=\dfrac{\sqrt{y}+1}{x+4};\ M\left(-3;1\right).$ *Ответ.* $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}.$

1.3.5. $z=\cos(x+2y);\ M\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$. *Ответ.* $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\sqrt{3}.$

1.3.6. $z=\sin(xy);\ M\left(1;\ \frac{\pi}{6}\right)$. *Ответ.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\pi\sqrt{3}}{12};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

1.3.7. $z=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;\ M\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$

1.3.8. $u=x^2y+y^2z-x^2z,\ \ M(1;\ 1;\ 1)$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial x}=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=3;\ \frac{\partial u}{\partial z}=0.$

1.3.9. $u=\ln\left(3x-y+z^2\right);\ M(1;\ 2;\ -1)$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial x}=1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{3};\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2}{3}.$

Пример 1.3. Найти полный дифференциал функции $u=\frac{xy+2y}{z}$.

Решение. Применим формулу $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+2}{z};\ \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy+2y}{z^2}$, то

$$du=\frac{y}{z}dx+\frac{x+2}{z}dy-\frac{xy+2y}{z^2}dz.$$

Задание 1.4. Найти полный дифференциал функций.

1.4.1. $z=e^{2x-y^3}$.

1.4.2. $z=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

1.4.3. $z=\ln\left(x^3+2y^2\right)$.

1.4.4. $z=\sin\left(\sqrt{x+y}\right)$.

1.4.5. $z=\operatorname{arctg}(2xy+x)$.

1.4.6. $z=\cos\left(xy^3\right)$.

1.4.7. $z=\dfrac{x^2-y^2}{5x-2y}$.

1.4.8. $u=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}$.

1.4.9. $u=\ln(xy+5z)$.

1.4.10. $u=z^x-\dfrac{x}{y}$.

1.2. Частные производные высших порядков

Пример 1.4. Найти значение производной $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ функции $z=e^{\frac{y}{x}}$ в точке $M(1;\ 0)$.

Решение. Последовательно вычислим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}\right)=-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^3}-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{y}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)-e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}.$$

Значение производной $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ определим, подставив $x=1, y=0$

$$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right|_M=-e^o\cdot 1\cdot(0+1)-e^o\cdot 1=-2.$$

Задание 1.5. Найти частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=f(x,y)$.

1.5.1. $z=\ln\left(4x^2-2xy\right)$.

1.5.2. $z=\cos\left(5x-4y^3\right)$.

1.5.3. $z=\arcsin(x+2y)$.

1.5.4. $z=e^{x^3+2y^2}$.

1.5.5. $z=\dfrac{x^2}{y^3}$.

1.5.6. $z=4x^2-5xy+6y^3-2$.

1.5.7. $z=\ln\left(\dfrac{x}{y}-1\right)$.

1.5.8. $z=\sin\left(\sqrt{x}\cdot y\right)$.

1.5.9. $z=\operatorname{arc\,tg}(3y-x)$.

1.5.10. $z=\operatorname{c\,tg}(3y-xy)$.

1.5.11. $z=e^{xy^2}$.

1.5.12. $z=5xy^3-4x^2y+1$.

1.5.13. $z=\dfrac{x^2+1}{y-2}$.

1.5.14. $z=\sin x\cdot\cos y$.

1.5.15. $z=\operatorname{tg}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$.

Задание 1.6. Проверить, удовлетворяет ли заданная функция указанному уравнению.

1.6.1. $z=e^{\sin(x+2y)}$; $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. *Ответ*. Удовлетворяет.

1.6.2. $z=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z$. *Ответ*. Удовлетворяет.

1.6.3. $z=e^{xy}$; $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. *Ответ*. Не удовлетворяет.

1.6.4. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. *Ответ*. Удовлетворяет.

1.6.5. $u=\ln\left(x^2-y^3+z^2\right)$; $3x\dfrac{\partial u}{\partial x}-2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=6$.

Ответ. Удовлетворяет.

1.3. Производная сложной функции

Пример 1.5. Вычислить частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = u^2 + \ln\left(u + v^2\right)$, где $u = \sin y \cdot \cos x$, $v = e^{x^2 - y^2}$.

Решение. Воспользуемся формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u + \frac{1}{u + v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u + v^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin y \cdot \sin x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2 - y^2 \cdot 2x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y \cdot \cos x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \cdot e^{x^2 - y^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2u + \frac{1}{u + v^2}\right) \cdot \left(-\sin y \cdot \sin x\right) + \frac{2v}{u + v^2} \cdot 2x \cdot e^{x^2 - y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2u + \frac{1}{u + v^2}\right) \cdot \cos y \cdot \cos x + \frac{2v}{u + v^2} \cdot \left(-2y \cdot e^{x^2 - y^2}\right).$$

Задание 1.7. Найти частные производные сложных функций.

1.7.1. $z = u^3 v - v^2 u$; где $u = x \cdot \mathrm{tg} y$, $v = \mathrm{ctg}\left(x + y\right)$.

1.7.2. $z = \arcsin \dfrac{u}{v^2}$; где $u = e^{x^2 - y^2}$, $v = \mathrm{arctg}\, xy$.

1.7.3. $z = \sqrt{u^3 + v^2 - 3}$; где $u = \arcsin\left(3x - y\right)$, $v = 5x^2 - y^3$.

1.7.4. $z = \ln\left(uv^2 - u + 1\right)$; где $u = \cos x \cdot y^2$, $v = 3xy - 5$.

1.7.5. $z = \mathrm{arctg}\left(3uv - 5u\right)$; где $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 5 - 2x + y$.

1.7.6. $z=\dfrac{u\cdot v}{w+1}$; где $u=x^2\cdot\sin y,\ v=\ln(x+y);\ w=\operatorname{arctg} xy.$

1.7.7. $z=\cos u\cdot\sin v+v\cdot w^2$; где $u=e^{2x+y},\ v=\ln\left(\dfrac{x}{y}-1\right);\ w=x^2+y^2.$

1.7.8. $z=\dfrac{u+v}{\sin u+1}$; где $u=\dfrac{x}{y},\ v=x^2+y.$

1.7.9. $z=\arccos(3u-4v)$; где $u=e^{xy},\ v=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}.$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

1.7.10. $z=\ln\left(u^2+2u+1\right)$; где $u=5\sin x-3\cos x,\ v=x^2-4.$

1.7.11. $z=\operatorname{arc tg}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$; где $y=\ln\left(x^2+x+1\right).$

1.7.12. $z=\sin\left(e^x+e^y\right)$; где $y=\operatorname{arctg} x.$

1.7.13. $z=u^v$; где $u=\operatorname{ctg}x+1,\ v=x\cdot e^x.$

1.7.14. $z=\dfrac{v}{u^2}$; где $y=\cos x-\sin x,\ v=\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right).$

1.7.15. $z=\sqrt{x^2+y^3-3}$; где $y=\ln\left(x^3-1\right)+5x.$

1.4. Производная неявно заданной функции

Пример 1.6. Вычислить значение частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $3x-2y+z=xz+5$ в точке $M(2;1;-1)$.

