



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный  
технический университет**

---

**Кафедра «Робототехнические системы»**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ**

**Учебно-методическое пособие**

**Минск  
БНТУ  
2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Робототехнические системы»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Учебно-методическое пособие к лекциям  
для студентов специальности  
1-53 01 06 «Промышленные роботы  
и робототехнические комплексы»

Минск  
БНТУ  
2015

УДК 007.52:51(076.5)

ББК 32.816я7

М34

Авторы:

*А. Р. Околов, А. В. Дрозд, Ю. Н. Матрунчик,  
О. В. Лицкевич*

Рецензенты:

*С. Н. Павлович, В. С. Юденков*

**Математическое** обеспечение промышленных роботов : учебно-методическое пособие к лекциям для студентов специальности 1-53 01 06 «Промышленные роботы и робототехнические комплексы» / А. Р. Околов [и др.]. – Минск : БНТУ, 2015. – 55 с.  
ISBN 978-985-550-561-8.

Данное учебно-методическое пособие направленно на более качественное и эффективное изложение лекционного материала курса «Математическое обеспечение промышленных роботов», так как позволяет освободить лектора и обучаемых от необходимости механического переписывания объемных и сложных формул и матриц и дает возможность сосредоточить основное внимание студентов на понимании и усвоении основных вопросов, связанных с математическим описанием динамики и кинематики промышленного робота, планированием и моделированием траектории его движения.

Учебно-методическое пособие может быть полезно студентам, инженерам и преподавателям, занимающихся проектированием и эксплуатацией промышленных роботов.

УДК 007.52:51(076.5)

ББК 32.816я7

ISBN 978-985-550-561-8

© Белорусский национальный  
технический университет, 2015

# ЛЕКЦИЯ 1

## Кинематика манипулятора Основные задачи кинематики манипулятора

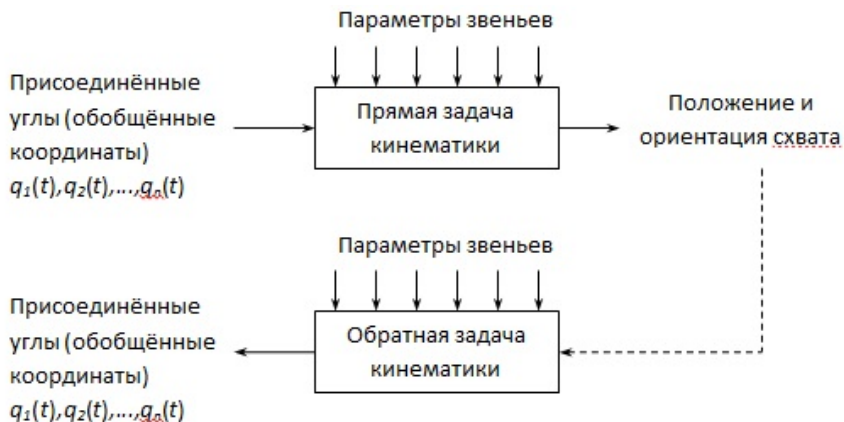


Рис. 1.1. Схема взаимосвязи прямой и обратной задач кинематики

### Прямая задача кинематики Матрицы поворота (вращения)

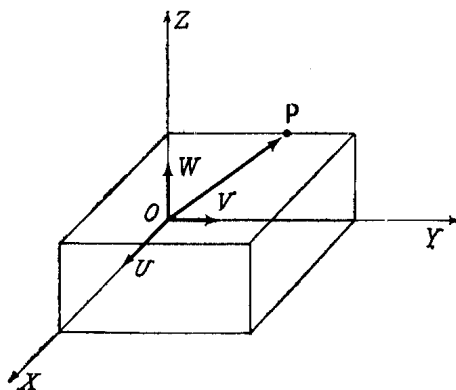


Рис. 1.2. Абсолютная и связанная системы координат

$$p_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{и} \quad p_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)^T, \quad (1.1)$$

где  $T$  – операция транспонирования.

$$p_{xyz} = R p_{uvw}. \quad (1.2)$$

$$p_{uvw} = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} p_x &= i_x p = i_x i_u p_u + i_x j_v p_v + i_x k_w p_w, \\ p_y &= j_y p = j_y i_u p_u + j_y j_v p_v + j_y k_w p_w, \\ p_z &= k_z p = k_z i_u p_u + k_z j_v p_v + k_z k_w p_w. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

С учетом этого выражения матрица  $R$  в равенстве (1.2) примет вид

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Аналогично координаты  $p_{uvw}$  можно получить из координат  $p_{xyz}$ :

$$p_{uvw} = Q p_{xyz}, \quad (1.7)$$

или

$$\begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u i_x & i_u j_y & i_u k_z \\ j_v i_x & j_v j_y & j_v k_z \\ k_w i_x & k_w j_y & k_w k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Поскольку операция скалярного произведения коммутативна, то из соотношений (1.6), (1.7) и (1.8) следует

$$Q = R^{-1} = R^T; \quad (1.9)$$

$$QR = R^T R = R^{-1} R = I_3, \quad (1.10)$$

где  $I_3$  – единичная матрица размерностью  $3 \times 3$ .

$$p_{xyz} = R_{x,\alpha} p_{uvw}, \quad (1.11)$$

Причем  $i_x \equiv i_u$ , и

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Матрицы  $R_{x,\alpha}$ ,  $R_{y,\varphi}$  и  $R_{z,\theta}$  называют *матрицами элементарных поворотов*.

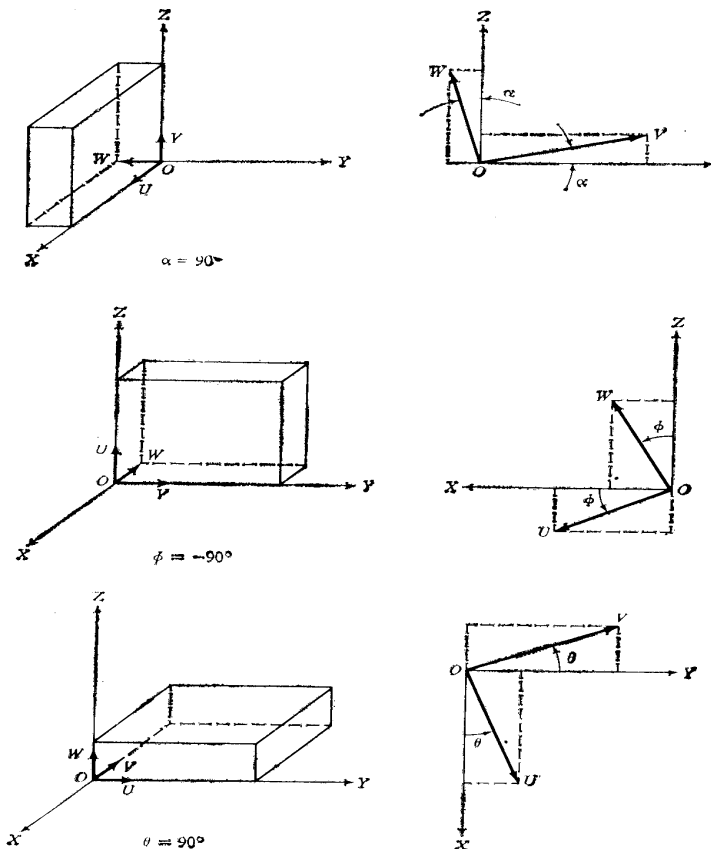


Рис. 1.3. Вращающаяся система координат

**Матрицы сложных поворотов**

$$\begin{aligned}
 R = R_{y,\varphi} R_{z,\theta} R_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & S\varphi S\alpha - C\varphi S\theta C\alpha & C\varphi S\theta S\alpha + S\varphi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\varphi C\theta & C\varphi C\theta C\alpha + C\varphi C\alpha & C\varphi C\alpha - S\varphi S\theta S\alpha \end{bmatrix}, \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

где  $C\varphi = \cos\varphi$ ;  $S\varphi = \sin\varphi$ ;  $C\theta = \cos\theta$ ;  $S\theta = \sin\theta$ ;  $C\alpha = \cos\alpha$ ;  $S\alpha = \sin\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 R = R_{x,\alpha}R_{z,\theta}R_{y,\varphi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta C\varphi & -S\theta & C\theta S\varphi \\ C\alpha S\theta C\varphi + S\alpha S\varphi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta S\varphi - S\alpha C\varphi \\ S\alpha S\theta C\varphi - C\alpha S\varphi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta S\varphi - C\alpha C\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

**Пример.** Требуется найти матрицу поворота, являющегося результатом последовательного выполнения поворотов сначала на угол  $\varphi$ , вокруг оси  $OY$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OW$  на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OU$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned}
 R &= R_{y,\varphi}I_3R_{w,\theta}R_{u,\alpha} = R_{y,\varphi}I_3R_{w,\theta}R_{u,\alpha} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & S\varphi S\alpha - C\varphi S\theta C\alpha & C\varphi S\theta S\alpha + S\varphi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\varphi C\theta & S\varphi S\theta C\alpha + C\varphi S\alpha & C\varphi C\alpha - S\varphi S\theta S\alpha \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Матрица результирующего поворота такая же, как (1.14), но последовательность поворотов отличается в последовательности, результатом которой является выражение (1.14).