Решение. Приведем функцию к виду $F(x, y, z) = 0$ и воспользуемся формулами $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'x}{F'z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'y}{F'z}$.

$3x - 2y + z - xz - 5 = 0.\quad F'x = 3 - z;\quad F'x\big|_M = -4;$

$F'y = -2;\quad F'y\big|_M = -2;\quad F'z = 1 - x;\quad F'z\big|_M = -1.$

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{4}{-1} = 4$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{-2}{-1} = -2$.

Задание 1.8. Найти значение частных производных z_x', z_y' неявно заданной функции $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_o;\, y_o;\, z_o)$.

1.8.1. $\dfrac{1}{3}x^3 + 5y^2 - xy + 2z^2 + xz = \dfrac{29}{3}$; $M(2, -1, 1)$.

Ответ. $z_x' = 1$, $z_y' = 2$.

1.8.2. $x^3 - 2x^2y + 4x^3z + z^2 + 4 = 0$; $M(-1, 0, 1)$.

Ответ. $z_x' = \dfrac{15}{2}$, $z_y' = 1$.

1.8.3. $x^2 - y^2 + xy^2 - xz^2 + z^3 - 1 = 0$; $M(1, 2, -1)$.

Ответ. $z_x' = -\dfrac{5}{4}$, $z_y' = \dfrac{3}{4}$.

1.8.4. $xz + xy - yz + xyz + 8 = 0$; $M(3, 2, -2)$.

Ответ. $z_x' = \dfrac{3}{7}$, $z_y' = \dfrac{1}{7}$.

1.8.5. $\ln(z + 3) = xz - yx^2 + 3z$; $M(2, 1, -2)$. *Ответ.* $z_x' = 1$, $z_y' = 1$.

1.8.6. $x^3y + 3xyz - z^3 = 27$; $M(3, 1, 3)$. *Ответ.* $z_x' = 2$, $z_y' = 3$.

1.8.7. $e^{xy-1} = y \cdot \ln z - z^2x + 2y$; $M(1, 1, 1)$. *Ответ.* $z_x' = -2$, $z_y' = 1$.

1.8.8. $\operatorname{tg} z \cdot \cos^2 y + \cos z \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin y = \frac{3}{2}$; $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $z_x{}' = 0$, $z_y{}' = 1$.

1.8.9. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}$; $M\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ответ. $z_x{}' = 0$, $z_y{}' = 1$.

1.8.10. $\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} - y^3 z - \frac{x^2}{z} = 0$; $M(1,1,1)$.

Ответ. $z_x{}' = \frac{3}{2}$, $z_y{}' = \frac{5}{2}$.

1.8.11. $x\sqrt{yz} + e^{y-z} - \frac{x+y}{z} = 0$; $M(2,1,1)$.

Ответ. $z_x{}' = 0$, $z_y{}' = -\frac{1}{4}$.

1.8.12. $\frac{x+y-z}{x+yz} - z^2 x - 2 = 0$; $M(1,1,-1)$. *Ответ.* $z_x{}' = -3$, $z_y{}' = 2$.

1.8.13. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y - 13 = 0$; $M(2,1,-1)$.

Ответ. $z_x{}' = \frac{4}{3}$, $z_y{}' = -\frac{1}{6}$.

1.8.14. $x^2 - y^3 + z^2 - 2xy - 2xz - yz - 15 = 0$; $M(-2,-1,2)$.

Ответ. $z_x{}' = \frac{2}{3}$, $z_y{}' = \frac{1}{9}$.

1.8.15. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z - 4 = 0$; $M(2,1,2)$.

Ответ. $z_x{}' = 7$, $z_y{}' = -16$.

1.5. **Касательная плоскость и нормаль к поверхности**

Пример 1.7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, -1, 3)$.

Решение. Вычислим значения частных производных функции: $z = 2x^2 + y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$; и их числовые значения в точке M_0: $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 4 \cdot 1 = 4$; $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 2 \cdot (-1) = -2$.

Получим уравнение касательной плоскости:

$z - 3 = 4(x-1) - 2(y+1)$ или $4x - 2y - z - 3 = 0$;

уравнения нормали: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Задание 1.9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке $M_0(x_o, y_o, z_o)$.

1.9.1. $z = x^2 + y^2$, $M_0(1, 2, 5)$.

Ответ. $z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

1.9.2. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $M_0(1, 0, 0)$.

Ответ. $z = 2(x-1)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}$.

1.9.3. $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$, $M_0(2, -1, 1)$.

Ответ. $z - 1 = 2(x-2) + 2(y+1)$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

1.9.4. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$, $M_0(3, 1, 4)$.

Ответ. $3x-y-z-4=0$, $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

1.9.5. $z=\sin x\cdot\cos y$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ. $z-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\dfrac{x-\pi/4}{1/2}=\dfrac{y-\pi/4}{-1/2}=\dfrac{z-1/2}{-1}$.

1.9.6. $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M_0(1,1,1)$.

1.9.7. $z=1+x^2+y^2-x+2y$, $M_0(1,1,3)$.

1.9.8. $z=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}y^2$, $M_0\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

1.9.9. $z=x^2+y^2-3xy-x+y+2$, $M_0(2,1,0)$.

1.9.10. $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$, $M_0(1,-1,-2)$.

1.9.11. $z=y^2-x^2+2xy-3y$, $M_0(1,-1,1)$.

1.9.12. $z=x^2-y^2-2xy-2x-2y$, $M_0(1,1,-6)$.

1.9.13. $z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$, $M_0(3,1,4)$.

1.9.14. $z=x^2+y^2-6xy+x-11$, $M_0(-1,2,5)$.

1.9.15. $z=x^2-y^2+3xy-4x+2y-4$, $M_0(0,0,-4)$.