## ЛЕКЦИЯ 2

### Матрица поворота вокруг произвольной оси

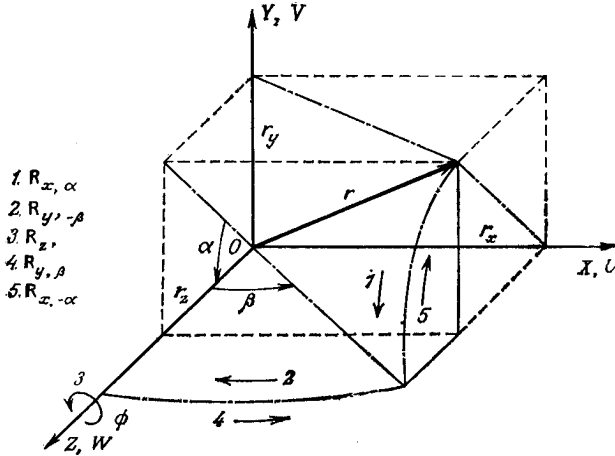


Рис. 2.1. Вращение вокруг произвольной оси

$$R_{r, \phi} = R_{x, -\alpha} R_{y, \beta} R_{z, \phi} R_{y, -\beta} R_{x, \alpha} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & -S\beta & 0 \\ S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\sin\alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}; \quad \sin\beta = r_x; \quad \cos\beta = \sqrt{r_y^2 + r_z^2}.$$

Подстановка этих равенств в предыдущее выражение дает

$$R_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V \varphi + c \varphi & r_x r_y V \varphi - r_z s \varphi & r_x r_z V \varphi + r_y s \varphi \\ r_x r_y V \varphi + r_z s \varphi & r_y^2 V \varphi + c \varphi & r_y r_z V \varphi - r_x s \varphi \\ r_x r_z V \varphi - r_y s \varphi & r_y r_z V \varphi + r_x s \varphi & r_z^2 V \varphi + c \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $V\varphi = \text{vers}\varphi = 1 - \cos\varphi$ .

### Представление матриц поворота через углы Эйлера

Таблица 2.1

Три системы углов Эйлера

	1	2	3
Последовательность поворотов	На $\varphi$ вокруг оси $OZ$	На $\varphi$ вокруг оси $OZ$	На $\psi$ вокруг оси $OX$
	На $\theta$ вокруг оси $OU$	На $\theta$ вокруг оси $OV$	На $\theta$ вокруг оси $OY$
	На $\psi$ вокруг оси $OW$	На $\psi$ вокруг оси $OW$	На $\varphi$ вокруг оси $OZ$

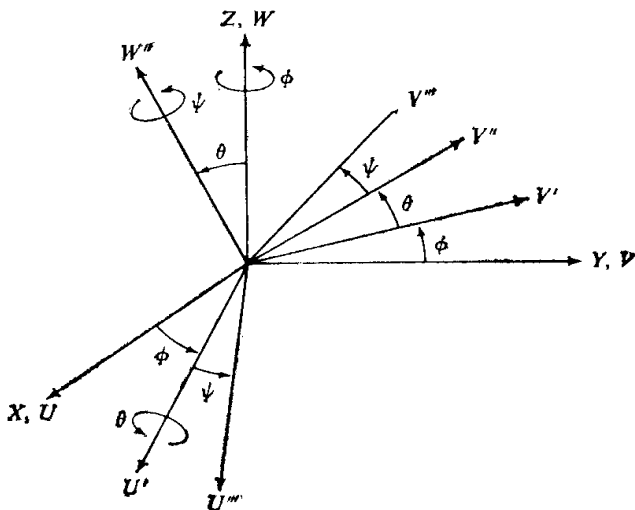


Рис. 2.2. Первая система углов Эйлера

Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} R_{u,\theta} R_{w,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\psi & s\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

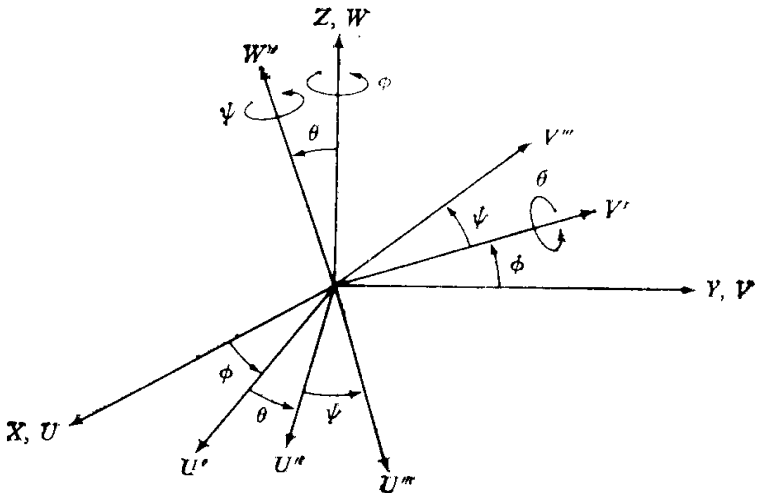


Рис. 2.3. Вторая система углов Эйлера

Результующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi}R_{y,\theta}R_{x,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta C\psi - C\varphi S\psi & -C\varphi C\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta \\ S\varphi C\theta C\psi + C\varphi S\psi & -S\varphi C\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta \end{bmatrix}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

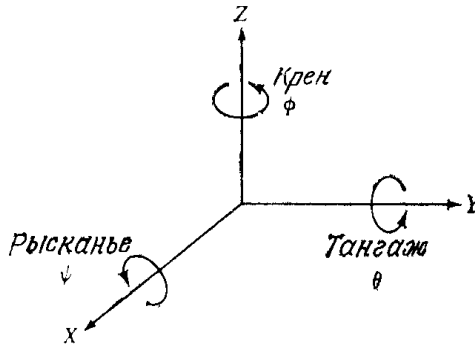


Рис. 2.4. Крен, тангаж, рыскание (третья система углов Эйлера)

Результующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi}R_{y,\theta}R_{x,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\varphi S\psi \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\varphi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

## ЛЕКЦИЯ 3

### Геометрический смысл матриц поворота Свойства матриц поворота Однородные координаты и матрицы преобразований

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Поворот} & \text{Сдвиг} \\ \hline \text{Преобразование} & \text{Масштабирование} \\ \text{перспективы} & \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

$$T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Эти матрицы размерностью  $4 \times 4$  называются *однородными матрицами элементарных поворотов*.

$$\hat{p}_{x,y,z} = T \hat{p}_{uvw} \quad (3.3)$$

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

## ЛЕКЦИЯ 4

### Звенья, сочленения и их параметры

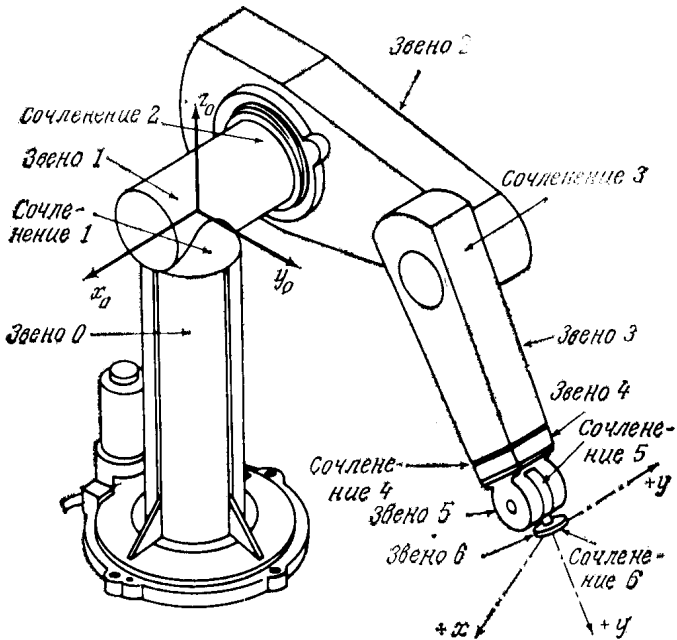


Рис. 4.1. Звенья и сочленения манипулятора Пума

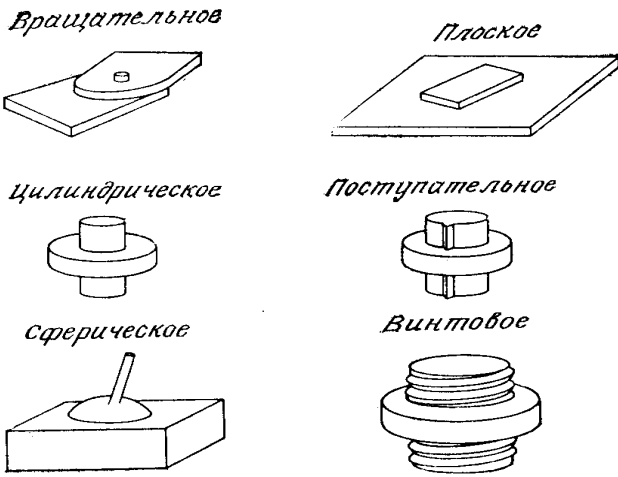


Рис. 4.2. Элементарные сочленения

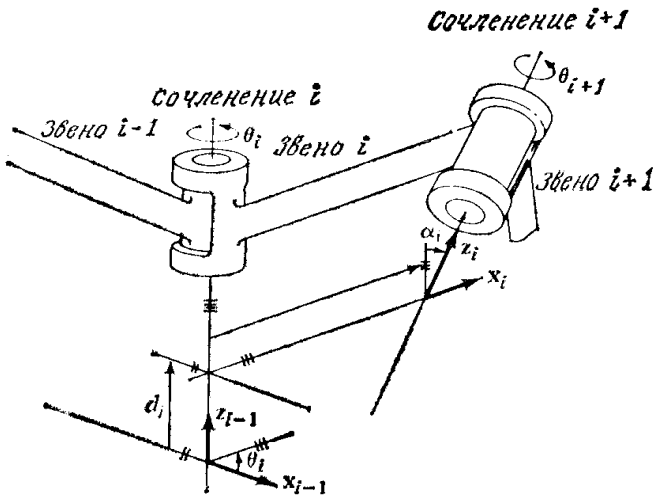


Рис. 4.3. Система координат и ее параметры

## Представление Денавита – Хартенберга

Алгоритм формирования систем координат звеньев

Параметры систем координат звеньев манипулятора Пума					
Сочленение $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Пределы измерения
1	90	-90	0	0	-160—+160
2	0	0	431,8 мм	149,09 мм	-225—45
3	90	90	-20,32 мм	0	-45—225
4	0	-90	0	433,07 мм	-110—170
5	0	90	0	0	-100—100
6	0	0	0	56,25 мм	-266—266

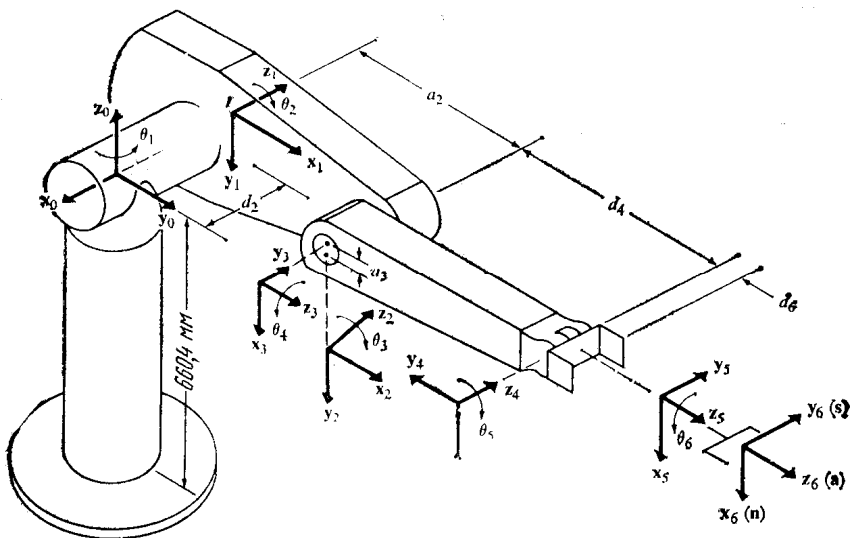


Рис. 4.4. Формирование систем координат звеньев для манипулятора Пума



ДХ-матрица преобразования для смежных систем координат с номерами  $i$  и  $i - 1$

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}A_i &= T_{z,d}T_z \sim T_{x,a}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} \cos Q_i & -\sin Q_i & 0 & 0 \\ \sin Q_i & \cos Q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos Q_i & -\cos \alpha_i \sin Q_i & \sin \alpha_i \sin Q_i & a_i \cos Q_i \\ \sin Q_i & \cos \alpha_i \cos Q_i & -\sin \alpha_i \cos Q_i & a_i \sin Q_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Преобразуя (3.1), найдем, что матрица, обратная к  ${}^{i-1}A_i$ , имеет вид

$$\left[ {}^{i-1}A_i \right]^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.2)$$

$$p_{i-1} = {}^{i-1}A_i p_i, \quad (4.3)$$

где  $p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$  и  $p_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ .

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$T_1 \equiv {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \end{bmatrix};$$

$$T_2 \equiv {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 D_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 - C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $C_i \equiv \cos \theta_i$ ;

$S_i \equiv \sin \theta_i$ ;

$C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$ ;

$S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

## ЛЕКЦИЯ 5

### Уравнения кинематики манипулятора

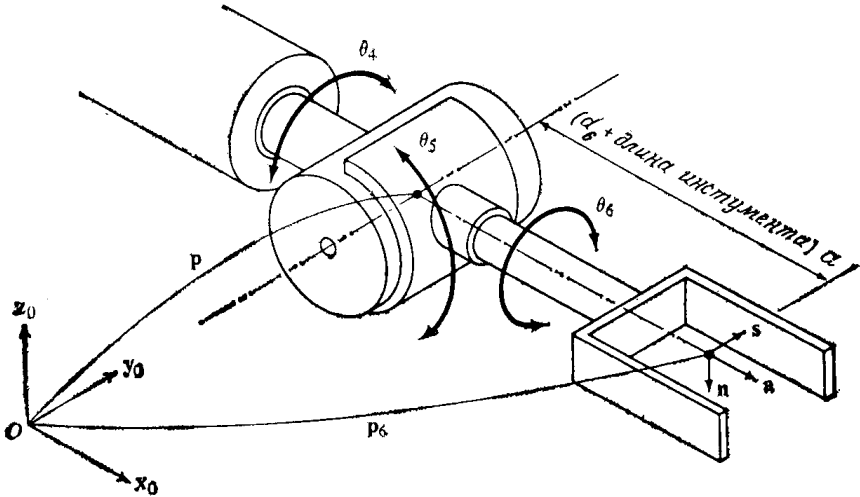


Рис. 5.1. Система координат схвата

$${}^0T_i = {}^0A_i {}^1A_i \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & S_x & a_x & p_x \\ n_y & S_y & a_y & p_y \\ n_z & S_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^{abc}T_{\text{инстр}} = B {}^0T_6 H. \quad (5.1)$$

При этом  $H \equiv {}^6A_{\text{инстр}}$ ,  $B \equiv {}^{abc}A_0$ .