Пример 1.8. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=2z$ в точке $M_0(3,-2,1)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-2z=0$. Вычислим значения частных производных в точке $M_0(3,-2,1)$:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} = \frac{2}{9}x\bigg|_{M_o} = \frac{2}{9}\cdot 3 = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} = -\frac{2}{4}y\bigg|_{M_o} = -\frac{2}{4}\cdot(-2) = 1;$$

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial z} = -2.$$

Получим уравнение касательной плоскости:

$\frac{2}{3}(x-3)+(y+2)-2(z-1)=0$ или $\frac{2}{3}x+y-2z+2=0$;

уравнения нормали: $\frac{x-3}{2/3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

Задание 1.10. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M_0(x_o,\ y_o,\ z_o)$.

1.10.1. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0,\ M_0(1,\ 2,\ -1)$.

Ответ. $(x-1)+11(y-2)+5(z+1)=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$.

1.10.2. $x^2+y^2-z^2=-1,\ M_0(2,\ 2,\ 3)$.

Ответ. $2x+2y-3z+1=0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

1.10.3. $x^2+2y^2+3z^2=6,\ M_0(1,\ -1,\ 1)$.

Ответ. $x-2y+3z-6=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

1.10.4. $x^2+y^2+z^2=9,\ M_0(1,\ -2,\ 2)$.

Ответ. $x-2y+2z-9=0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

1.10.5. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z,\ M_0(3,\ -2,\ 1)$.

Ответ. $2x-3y-6z-6=0$, $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{-6}$.

1.10.6. $x^2+z^2-4y^2=-2xy,\ M_0(-2,1,2)$.

1.10.7. $z^2-xy=0,\ M_0(1,1,1)$.

1.10.8. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=2z,\ M_0\left(4,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$.

1.10.9. $x^2+y^2+z^2=676,\ M_0(6,\ -24,\ 8)$.

1.10.10. $x^2+y^2-z^2+6xy-z-8=0,\ M_0(0,1,1)$.

1.10.11. $xyz^2+2y^2+3yz+4=0,\ M_0(0,\ 2,\ -2)$.

1.10.12. $x^2+y^2-xz-yz=0,\ M_0(0,\ 2,\ 2)$.

1.10.13. $2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,\ M_0(1,\ -1,1)$.

1.10.14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=-1,\ M_0\left(4,\ -3,\ \sqrt{3}\right)$.

1.10.15. $z^2-2xy=0,\ M_0(1,\ 2,\ 2)$.

1.6. Экстремум функции двух переменных

Пример1.9. Найти экстремум функции $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

Решение. Находим частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=24y^2-6x$ и критические точки: $\begin{cases}3x^2-6y=0,\\ 24y^2-6x=0.\end{cases}$.

Решая эту систему уравнений, получаем две точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ \frac{1}{2})$.

Находим значения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=48y.$$

Для точки $M_1(0,\ 0)$ имеем: $A=0,\ B=-6,\ C=0$ и $\Delta=AC-B^2<0$.

Следовательно, в точке M_1 экстремума нет.

Для точки $M_2(1, ½)$: $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$ и $\Delta > 0$.

Следовательно, в точке M_2 заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = 4$.

Задание 1.11. Найти экстремумы функций.

1.11.1. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$. *Ответ.* В точке $(0, 0)$ экстремума нет, в точке $(1, 1)$ функция имеет минимум.

1.11.2. $z = xy$. *Ответ.* В точке $(0, 0)$ экстремума нет.

1.11.3. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. *Ответ.* В точке $(1, 4)$ функция имеет минимум.

1.11.4. $z = 2xy - 2x - 4y$. *Ответ.* Экстремума нет.

1.11.5. $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$. *Ответ.* В точке $(1, 3)$ функция имеет минимум. В точках $(3, 1)$ и $(-3, -1)$ экстремума нет. В точке $(-1, -3)$ – максимум.

1.11.6. $z = x^4 + 4xy - 2y^2$.

1.11.7. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

1.11.8. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

1.11.9. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

1.11.10. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

1.7. Производная по направлению. Градиент

Пример 1.10. Найти величину и направление градиента $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M(1, 1)$.

Решение. Найдем частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$ и их значения в точке *M:*

$$\frac{\partial z(M)}{\partial x}=\frac{2}{1+1}=1;\quad \frac{\partial z(M)}{\partial y}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Следовательно, имеем $\operatorname{grad} z(M)=\bar{i}+\bar{j}$. Величина градиента равна $\left|\operatorname{grad} z(M)\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Пример 1.11. Найти производную функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(3,\ 4)$ по направлению l, заданному вектором $\bar{a}(4,\ -3)$.

Решение. Находим частные производные функции z и вычисляем их значения в точке *M.*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z(M)}{\partial x}=\frac{3}{5}.\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z(M)}{\partial y}=\frac{4}{5}.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{16+9}}=\frac{4}{5};\quad \cos\beta=\frac{-3}{\sqrt{16+9}}=-\frac{3}{5}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=0.$

Задание 1.12. Найти величину и направление градиента функции в точке *M*.

1.12.1. $z=\ln(x\cdot\operatorname{tg} y)$; $M\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $\operatorname{grad} z(M)=\bar{i}+2\bar{j}$; $\left|\operatorname{grad} z(M)\right|=\sqrt{5}$.

1.12.2. $z=x^2+y^2+z^2-2xyz$; $M(1,\ -1,\ 2)$.

Ответ. $\operatorname{grad} z(M)=6\bar{i}-6\bar{j}+6\bar{k}$; $\left|\operatorname{grad} z(M)\right|=6\sqrt{3}$.

1.12.3. $z=x^3+y^3+z^3-3xyz$; $M(2,1,-1)$.

Ответ. $\operatorname{grad} z(M)=15\bar{i}+9\bar{j}-3\bar{k}$; $\left|\operatorname{grad} z(M)\right|=3\sqrt{35}$.

1.12.4. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x - 2y + 5$; $M(7, 4)$.

1.12.5. $u = x^2y + y^2z + z^2x$; $M(1, 1, 1)$.

1.12.6. $u = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - xy - 2yz + 5xz$; $M(1, 0, 1)$.

1.12.7. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $M(1, 1)$.

1.12.8. $u = x^3 + y^3 + z^3$; $M(1, -1, 1)$.

1.12.9. $z = \ln\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$, $M(1, 3)$.

1.12.10. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$; $M(2, -1, -3)$.

Задание 1.13. Найти производную функции в точке *M* по направлению вектора $\overline{MN}$.

1.13.1. $z = x^2 - xy + y^2$; $M(1, 1)$, $N(7, 9)$. *Ответ.* $\dfrac{7}{5}$.

1.13.2. $u = xyz$; $M(5, 1, 2)$, $N(9, 4, 14)$. *Ответ.* $\dfrac{98}{13}$.

1.13.3. $u = xy + yz + 1$; $M(0, -2, -1)$, $\overline{MN}(12, -3, -4)$. *Ответ.* -1.

1.13.4. $z = x^2y - 3xy + xy^2$; $M(1, 2)$, $N(-1, 0)$.

1.13.5. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; $M(-1, 1)$, $N(1, 1)$.

1.13.6. $u = xy + xz + yz$; $M(2, 3, 4)$, $N(3, 10, 6)$.

1.13.7. $u = x^3 + y^3 + z^3$; $M(1, -1, 1)$, $N(0, -2, -3)$.

1.13.8. $z = x^3 - 3xy + y^3$; $M(0, -1)$, $N(1, 1)$.

1.13.9. $u = x^2 + y^2 - 4yz$; $M(0, 1, 2)$, $N(2, 1, 1)$.

1.13.10. $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$; $M(1, 1, 0)$, $N(9, 1, 8)$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными

Пример 2.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' = y^2 + 1$.

Решение. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1$. Разделяем переменные:

$$xdy = \left(y^2 + 1\right)dx;\ \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y^2+1} = \int\frac{dx}{x}$; $\operatorname{arctg} y = \ln|x| + C$.

Задание 2.1. Решить уравнения.

2.1.1. $y' = y^2 \cdot \sin x$. *Ответ*. $y = \dfrac{1}{\cos x + C}$.

2.1.2. $(x+2)dy - (y-1)dx = 0$. *Ответ*. $y = C(x+2) - 1$.

2.1.3. $y' = \dfrac{2xy}{2+x^2}$. *Ответ*. $y = C\left(x^2+2\right)$.

2.1.4. $y' = x^3 \cdot e^{-x^4}$; $y(0) = 1$. *Ответ*. $y = -\dfrac{1}{4}e^{-x^4} + C$; $y = -\dfrac{1}{4}e^{-x^4} + \dfrac{5}{4}$.

2.1.5. $\left(x + x^2 y\right)dx + y\left(1 - x^2\right)dy = 0$.

Ответ. $y = 1 + y^2 - C\left(1 - x^2\right) = 0$.

2.1.6. $y' = \dfrac{\sqrt{y+3}}{x}$. *Ответ*. $2\sqrt{y+3} = \ln|x| + C$.

2.1.7. $xydy + \ln^2 x dx = 0$. *Ответ*. $3y^2 + 2\ln^3 x = C$.

2.1.8. $e^{x+y}dx + ydy = 0$. *Ответ*. $y = e^x - e^{-y}(y+1) = C$.

2.1.9. $2y\sqrt{1-x^2}dy + xdx = 0$; $y(0) = 2$.

Ответ. $y^2=\sqrt{1-x^2}+C;\ y^2=\sqrt{1-x^2}+1.$

2.1.10. $y'=\dfrac{2xy}{4+x^2};\ y(0)=12.$ *Ответ*. $y=\left(x^2+4\right)C;\ y=3x^2.$

2.1.11. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0.$ *Ответ*. $y=\sqrt{\left(x^2-1\right)C-1}.$

2.1.12. $x\sqrt{1-y^2}dy+y\sqrt{1-x^2}dy=0.$ *Ответ*. $\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-x^2}+C.$

2.1.13. $y\ln ydx+xdy=0.$ *Ответ*.

2.1.14. $ydx+\left(1+x^2\right)dy=0,\ y(1)=1.$ *Ответ*. $3y^2+2\ln^3x=C.$

2.2. Однородные дифференциальные уравнения I порядка

Пример 2.2. Решить решение $2xyy'=y^2-4x^2$.

Решение. $2xyy'=y^2-4x^2\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{y^2-4x^2}{2xy}\Rightarrow y'=\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-4}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$

Данное уравнение является однородным. Сделаем замену $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xu.$ Тогда $y'=x'u+xu'=u+xu'.$ Получаем

$$u+xu'=\frac{u^2-4}{2u}\Rightarrow xu'=\frac{u-4}{2u}-u\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{-u^2-4}{2u}dx.$$

Интегрируем

$$\int\frac{2udu}{u^2+4}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{d(u^2)}{u^2+4}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{d(u^2+4)}{u^2+4}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left|u^2+4\right|=-\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow\ln\left|u^2+4\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|\Rightarrow C=x\left(u^2+4\right).$$

Так как $u=\dfrac{y}{x}$, то $C=x\left(\dfrac{y^2}{x^2}+4\right)$ или $y^2+4x^2-Cx=0$ – общий интеграл.

Задание 2.2. Проинтегрировать уравнения.

2.2.1. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$. *Ответ.* $x^2-y^2-Cx=0$.

2.2.2. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$. *Ответ.* $x^2+2xy-y^2=C$.

2.2.3. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$. *Ответ.* $x^2-y^2=Cx$.

2.2.4. $y^2-4xy+4x^2y'=0$. *Ответ.* $y=\dfrac{4x}{\ln|x|+C}$..

2.2.5. $2xydx+\left(y-x^2\right)dy=0$. *Ответ.* $y^2+x^2=C\cdot y$.

2.2.6. $xy'-y+xtg\dfrac{y}{x}=0$. *Ответ.* $x\sin\dfrac{y}{x}=C$.

2.2.7. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$. *Ответ.* $y^2=-x^3$.

2.2.8. $xy'=\dfrac{x}{\sin\dfrac{y}{x}}+y$. *Ответ.* $-\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x}=\ln x$.

2.2.9. $xy^2dy=\left(y^3+x^3\right)dx$. *Ответ.* $y^3=3x^3\cdot\ln|C\cdot x|$.

2.2.10. $xy'=y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1)=e^3$. *Ответ.* $y=xe^{Cx+1}$; $y=xe^{2x+1}$.

2.2.11. $x\left(y'+e^{\frac{y}{x}}\right)=y$. *Ответ.* $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$.