Матрица  $T$  манипулятора Пума имеет вид

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & S_x & a_x & p_x \\ n_y & S_y & a_y & p_y \\ n_z & S_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где  $n_x = C_1 [C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$  ;  
 $n_y = S_1 [C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$  ;  
 $n_z = -S_{23} [C_4C_5C_6 - S_4S_6] - C_{23}S_5S_6$  ;  
 $S_x = C_1 [-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6)$  ;  
 $S_y = S_1 [-C_{23}(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6)$  ;  
 $S_z = S_{23} [C_4C_5S_6 + S_4C_6] + C_{23}S_5S_6$  ;  
 $a_x = C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5$  ;  
 $a_y = S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5$  ;  
 $a_z = -S_{23}C_4C_5 + C_{23}C_5$  ;  
 $p_x = C_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] - S_1(d_6S_4S_5 + d_2)$  ;  
 $p_y = S_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] + C_1(d_6S_4S_5 + d_2)$  ;  
 $p_z = d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}d_4 - a_3S_{23} - a_2S_2$  .

Например, при  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$ ,  $\theta_3 = 90^\circ$ ,  $\theta_4 = 0^\circ$ ,  $\theta_5 = 0^\circ$ ,  $\theta_6 = 0^\circ$ ,  
имеем

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -149,09 \\ 0 & 0 & 1 & 921,12 \\ -1 & 0 & 0 & 20,32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Обратная задача кинематики

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6. \quad (5.7)$$

## Методы обратных преобразований

$$\begin{bmatrix} n_x & S_x & a_x \\ n_y & S_y & a_y \\ n_z & S_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,\phi} R_{u,0} R_{\omega,\psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

где  $C_{ij} \equiv \cos(Q_i + Q_j)$  и  $S_{ij} \equiv \sin(Q_i + Q_j)$ ,

$$n_x = C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi; \quad (5.9a)$$

$$n_y = S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi; \quad (5.9б)$$

$$n_z = S\theta S\psi; \quad (5.9в)$$

$$S_x = -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi; \quad (5.9\Gamma)$$

$$S_y = -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi; \quad (5.9\Delta)$$

$$S_z = S\theta C\psi; \quad (5.9\epsilon)$$

$$a_x = S\varphi S\theta; \quad (5.9\text{ж})$$

$$a_y = -C\varphi S\theta; \quad (5.9з)$$

$$a_z = C\theta. \quad (5.9и)$$

$$\theta = \arccos(a_z), \quad (5.10)$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{S_z}{S\theta}\right], \quad (5.11)$$

$$\psi = \arccos\left[\frac{-a_y}{S\theta}\right]. \quad (5.12)$$

$$\theta = \text{ATAN2}(y, x) \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, & \text{если } x > 0, y > 0; \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, & \text{если } x < 0, y > 0; \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ИЛИ

$$\begin{bmatrix} C\varphi n_x + S\varphi n_y & C\varphi s_x + S\varphi s_y & C\varphi a_x + S\varphi a_y \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y & -S\varphi s_x + C\varphi s_y & -S\varphi a_x + C\varphi a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix};$$

$$C\varphi a_x + S\varphi a_y = 0; \quad (5.15)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{a_x}{-a_y} \right] = \operatorname{ATAN2}(a_x, -a_y). \quad (5.16)$$

$$C\psi = C\varphi n_x + S\varphi n_y; \quad (5.17a)$$

$$S\psi = -C\varphi s_x - S\varphi s_y; \quad (5.17b)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg} \left[ \frac{S\psi}{C\psi} \right] = \operatorname{arctg} \left[ \frac{-C\varphi s_x - S\varphi s_y}{C\varphi n_x + S\varphi n_y} \right] = \\ &= \operatorname{ATAN2}(-C\varphi s_x - S\varphi s_y, C\varphi n_x + S\varphi n_y). \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$S\theta = S\varphi a_x - C\varphi a_y;$$

$$C\theta = a_z; \quad (5.19)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left[ \frac{S\theta}{C\theta} \right] = \operatorname{arctg} \left[ \frac{S\varphi a_x - C\varphi a_y}{a_z} \right] = \operatorname{ATAN2}(S\varphi a_x - C\varphi a_y, a_z). \quad (5.20)$$



## ЛЕКЦИЯ 6

### Геометрический подход к решению обратной задачи кинематики

$${}^0T_6 = T = B^{-1} \text{abc} T_{\text{инстр}} H^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & S_x & a_x & p_x \\ n_y & S_y & a_y & p_y \\ n_z & S_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

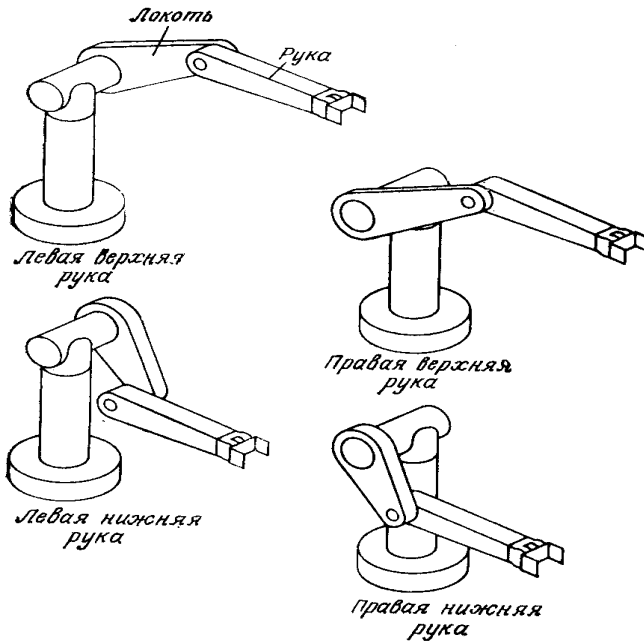


Рис. 6.1. Определение различных конфигураций манипулятора

$$\text{РУКА} = \begin{cases} +1, & \text{для ПРАВОЙ руки;} \\ -1, & \text{для ЛЕВОЙ руки;} \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\text{ЛОКОТЬ} = \begin{cases} +1, & \text{для ВЕРХНЕЙ руки;} \\ -1, & \text{для НИЖНЕЙ руки;} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если КИСТЬ ВНИЗ;} \\ -1, & \text{если КИСТЬ ВВЕРХ;} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\text{ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ} = \begin{cases} +1 - & \text{сменить ориентацию запястья;} \\ -1 - & \text{не менять ориентацию запястья.} \end{cases} \quad (6.5)$$

### Решение обратной задачи кинематики для первых трех сочленений

$$P = P_6 - d_6 a = (p_x, p_y, p_z)^T, \quad (6.6)$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) - d_2 S_1 \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) + d_2 C_1 \\ d_4 C_{23} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

### Решение для первого сочленения

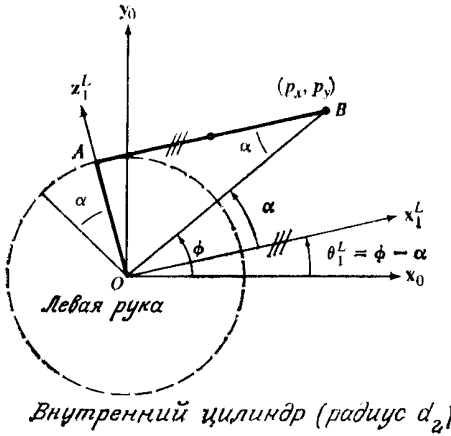
$$\theta_1^L = \varphi - \alpha, \quad \theta_1^R = \pi + \varphi + \alpha; \quad (6.8)$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_z^2}, \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}; \quad (6.9)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_y}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{p_x}{R}; \quad (6.10)$$

$$\sin \alpha = \frac{d_2}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{R}, \quad (6.11)$$

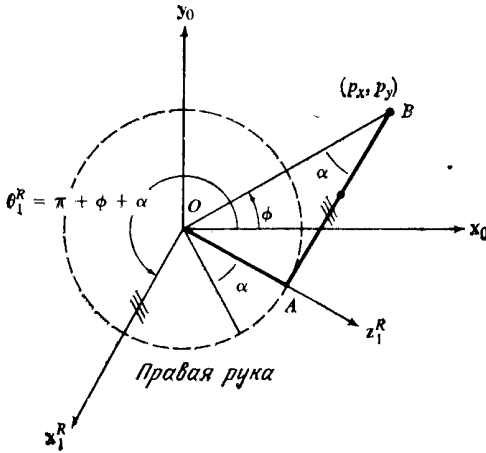
где индексы  $L$  и  $R$  означают ЛЕВУЮ и ПРАВУЮ конфигурацию манипулятора.