2.2.12. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$, $y(1)=2$. *Ответ.* $y=x\cdot\sin\left(\ln|x|+C\right)$.

2.3. Линейные дифференциальные уравнения I порядка

Пример 2.3. Решить уравнение $y'x-y=x^2$.

Решение. Разделим уравнение на x, получаем $y'-\dfrac{y}{x}=x$. Здесь

$-\frac{1}{x}=p(x);\ x=q(x)$.Значит, данное уравнение является линейным (общий вид линейного уравнения $y'+p(x)y=q(x)$).

Делаем замену $y=u\cdot v$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляем в уравнение $y'-\frac{y}{x}=x$; получаем $u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x$;

$\frac{xdv}{dx}=v\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow v=x$ – частное решение.

Подставляем $v=x$ в $u(xv'-v)+xu'v=x^2$, получаем $x^2u'=x^2$ или $u'=1$, $u=x+C$ – общее решение. Итак, $y=(x+C)x$ – общее решение.

Задание 2.3. Решить уравнения.

2.3.1. $y'+\frac{3y}{x}=4$. *Ответ*. $y=\frac{1}{x^3}\left(x^4+C\right)$.

2.3.2. $2xy+x^2y'=\ln x$. *Ответ*. $y=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$.

2.3.3. $y'\mathrm{ctg}x+y=2$. *Ответ*. $y=2+C\cos x$.

2.3.4. $y'+y=x+2$. *Ответ*. $y=x+1+Ce^{-x}$.

2.3.5. $y'-2y=e^{2x}$. *Ответ*. $y=(x+C)e^{2x}$.

2.3.6. $y'\cdot\cos x+y\cdot\sin x-1=0$. *Ответ*. $y=\sin x+C\cdot\cos x$.

2.3.7. $y'+y=\frac{e^{-x}}{1+x^2}$; $y(0)=2$. *Ответ*. $y=e^{-x}(\mathrm{arctg}x+2)$.

2.3.8. $y'-2xy=2xe^{x^2}$. *Ответ*. $y=\left(x^2+C\right)e^{x^2}$.

2.3.9. $xy'+y=\cos x$. *Ответ*. $y=\frac{1}{x}(C+\sin x)$.

2.3.10. $y'-y\mathrm{tg}x=\frac{2x}{\cos x}$. *Ответ*. $y=\frac{x^2+C}{\cos x}$.

2.3.11. $xy' = 3x + 4y$. *Ответ*. $y = -\dfrac{x^4}{3x^3 + C}$; $y = -\dfrac{x^4}{3x^3 + 1}$. .

2.4. Уравнение Бернулли

Пример 2.4. Решить уравнение $y' + \dfrac{4}{x} y = x^3 y^2$.

Решение. В уравнении присутствуют y', y и y^m , значит, уравнение можно назвать уравнением Бернулли. Проверим. Общий вид уравнения Бернулли $y' + p(x) y = q(x) y^m$. В нашем уравнении $p(x) = \dfrac{4}{x}$, $q(x) = x^3$; $m = 2$.

Сделаем замену $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, тогда

$$u'v + uv' + \frac{4}{x} uv = x^3 y^2 \Rightarrow u\left(v' + \frac{4}{x} v \right) + u'v = x^3 y^2 .$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $\left(v' + \dfrac{4}{x} v \right) = 0$, получаем $u'v = x^3 y^2$, т.е. $\begin{cases} v' + \frac{4v}{x} = 0, \\ u'v = x^3 u^2 v^2. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем v: $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{4}{x} v$, $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = -4 \int \frac{dx}{x}$,

$$\ln|v| = -4 \ln|x| = \ln|x|^{-4} \Rightarrow v = \frac{1}{x^4} .$$

Подставляем $v = \dfrac{1}{x^4}$ во второе уравнение $u'v = x^3 u^2 v^2$:

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x^4} = x^3 u^2 \frac{1}{x^8} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{x^4 \cdot x^3}{x^8} dx.$$

Интегрируем уравнение:

$$\int u^{-2}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1} = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln|xC|.$$

Получаем $u = -\frac{1}{\ln|xC|}$; $y = u \cdot v = -\frac{1}{x^4 \ln|xC|}$.

Задание 2.4. Найти общее решение или общий интеграл данного уравнения.

2.4.1. $y' + \frac{y}{x} = y^2$. *Ответ*. $y = -\frac{1}{x\ln|Cx|}$.

2.4.2. $y' + \frac{1}{3}y = e^x y^4$. *Ответ*. $\frac{1}{y^3} = e^x(C - 3x)$.

2.4.3. $x \cdot \frac{dy}{dx} + y = xy^3$. *Ответ*. $y^2 = \frac{1}{2x + Cx^2}$.

2.4.4. $y' + \frac{2}{x}y = -x^2 \cdot \cos x \cdot y^2$. *Ответ*. $\frac{1}{y} = x^2(\sin x + C)$.

2.4.5. $xy' + y = y^2 x^2 \ln x$. *Ответ*. $\frac{1}{xy} = C + x(1 - \ln x)$.

2.4.6. $y' - \frac{y}{x} = xy^2$. *Ответ*. $\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$.

2.4.7. $xy' + y = y^2\left(2x^3 + x\right)$. *Ответ*. $y = \frac{1}{Cx - x^3 - x\ln|x|}$.

2.4.8. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$. *Ответ*. $y = x^4\left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2$; $y = 0$.

2.4.9. $xy' + y = -xy^2$. *Ответ*. $y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)}$.

2.4.10. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$. *Ответ*. $y^3 = Cx^2 + x^3$.

2.4.11. $xy' + y = y^2 \ln x$. *Ответ*. $\frac{1}{y} = \ln|x| + 1 + Cx$.

2.5. **Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка**

Пример 2.5. Найти частное решение уравнения $y^{IV}=\cos^2 x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=\frac{1}{32}$, $y'(0)=0$, $y''(0)=\frac{1}{8}$, $y'''(0)=0$.

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y'''=\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1.$$

$$y''=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1\right)dx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x+C_2.$$

$$y'=\int\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\sin 2x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\sin 2x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{48}+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$x_o=0,\ y_o=\frac{1}{32},\ y'_o=0,\ y''_o=\frac{1}{8},\ y'''_o=0.$$

$$0=C_1\Rightarrow C_1=0;\qquad \frac{1}{8}=-\frac{1}{8}+C_2\Rightarrow C_2=\frac{1}{4};\qquad 0=C_3\Rightarrow C_3=0;$$

$$\frac{1}{32}=\frac{1}{32}+C_4\Rightarrow C_4=0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y=\frac{x^4}{48}+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{x^2}{8}.$$

Задание 2.5. Решить уравнения.

2.5.1. $y''' = x \cdot \sin x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 2.$

Ответ. $y = x \cdot \cos x - 3\sin x + x^2 + 2x.$

2.5.2. $y''' \cdot \sin^4 x = \sin 2x.$ *Ответ.* $y = \ln \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

2.5.3. $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$ *Ответ.* $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C_1 x + C_2.$

2.5.4. $y''' = x \cdot e^{-x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 2$

Ответ. $y = -(x+3)e^{-x} + \dfrac{3x^2}{2} + 3.$

2.5.5. $y''' = e^{5x} + 4x.$ *Ответ.* $y = \dfrac{1}{125}e^{5x} + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

2.5.6. $y'' = x \cdot \ln x,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = \dfrac{1}{9}.$

Ответ. $y = \ln x \cdot \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x^3}{36} + \dfrac{13}{36}x - \dfrac{2}{9}.$

Пример 2.6. Найти решение уравнения $xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right).$

Решение. Это уравнение не содержит искомой функции $y(x)$.

Полагая $y' = p$, где $p = p(x)$, преобразуем уравнение к виду $x \cdot p' = p \cdot \ln\left(\dfrac{p}{x}\right)$. Отсюда имеем $p' = \dfrac{p}{x} \cdot \ln\left(\dfrac{p}{x}\right)$ – однородное уравнение первого порядка.

Полагая $\dfrac{p}{x} = u$, откуда $p = u \cdot x,\ \ p' = u' \cdot x + u$, получим уравнение $u' \cdot x + u = u \cdot \ln u$ или $\dfrac{du}{dx} \cdot x + u(1 - \ln u) = 0$.

Разделяя переменные, получим $\dfrac{du}{u(1-\ln u)}+\dfrac{dx}{x}=0.$

Интегрируя $\displaystyle\int\frac{du}{u(1-\ln u)}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C_1|$, получим

$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C_1|$ или $\ln u-1=C_1x$, откуда $u=e^{C_1x+1}$.

Возвращаясь к функции y, приходим к уравнению

$y'=p=x\cdot e^{C_1x+1}$.

Следовательно, $\displaystyle y=\int x\cdot e^{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}x\cdot e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2$.

Задание 2.6. Решить уравнения.

2.6.1. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1),\ \ y(2)=1,\ \ y'(2)=-1.$

Ответ. $y=\dfrac{3x^4-4x^3-36x^2+72x+8}{24}.$

2.6.2. $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2.$

Ответ. $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2.$

2.6.3. $y''=y'+x.$ *Ответ.* $y=-\dfrac{(x+1)^2}{2}+C_1e^x+C_2.$

2.6.4. $\left(1+x^2\right)y''+1+y'^2=0.$

Ответ. $y=\left(1+C_1^{-2}\right)\ln(1+C_1x)-C_1^{-1}x+C_2.$

2.6.5. $(1+\sin x)y''=\cos x\cdot y'.$ *Ответ.* $y=C_1x-C_1\cos x+C_2.$

2.6.6. $\mathrm{tg}x\cdot y''=2y'.$ *Ответ.* $y=\dfrac{C_1x}{2}-\dfrac{C_1\sin 2x}{4}+C_2.$

Пример 2.7. Решить уравнение $1+y'^2=yy''$.

Решение. Это уравнение не содержит независимую переменную *x*. Положим $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $1 + z^2 = y \cdot z \cdot \frac{dz}{dy}$. Это уравнение первого порядка относительно z с разделяющимися переменными. Далее разделяем переменные и интегрируем: $\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}$; $\ln\left(1+z^2\right) = 2\ln|y| + 2\ln|C_1|$ или $1 + z^2 = C_1^2 y^2$; $z = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$. Возвращаясь к функции *y*, имеем

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}; \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

Интегрируя получаем общий интеграл:

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right| = \pm\left(x + C_2\right).$$

Пример 2.8. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Положим $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z' \cdot z$. Уравнение примет вид $y' \cdot z' \cdot z - z^2 = 0$. Разделим на z, тогда $y \cdot \frac{dz}{dy} - z = 0.$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = 0, \ \ln|z| - \ln|y| = \ln|C_1|, \ z = C_1 y.$$

Возвращаясь к функции *y*, получаем $y' = C_1 y$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx, \ \ln|y| = C_1 x + C_2, \ y = e^{C_1 x + C_2}.$$

Находим $2 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 2.$ $1 = e^{C_1 \cdot 0 + C_2} \Rightarrow C_2 = 0.$

Итак, частное решение $y = e^{2x}$.

Задание 2.7. Решить уравнения.

2.7.1. $y''(2y+3)-2y'^2=0$. *Ответ.* $0,5\ln|2y+3|=C_1x+C_2$.

2.7.2. $y\cdot y''=(y')^2-(y')^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$.

Ответ. $y=2\ln|y|+x$.

2.7.3. $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$. *Ответ.* $\sqrt{y}-0,5C_1\ln\left|2\sqrt{y}+C_1\right|+C_2=x$.

2.7.4. $y''=3y^2\cdot y'^3$. *Ответ.* $y=\dfrac{1}{C_1}\left(C_2-x-\dfrac{y^4}{4}\right)$.

2.7.5. $y''+y'^3=0$. *Ответ.* $y=\dfrac{1}{C_1}\left(C_2+x-\dfrac{y^2}{2}\right)$.

2.7.6. $y''\cdot y'^3-1=0$. *Ответ.* $y=\dfrac{(4x+4C_2)^{\frac{5}{4}}-5C_1}{5}$.

2.6. **Линейные однородные ДУ II порядка с постоянными коэффициентами**

Пример 2.9. Найти общее решение уравнения $y''-5y'+4y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2-5k+4=0$. Его корни вещественные и различные $k_1=1, k_2=4$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$.

Пример 2.10. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$. Оно имеет кратный корень $k=3$. Следовательно, общее решение имеет вид $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$.

Пример 2.11. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+2y=0$.