$$OA = d_2$$

$$AB = r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}$$

$$OB = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = R$$



$$OA = d_2$$

$$AB = r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 - d_2^2}$$

$$OB = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Рис. 6.2. Решение для первого сочленения

$$\sin \theta_1^L = \sin(\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha = \frac{P_y r - P_x d_2}{R^2}; \quad (6.12)$$

$$\cos \theta_1^L = \cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = \frac{P_x r + P_y d_2}{R^2}; \quad (6.13)$$

$$\sin \theta_1^R = \sin(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-P_y r - P_x d_2}{R^2}; \quad (6.14)$$

$$\sin \theta_1^R = \sin(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-p_x r - p_y d_2}{R^2}. \quad (6.15)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{-\text{ПУКА } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2}; \quad (6.16)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-\text{ПУКА } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2}. \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{arctg} \left[ \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right] = \\ &= \text{arctg} \left[ \frac{-\text{ПУКА } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{-\text{ПУКА } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2} \right] - \pi \leq \theta_1 \leq \pi. \end{aligned} \quad (6.18)$$

### Решение для второго сочленения

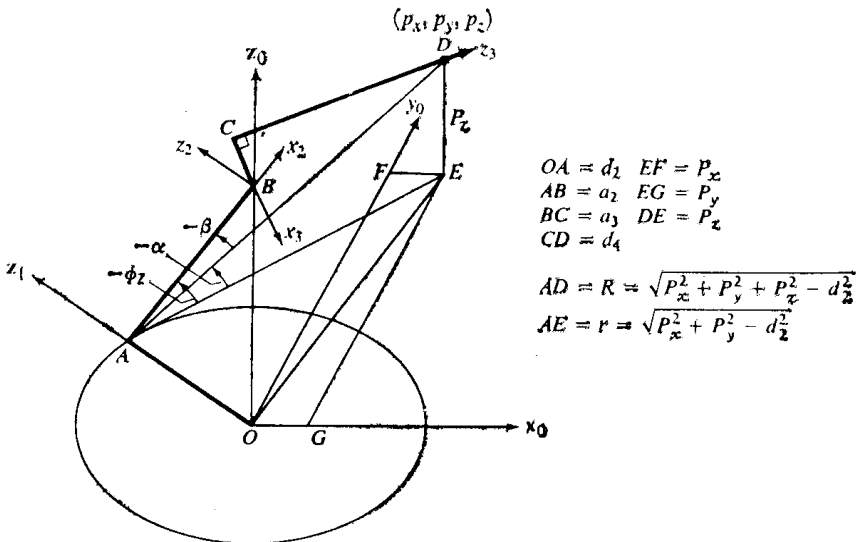


Рис. 6.3. Решение для второго сочленения

Как следует из табл. 6.1, используя индикаторы конфигурации РУКА и ЛОКОТЬ, для  $\theta_2$  можно записать единое для всех возможных конфигураций манипулятора выражение

$$\theta_2 = \alpha + (\text{РУКА} \times \text{ЛОКОТЬ})\beta = \alpha + K\beta; \quad (6.19)$$

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}, \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}; \quad (6.20)$$

$$\sin \alpha = -\frac{p_z}{R} = -\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}; \quad (6.21)$$

$$\cos \alpha = -\frac{\text{РУКА} \cdot r}{R} = -\frac{\text{РУКА} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}; \quad (6.22)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2R} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}; \quad (6.23)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \quad (6.24)$$

Таблица 6.1

Угол  $\theta_2$  при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	$\theta_2$	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА $\cdot$ ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

Из равенств (6.19) – (6.24) можно определить значение функций синуса и косинуса угла  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin(\alpha + K\beta) = \sin \alpha \cos(K\beta) + \cos \alpha \sin(K\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + (\text{РУКА} \times \text{ЛОКОТЬ}) \cos \alpha \sin \beta; \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\cos \theta_2 = \cos(\alpha + K\beta) = \cos \alpha \cos \beta - (\text{РУКА} \times \text{ЛОКОТЬ}) \sin \alpha \sin \beta; \quad (6.26)$$

$$\theta_2 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right], \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi. \quad (6.27)$$

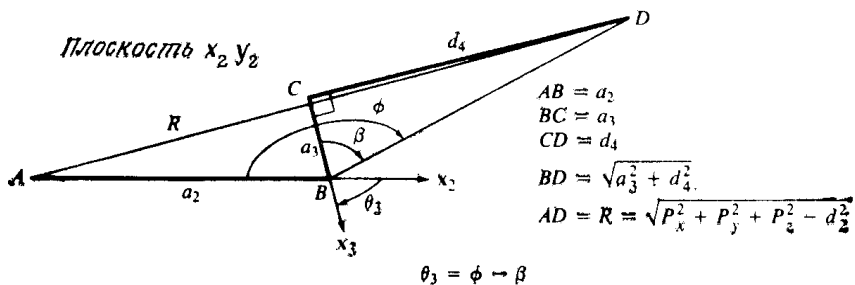
## ЛЕКЦИЯ 7

### Решение для третьего сочленения

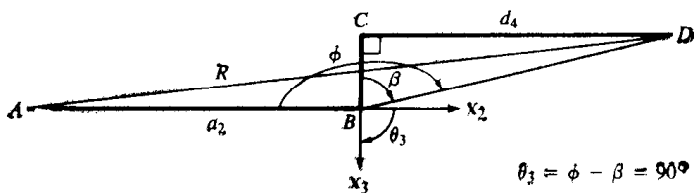
Таблица 7.1

Угол  $\theta_3$  при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	$({}^2P_4)_y$	$\theta_3$	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА·× ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\geq 0$	$\varphi - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\leq 0$	$\varphi - \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\geq 0$	$\varphi - \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\leq 0$	$\varphi - \beta$	+1	-1	-1



*Левая нижняя рука*



*Левая нижняя рука*

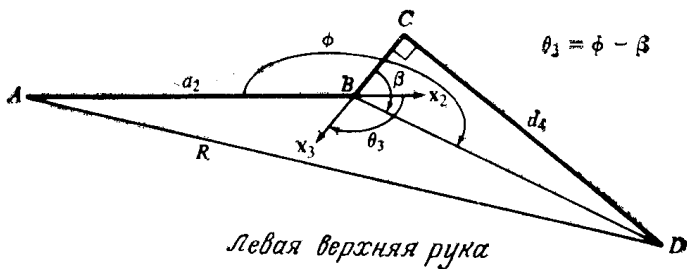


Рис. 7.1. Решение для третьего сочленения

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}, \quad (7.1)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2 \sqrt{d_4^2 + a_3^2}}; \quad (7.2)$$

$$\sin \varphi = \text{РУКА} \times \text{ЛОКОТЬ} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi};$$

$$\sin \beta = \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}. \quad (7.3)$$

$$\theta_3 = \varphi - \beta. \quad (7.4)$$

$$\sin \theta_3 = \sin(\varphi - \beta) = \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta; \quad (7.5)$$

$$\cos \theta_3 = \cos(\varphi - \beta) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta. \quad (7.6)$$

$$\theta_3 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right], \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi. \quad (7.7)$$

### **Решение обратной задачи кинематики для последних трех сочленений**

$$z_4 = \frac{\pm |(z_3 a)}{\|z_3 a\|} \text{ при заданном } a = (a_x, a_y, a_z)^T; \quad (7.8)$$

$$a = z_5 \text{ при заданном } a = (a_x, a_y, a_z)^T; \quad (7.9)$$

$$S = y_6 \text{ при заданных } s = (s_x, s_y, s_z)^T \text{ и } n = (n_x, n_y, n_z)^T. \quad (7.10)$$

### **Решение для четвертого сочленения**

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ sy_5, & \text{если } sy_5 \neq 0; \\ ny_5, & \text{если } sy_5 = 0. \end{cases} \quad (7.11)$$