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2-2k+2=0$. Так как дискриминант этого уравнения равен

(-4), то уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общее решение исходного уравнения задается формулой $y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$

Пример 2.12. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$ имеет два различных корня $k_1 = 2, k_2 = -1$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Подставляя начальные условия в общее решение и его производную $y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$, получим систему уравнений относительно C_1 и C_2: $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 3 = 2C_1 - C_2 \end{cases}$, откуда $C_1 = 1, C_2 = -1$. Значит, частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, имеет вид $y = e^{2x} - e^{-x}$.

Задание 2.8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

2.8.1. $y'' - 4y' + 8y = 0$. *Ответ.* $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

2.8.2. $y'' + 9y = 0$. *Ответ.* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

2.8.3. $y'' + 2y' = 0$. *Ответ.* $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

2.8.4. $y'' + 6y' + 13y = 0$. *Ответ.* $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

2.8.5. $y'' + 2y'' + 2y = 0$. *Ответ.* $y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

2.8.6. $y'' + 25y = 0$. *Ответ.* $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

2.8.7. $y'' - 4y' = 0$. *Ответ.* $y = C_1 + C_2 e^{4x}$.

2.8.8. $y'' - 2y' + 10y = 0$. *Ответ.* $y = e^{x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

2.8.9. $y'' - 2y' - 8y = 0$. *Ответ.* $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

2.8.10. $y'' + 16y = 0$. *Ответ.* $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

Задание 2.9. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2.9.1. $y''-4y'+20y=0,\ y(0)=y'(0)=-1.$

Ответ. $y=e^{2x}\left(-\cos 4x+\dfrac{1}{4}\sin 4x\right).$

2.9.2. $y''-2y'+y=0,\ y(0)=-2,\ y'(0)=1.$

Ответ. $y=e^{x}(3x-2).$

2.9.3. $y''-2y'+5y=0,\ y(0)=-2,\ y'(0)=0.$

Ответ. $y=e^{x}(-2\cos 2x+2\sin 2x).$

2.9.4. $y''-4y=0,\ y(0)=y'(0)=2.$ *Ответ.* $y=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+\dfrac{3}{2}e^{2x}.$

2.9.5. $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2.$

Ответ. $y=3e^{2x}-4e^{x}.$

2.9.6. $y''+2y'=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2.$ *Ответ.* $y=-e^{-2x}.$

2.9.7. $y''-7y'+12y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$

Ответ. $y=2e^{4x}-2e^{3x}.$

2.9.8. $4y''+3y'-y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=4.$

Ответ. $y=\dfrac{24}{5}e^{\frac{x}{4}}-\dfrac{14}{5}e^{-x}.$

2.9.9. $y''+4y'+5y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=0.$

Ответ. $y=e^{-2x}(4\cos x+8\sin x).$

2.9.10. $4y''-4y'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

Ответ. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(1+\dfrac{3}{2}x\right).$

2.7. Линейные ДУ II порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Пример 2.13. Решить уравнение $y'' + y = x \cdot e^x$.

Решение. Общее решение будем искать в виде

$$y = \bar{y} + y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (ищется с помощью характеристического уравнения), y_* – частное решение исходного уравнения (ищется по специальной правой части уравнения).

Если $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$, тогда

$$y_* = x^r e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right],$$

где r – показатель кратности корня $\alpha + \beta i$ в характеристическом уравнении, $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ – полные многочлены от *x* степени l с неопределенными коэффициентами, где $l = \max(m,n)$.

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Оно имеет корни $k_1 = i,\ k_2 = -i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y_* = (Ax + B)e^x$, где $f(x) = x \cdot e^x$, $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \alpha \pm \beta_i = 1$. Следовательно, такого корня нет.

Выражение $Ax + B$ соответствует двучлену первой степени с неопределенными коэффициентами, поскольку $f(x) = x \cdot e^x$ и *x* – одночлен первой степени.

Для нахождения неопределенных коэффициентов *A* и *B*, подставим частное решение y_* в исходное уравнение. Для этого найдем

$$y_*' = Ae^x + (Ax + B)e^x,\ y_*'' = Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x = 2Ae^x + (Ax + B)e^x.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$y'' + y = 2Ae^x + (Ax + B)e^x + (Ax + B)e^x \equiv xe^x \Rightarrow 2A + 2Ax + 2B \equiv x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой части равенства, получаем:

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^x.$$

Пример 2.14. Решить уравнение $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$.

Решение. Общее решение ищем в виде $y=\bar{y}+y_*$. Для нахождения $\bar{y}$ составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $y''+y'-2y=0$: $k^2+k-2=0$. Оно имеет два различных корня $k_1=1,\ k_2=-2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

Частное решение $y_*=A\cos x+B\sin x$. Поскольку: 1) $\alpha=0,\ \beta=1$, $\alpha\pm\beta_i=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, следовательно, $r=0$; 2) $m=n=0$, следовательно, $l=0$. Получаем $P_o(x)=A,\ Q_o(x)=B$.

Подставим y_* в исходное уравнение. Имеем

$$y_*'=-A\sin x+B\cos x,\ y_*''=-A\cos x-B\sin x.$$

Следовательно, получаем

$$-A\cos x-B\sin x-A\sin x+B\cos x-2A\sin x-2B\cos x\equiv\cos x-3\sin x.$$

Группируя неизвестные коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ получаем $(B-3A)\cos x+(-3B-A)\sin x\equiv\cos x-3\sin x$. Сравниваем коэффициенты в левой и правой части тождества при

$$\begin{cases} B-3A=1 \\ -3B-A=-3 \end{cases} \Rightarrow A=0,\ B=1.$$

Решением уравнения будет $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x.$

Пример 2.15. Найти частное решение уравнения $y''+y=3\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=y'(0)=0$.

Решение. Найдем общее решение $y=\bar{y}+y_*$ данного уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+1=0$ и имеет два различных корня $k_1=i,\ k_2=-i$. Следовательно, $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Частное решение y_* ищем в виде $y_*=x\left(A\cos x+B\sin x\right)$. Поскольку по правой части $f\left(x\right)=3\sin x,\ \alpha=0,\ \beta=1,\ \alpha\pm\beta_i=\pm i$ являются корнями характеристического уравнения кратности $1\left(r=1\right)$; $m=n=l=0$.