$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ s \cdot \frac{(z_3 a)}{\|z_3 a\|}, & \text{если } s \cdot (z_3 a) \neq 0; \\ n \cdot \frac{(z_3 a)}{\|z_3 a\|}, & \text{если } s \cdot (z_3 a) = 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\sin \theta_4 = -M(z_4 x_3), \quad \cos \theta_4 = M(z_4 y_3). \quad (7.13)$$

$$\text{ign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \geq 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\theta_4 = \text{arctg} \left[ \frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4} \right] = \text{arctg} \left[ \frac{M(C_1 a_y - S_1 a_x)}{M(C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z)} \right],$$

$$-\pi \leq \theta_4 \leq \pi. \quad (7.15)$$

Таблица 7.2

Различные ориентации запястья

Ориентация запястья	$\Omega = sy_5$ или $ny_5$	M-ЗАПЯСТЬЕ $\times$ sign( $\Omega$ )	
КИСТЬ ВНИЗ	$\geq 0$	+1	+1
КИСТЬ ВНИЗ	$< 0$	+1	-1
КИСТЬ ВВЕРХ	$\geq 0$	-1	-1
КИСТЬ ВВЕРХ	$< 0$	-1	+1

$$\sin \theta_4 = -(z_4 \cdot x_3)$$

$$\cos \theta_4 = z_4 \cdot y_3$$

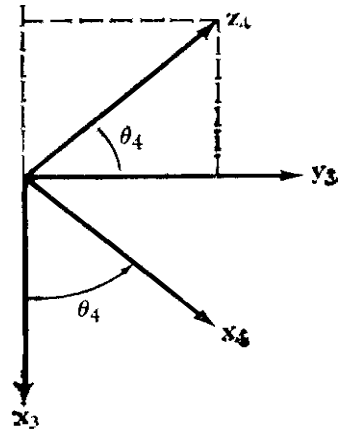


Рис. 7.2. Решение для четвертого сочленения

### Решение для пятого сочленения

$$\sin \theta_5 = ax_4, \quad \cos \theta_5 = -(ay_4). \quad (7.16)$$

$$\sin \theta_5 = a \cdot x_4$$

$$\cos \theta_5 = -(a \cdot y_4)$$

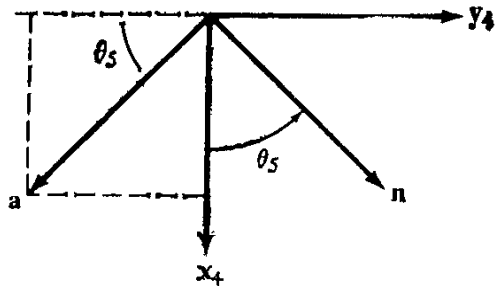


Рис. 7.3. Решение для пятого сочленения

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin \theta_5}{\cos \theta_5} \right] =$$

$$= \operatorname{arctg} \left[ \frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right],$$

$$-\pi \leq \theta_5 \leq \pi. \quad (7.17)$$

Если  $\theta_5 \approx 0$ , имеет место вырожденный случай.

### Решение для шестого сочленения

$$\sin \theta_6 = n y_5, \quad \cos \theta_6 = s y_5; \quad (7.18)$$

$$\theta_6 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sin \theta_6}{\cos \theta_6} \right] =$$

$$= \operatorname{arctg} \left[ \frac{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y - (S_4 S_{23}) n_z}{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) s_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) s_y + (S_4 S_{23}) s_z} \right],$$

$$-\pi \leq \theta_6 \leq \pi. \quad (7.19)$$

$$\sin \theta_6 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5$$

$$\cos \theta_6 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5$$

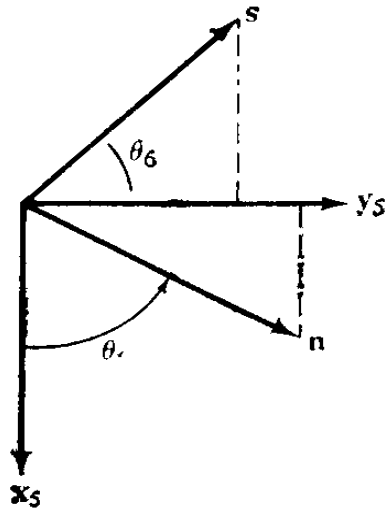


Рис. 7.4. Решение для шестого сочленения

## ЛЕКЦИЯ 8

### Уравнения вида конфигурации для определения индикаторов конфигурации манипулятора

$$g(\theta, p) = z_0 \cdot \frac{z_1 p'}{\|z_1 p'\|} = z_0 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\|z_1 p'\|} =$$

$$= \frac{-p_y \sin \theta_1 - p_x \cos \theta_1}{\|z_1 p'\|}. \quad (8.1)$$

$$\text{РУКА} = \text{sign}[g(\theta, p)] = \text{sign}(-p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1); \quad (8.2)$$

$$\text{РУКА} = \text{sign}[g(\theta, p)] = \text{sign}[g(\theta)] = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_{23} C_{23} - a_2 C_2); \quad (8.3)$$

$$\text{РУКА} = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_{23} C_{23} - a_2 C_2) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ПРАВАЯ} \text{ рука;} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛЕВАЯ} \text{ рука;} \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\text{ЛОКОТЬ} = \text{РУКА} \cdot \text{sign}(d_4 C_3 - a_3 S_3) =$$

$$= \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ выше запястья,} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ ниже запястья.} \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, \text{ если } sz_4 > 0 \\ -1, \text{ если } sz_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(sz_4). \quad (8.6)$$

Если  $sz_4 = 0$ , значение индикатора ЗАПЯСТЬЕ можно определить из выражения:

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если } nz_4 > 0 \\ -1, & \text{если } nz_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(nz_4). \quad (8.7)$$

Объединив равенства (8.1) и (8.2), получим

$$\begin{aligned} \text{ЗАПЯСТЬЕ} &= \begin{cases} \text{sign}(sz_4), & \text{если } sz_4 \neq 0 \\ \text{sign}(nz_4), & \text{если } sz_4 = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВНИЗ}, \\ -1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВВЕРХ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.8)$$

### Динамика манипулятора

#### Метод Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (8.9)$$

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T. \quad (8.10)$$

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i, \quad (8.11)$$

где

$${}^0 A_i = {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i. \quad (8.12)$$

Если  $i$ -е сочленение – вращательное, то матрица  ${}^{i-1} A_i$  имеет вид

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Если  $i$ -е сочленение – поступательное, то матрица  ${}^{i-1}A_i$  имеет вид

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

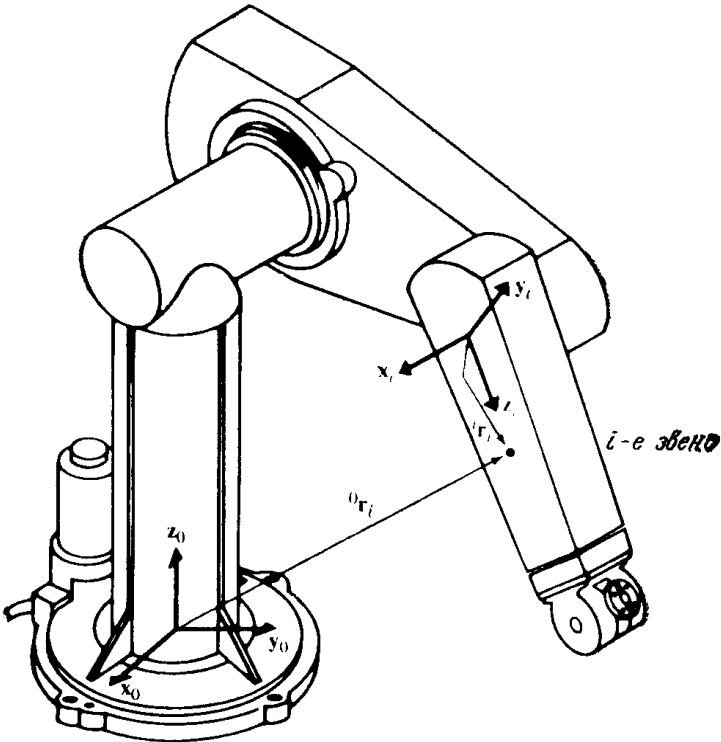


Рис. 8.1. Точка  ${}^i r_i$   $i$ -го звена

$$\begin{aligned}
{}^0v_i \equiv v_i &= \frac{d}{dt}({}^0r_i) = \frac{d}{dt}({}^0A_i \dot{r}_i) = \\
&= {}^0\dot{A}_1 A_2 \dots {}^{i-1}A_i \dot{r}_i + {}^0A_1 \dot{A}_2 \dots {}^{i-1}A_i \dot{r}_i + \dots + {}^0A_1 \dots {}^{i-1}\dot{A}_i \dot{r}_i + {}^0A_i \dot{r}_i = . \quad (8.15) \\
&= \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i r_i.
\end{aligned}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (8.16a)$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.16b)$$

$$\frac{\partial^{i-1}A_i}{q_i} = Q_i^{i-1}A_i. \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{i-1}A_i}{\partial \theta_i} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & -a_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv Q_i^{i-1}A_i.
\end{aligned}$$

Таким образом, для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 A_1^1 A_2 \dots {}^{i-2} A_{j-1} Q_j^{j-1} A_j \dots {}^{i-1} A_i, & \text{если } j \leq i; \\ 0, & \text{если } j > i. \end{cases} \quad (8.18)$$

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} Q_j^{j-1} A_i, & \text{если } j \leq i; \\ 0, & \text{если } j > i. \end{cases} \quad (8.19)$$

$$U_i = \left[ \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i r_i. \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = U_{ijk} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} Q_j^{j-1} A_{k-1} Q_k^{k-1} A_i, & \text{если } i \geq k \geq j; \\ {}^0 A_{k-1} Q_k^{k-1} A_{j-1} Q_j^{j-1} A_i, & \text{если } i \geq j \geq k; \\ 0, & \text{если } i < j \text{ или } i < k. \end{cases} \quad (8.21)$$

Например, для манипулятора вращательными сочленениями при  $i = j = k = 1$  и  $q_i = \theta_i$  имеем

$$\frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (Q_1^0 A_1) = Q_1 Q_1^0 A_1.$$



## ЛЕКЦИЯ 9

### Кинематическая энергия манипулятора

$$dK_i = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)dm = \frac{1}{2} \text{sled} (U_i U_i^T)dm = \frac{1}{2} \text{Tr}(U_i U_i^T)dm. \quad (9.1)$$

Подставляя в выражение (9.1) значение  $U_i$  из равенства (8.20), получим выражение для кинетической энергии элемента массой  $dm$

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p \quad {}^i r_i \left( \sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r \quad {}^i r_i \right)^T \right] dm = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip}^i r_i^j r_i^T U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} ({}^i r_i dm \quad {}^i r_i^T) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]. \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left( \int {}^i r_i \quad {}^i r_i^T dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]. \quad (9.3)$$

Интегральный член в скобках представляет собой матрицу инерции  $J_i$   $i$ -го звена

$$J_i = \int {}^i r_i \quad {}^i r_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Преобразуя выражения, получим

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

где  ${}^i\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  однородные координаты центра масс  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат;

$$I_{ij} = \int \left[ \delta_{ij} \left( \sum_k x_k^2 \right) - x_i x_j \right] dm - \text{тензор инерции, где } i, j, k \text{ принимают значения } x_i, y_i, z_i \text{ (оси } i\text{-й системы координат), а } \delta_{ij} - \text{символ Кронекера.}$$

мают значения  $x_i, y_i, z_i$  (оси  $i$ -й системы координат), а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

$$J_k = m_i \times \begin{bmatrix} \frac{-k_{i11}^2 + k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i12}^2 & k_{i13}^2 & \bar{x}_i \\ k_{i12}^2 & \frac{k_{i11}^2 - k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i23}^2 & \bar{y}_i \\ k_{i13}^2 & k_{i23}^2 & \frac{k_{i11}^2 + k_{i22}^2 - k_{i33}^2}{2} & \bar{z}_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Здесь  $K_{ijk} = \frac{I_{jk}}{m_i}$  и  $j, k = 1, 2, 3$ , а  ${}^i\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$  – радиус

вектор центра масс  $i$ -го звена в системе координат  $i$ -го звена.

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[ \text{Tr} (U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r \right].
\end{aligned} \tag{9.7}$$

### Потенциальная энергия манипулятора

$$P_i = -m_i g {}^0 \bar{z}_i = -m_i g ({}^0 A_i {}^i \bar{z}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{9.8}$$

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{j=1}^n -m_j g ({}^0 A_j {}^j \bar{z}_j). \tag{9.9}$$

### Уравнение движения манипулятора

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[ \text{Tr} (U_{ij} J_i U_{ik}^T) \dot{q}_i \dot{q}_k \right] + \sum_{i=1}^n m_i g ({}^0 \bar{A}_i {}^i \bar{r}_i). \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned}
\tau_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr} (U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \\
&+ \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr} (U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji}^j \bar{r}_j, \\
&i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{9.12}$$

$$\tau(t) = D(q(t)) \cdot \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t)), \tag{9.13}$$

где  $\tau(t)$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных сил, создаваемых силовыми приводами в сочленениях манипулятора:

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T; \tag{9.14}$$

$q(t)$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) присоединенных переменных манипулятора:

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T; \quad (9.15)$$

$\dot{q}(t)$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных скоростей:

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t))^T; \quad (9.16)$$

$\ddot{q}(t)$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных ускорений:

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t))^T; \quad (9.17)$$

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(U_{jk} J_k U_{ji}^T), \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (9.18)$$

$h(q, \dot{q})$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) кориолисовых и центробежных сил:

$$h(q, \dot{q}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T,$$

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (9.19)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T), \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (9.20)$$

$c(q)$  – вектор (размерностью  $n \times 1$ ) гравитационных сил:

$$c(q) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

$$c_i = \sum_{j=i}^n (-m_i g U_{ji}^j \bar{r}_j), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (9.21)$$

**Уравнение движения манипулятора  
с вращательными сочленениями**

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{15} & D_{25} & D_{35} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (9.22)$$

где

$$D_{11} = T_2(U_{11}J_1U_{11}^T) + T_2(U_{21}J_2U_{21}^T) + T_2(U_{31}J_3U_{31}^T) + \\ + T_2(U_{41}J_4U_{41}^T) + T_2(U_{51}J_5U_{51}^T) + T_2(U_{61}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{12} = D_{21} = T_2(U_{22}J_2U_{21}^T) + T_2(U_{32}J_3U_{31}^T) + T_2(U_{42}J_4U_{41}^T) + \\ + T_2(U_{52}J_5U_{51}^T) + T_2(U_{62}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{13} = D_{31} = T_2(U_{33}J_3U_{31}^T) + T_2(U_{43}J_4U_{41}^T) + T_2(U_{53}J_5U_{51}^T) + \\ + T_2(U_{63}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{14} = D_{41} = T_2(U_{44}J_4U_{41}^T) + T_2(U_{54}J_5U_{51}^T) + T_2(U_{64}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{15} = D_{51} = T_2(U_{55}J_5U_{51}^T) + T_2(U_{65}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{16} = D_{61} = T_2(U_{66}J_6U_{61}^T);$$

$$D_{22} = T_2(U_{22}J_2U_{22}^T) + T_2(U_{32}J_3U_{32}^T) + T_2(U_{42}J_4U_{42}^T) + \\ + T_2(U_{52}J_5U_{52}^T) + T_2(U_{62}J_6U_{62}^T);$$

$$D_{23} = D_{32} = T_2(U_{33}J_3U_{32}^T) + T_2(U_{43}J_4U_{42}^T) + \\ + T_2(U_{53}J_5U_{52}^T) + T_2(U_{63}J_6U_{62}^T);$$

$$D_{24} = D_{42} = T_2(U_{44}J_4U_{42}^T) + T_2(U_{54}J_5U_{52}^T) + T_2(U_{64}J_6U_{62}^T);$$

$$D_{25} = D_{52} = T_2(U_{55}J_5U_{52}^T) + T_2(U_{65}J_6U_{62}^T);$$

$$D_{26} = D_{62} = T_2(U_{66}J_6U_{62}^T);$$

$$D_{33} = T_2(U_{33}J_3U_{33}^T) + T_2(U_{43}J_4U_{43}^T) + T_2(U_{53}J_5U_{53}^T) + T_2(U_{63}J_6U_{63}^T);$$

$$D_{34} = D_{43} = T_2(U_{44}J_4U_{43}^T) + T_2(U_{54}J_5U_{53}^T) + T_2(U_{63}J_6U_{63}^T);$$

$$D_{35} = D_{53} = T_2(U_{55}J_5U_{53}^T) + T_2(U_{65}J_6U_{63}^T);$$

$$D_{36} = D_{63} = T_2(U_{66}J_6U_{63}^T);$$

$$D_{44} = T_2(U_{44}J_4U_{44}^T) + T_2(U_{54}J_5U_{54}^T) + T_2(U_{63}J_6U_{64}^T);$$

$$D_{45} = D_{54} = T_2(U_{55}J_5U_{54}^T) + T_2(U_{65}J_6U_{64}^T);$$

$$D_{46} = D_{64} = T_2(U_{66}J_6U_{64}^T);$$

$$D_{55} = T_2(U_{55}J_5U_{55}^T) + T_2(U_{65}J_6U_{65}^T);$$

$$D_{56} = D_{65} = T_2(U_{66}J_6U_{65}^T);$$

$$D_{66} = T_2(U_{66}J_6U_{66}^T).$$

$$H_{iv} = \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} & h_{i14} & h_{i15} & h_{i16} \\ h_{i12} & h_{i22} & h_{i32} & h_{i24} & h_{i25} & h_{i26} \\ h_{i13} & h_{i23} & h_{i33} & h_{i34} & h_{i35} & h_{i36} \\ h_{i14} & h_{i24} & h_{i34} & h_{i44} & h_{i45} & h_{i46} \\ h_{i15} & h_{i25} & h_{i35} & h_{i54} & h_{i55} & h_{i56} \\ h_{i16} & h_{i26} & h_{i36} & h_{i64} & h_{i65} & h_{i66} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, 6. \quad (9.23)$$

$$\dot{\theta}(t) = [\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dots, \dot{\theta}_6(t)]. \quad (9.24)$$

$$h_i = \dot{\theta}^T H_{i,v} \dot{\theta}. \quad (9.25)$$

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T H_{1,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{2,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{3,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{4,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{5,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{6,v} \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (9.26)$$

$$c(\theta) = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)^T, \quad (9.27)$$