Подставим y_* в исходное уравнение

$$y_*'=x\left(-A\sin x+B\cos x\right)+\left(A\cos x+B\sin x\right),$$

$$y_*''=\left(-A\sin x+B\cos x\right)+x\left(-A\cos x-B\sin x\right)+\left(-A\sin x+B\cos x\right).$$

Итак, $y''+y=-2A\sin x+2B\cos x\equiv 3\sin x.$ Откуда получаем $-2A=3,\ 2B=0\Rightarrow A=-\frac{3}{2},\ B=0.$ Следовательно, $y_*=-\frac{3}{2}x\cos x.$

Общее решение примет вид $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{3}{2}x\cos x.$

Постоянные C_1 и C_2 найдем, используя начальные условия.

Имеем $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{2}x\sin x.$ Далее,

$$y\left(0\right)=C_1\cos 0+C_2\sin 0-\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\cos 0=C_1,$$

$$y'\left(0\right)=-C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{3}{2}\cdot\cos 0+\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\sin 0=C_2-\frac{3}{2}$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases}C_1=0,\\ C_2-\frac{3}{2}=0.\end{cases}\Rightarrow C_1=0,\ C_2=\frac{3}{2}.$

Частное решение, удовлетворяющее заданным условиям имеет вид $y=\frac{3}{2}\sin x-\frac{3}{2}x\cos x.$

Задание 2.10. Решить уравнения:

2.10.1. $y''-12y'+40y=2e^{6x}$. *Ответ.* $y=e^{6x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+\frac{1}{2}e^{6x}.$

2.10.2. $y''+9y=4\cos x-8\sin x$.

Ответ. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{2}\cos x-\sin x$.

2.10.3. $y''-5y'+6y=3\cos x+19\sin x$.

Ответ. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+\frac{11}{5}\cos x+\frac{8}{5}\sin x$.

2.10.4. $6y''-y'-y=21e^{2x}$. *Ответ.* $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{3}}+e^{2x}$.

2.10.5. $y''+8y'+25y=18e^{5x}$. *Ответ.* $y=e^{4x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+\frac{1}{5}e^{5x}$.

Задание 2.11. Найти частное решение ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

2.11.1. $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5,\ y(0)=4,\ y'(0)=0$.

Ответ. $y=e^{-2x}\left(2\sin x-3\cos x\right)+x^2-8x+7$.

2.11.2. $y''-4y'+20y=16x^2e^{2x},\ y(0)=\ y'(0)=-1$.

Ответ. $y=e^{2x}\left(-\cos 4x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+e^{2x}\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$.

2.11.3. $4y''-4y'+y=-25\cos x,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

Ответ. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(-2-x\right)+3\cos x+4\sin x$.

2.11.4. $y''+y'=2x-1,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$.

Ответ. $y=2-3e^{x}+x^2-3x$.

2.11.5. $y''+16y=8\cos 4x,\ y(0)=2,\ y'(0)=4$.

Ответ. $y=2\cos 4x+\sin 4x(x+1)$.

2.8. Системы линейных ДУ II порядка с постоянными коэффициентами

Пример 2.16. Проинтегрировать систему ДУ: $\begin{cases} y'=3y-z \\ z'=5y-z \end{cases}$.

Решение. Дифференцируем первое уравнение $y''=3y'-z$.

Подставляем в правую часть полученного уравнения правые части из системы: $y'' = 3(3y - z) - (5y - z) = 4y - 2z$ (*).

Определяем z из первого уравнения исходной системы $z = -y' + 3y$ и подставляем его выражение в (*):

$$y'' = 4y - 2(-y' + 3y) = 2y' - 2y \Rightarrow y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Решаем полученное уравнение. Имеем:

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1 \pm i\,.$$

Находим y: $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$. Поскольку $z = -y' + 3y$ и $y' = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^x\left(-C_1\sin x + C_2\cos x\right)$, то имеем

$$z = -e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) - e^x\left(-C_1\sin x + C_2\cos x\right) +$$

$$+3e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) = e^x\left[\left(2C_1 - C_2\right)\cos x + \left(C_1 + 2C_2\right)\sin x\right],$$

Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right),$$

$$z = e^x\left[\left(2C_1 - C_2\right)\cos x + \left(C_1 + 2C_2\right)\sin x\right].$$

Задание 2.12. Проинтегрировать систему ДУ.

2.12.1. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$ *Ответ.* $\begin{array}{l} y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right), \\ z = e^x\left(C_1\sin x - C_2\cos x\right). \end{array}$.

2.12.2. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

Ответ. $y = e^{2x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right)$,

$$z = e^{2x}\left(\frac{C_1 - \sqrt{3}C_2}{2}\cos\sqrt{3}x + \frac{C_2 - \sqrt{3}C_1}{2}\sin\sqrt{3}x\right).$$

2.12.3. $\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$

Ответ. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$, $z = C_2e^{3x} - 2\,C_1e^{-3x}$.

2.12.4. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 3y - 4z. \end{cases}$

Ответ. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x},\ z = C_1e^{-x} + 0{,}6\ C_2e^{x}$.

2.12.5. $\begin{cases} y' = 3y + z, \\ z' = -5y - 3z. \end{cases}$

Ответ. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x},\ z = -C_1e^{2x} - 5C_2e^{-2x}$.

2.12.6. $\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ z' = 3y - 2z. \end{cases}$

Ответ. $y = e^{x}\left(C_1 + C_2x\right),\ z = e^{x}\left(C_1 + C_2x\right) - \frac{1}{3}C_2e^{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика: общий курс / под ред. С.А. Самоля. – Минск : Выш. школа, 2000.
2. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998.
3. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М. : Высш. школа, 1985.
4. Гусак, А.А. Высшая математика : учебник для студентов вузов : в 2 т. / А.А. Гусак. – 3-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2001.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 4 ч. / под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск : Выш. школа, 1990.
6. Руководство к решению задач по высшей математике / под общ. ред. Е.Н. Гурского. – Минск : Выш. школа, 1990.
7. Бубнов, В.Ф. Задачи по высшей математике / В.Ф. Бубнов, Т.А. Сухая. – Минск : Выш. школа. – Ч. 2. – 1993.
8. Сборник задач и упражнений по высшей математике / Л.Н. Гайшун [и др.]. – Минск : Выш. школа, 2009.

Учебное издание

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и задания
к выполнению самостоятельных работ
для студентов 1-го курса

С о с т а в и т е л и :
ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
ЛОШКАРЕВА Светлана Юрьевна
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
САВЧЕНКО Ольга Борисовна

Технический редактор *О.В. Песенько*

Подписано в печать 08.10.2015. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,38. Уч.-изд. л. 1,86. Тираж 100. Заказ 717.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.