где

$$c_1 = -(m_1 g U_{11} \overline{r_1} + m_2 g U_{21} \overline{r_2} + m_3 g U_{31} \overline{r_3} + m_4 g U_{41} \overline{r_4} + m_5 g U_{51} \overline{r_5} + m_6 g U_{61} \overline{r_6});$$

$$c_2 = -(m_2 g U_{22} \overline{r_2} + m_3 g U_{32} \overline{r_3} + m_4 g U_{42} \overline{r_4} + m_5 g U_{52} \overline{r_5} + m_6 g U_{62} \overline{r_6});$$

$$c_3 = -(m_3 g U_{33} \overline{r_3} + m_4 g U_{43} \overline{r_4} + m_5 g U_{53} \overline{r_5} + m_6 g U_{63} \overline{r_6});$$

$$c_4 = -(m_4 g U_{44} {}^4\bar{r}_4 + m_5 g U_{54} {}^5\bar{r}_5 + m_6 g U_{64} {}^6\bar{r}_6);$$

$$c_5 = -(m_5 g U_{55} {}^5\bar{r}_5 + m_6 g U_{65} {}^6\bar{r}_6);$$

$$c_6 = -m_6 g U_{66} {}^6\bar{r}_6.$$

## ЛЕКЦИЯ 10

### Уравнения Ньютона-Эйлера

#### Вращающиеся системы координат

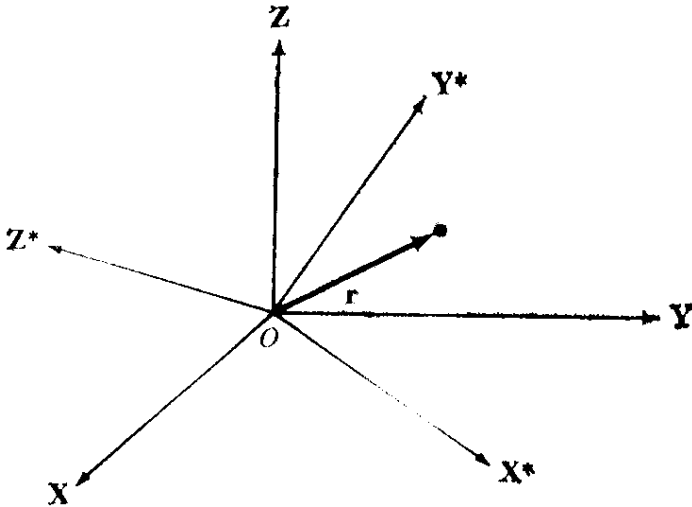


Рис. 10.1. Вращающаяся система координат

$$r = xi + yi + zi; \quad (10.1)$$

$$r = x^* i^* + y^* i^* + z^* i^*. \quad (10.2)$$

$$\frac{d(\quad)}{dt} \text{ — скорость в неподвижной системе координат } OXYZ; \quad (10.3)$$



$\frac{d^*(\ )}{dt}$  – скорость в подвижной вращающейся системе координат  $Ox^*Y^*Z^*$ . (10.4)

$$\frac{dr}{dt} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k + x \frac{di}{dt} + y \frac{dj}{dt} + z \frac{dk}{dt} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k. \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^*r}{dt} &= \dot{x}^*i^* + \dot{y}^*j^* + \dot{z}^*k^* + x^* \frac{d^*i^*}{dt} + y^* \frac{d^*j^*}{dt} + z^* \frac{d^*k^*}{dt} = \\ &= \dot{x}^*i^* + \dot{y}^*j^* + \dot{z}^*k^*; \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \dot{x}^*i^* + \dot{y}^*j^* + \dot{z}^*k^* + x^* \frac{di^*}{dt} + y^* \frac{dj^*}{dt} + z^* \frac{dk^*}{dt} = \\ &= \frac{d^*r}{dt} + x^* \frac{di^*}{dt} + y^* \frac{dj^*}{dt} + z^* \frac{dk^*}{dt}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

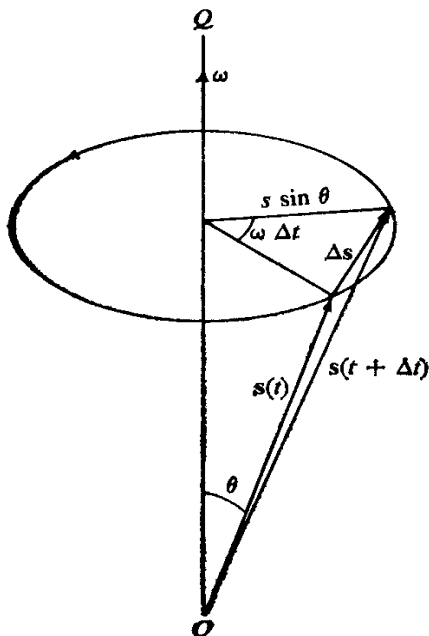


Рис. 10.2. Скорость во вращающейся системе координат

$$\frac{ds}{dt} = \omega s. \quad (10.8)$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (10.9)$$

$$\omega s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (10.10)$$

$$|\omega s| = \omega s \sin \theta. \quad (10.11)$$

$$|\Delta s| = (s \sin \theta)(\omega \Delta t). \quad (10.12)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^*r}{dt} + x^* (\omega + i^*) + y^* (\omega + j^*) + z^* (\omega + k^*) = \frac{d^*r}{dt} + \omega r; \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^*r}{dt} \right] + \omega \frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r = \\ &= \frac{d^{*2}r}{dt^2} + \omega \frac{d^*r}{dt} + \omega \left[ \frac{d^*r}{dt} + \omega r \right] + \frac{d\omega}{dt} r = \\ &= \frac{d^{*2}r}{dt^2} + 2\omega \frac{d^*r}{dt} + \omega(\omega r) + \frac{d\omega}{dt} r. \end{aligned} \quad (10.14)$$

## ЛЕКЦИЯ 11

### Подвижные системы координат

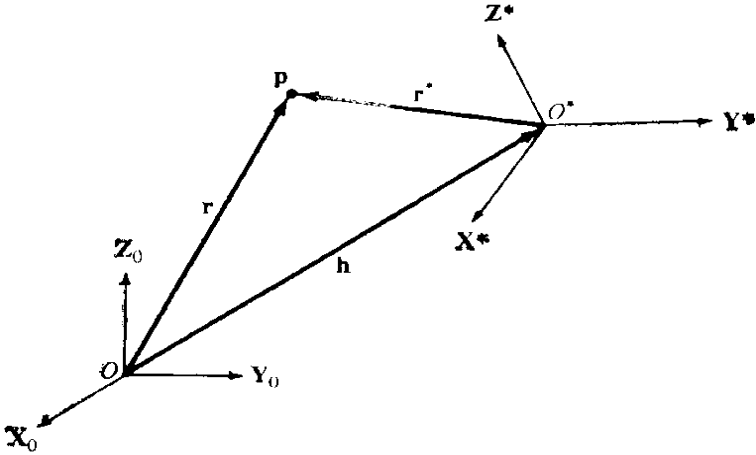


Рис. 11.1. Подвижная система координат

$$r = r^* + h. \quad (11.1)$$

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = v^* + v_h; \quad (11.2)$$

$$v(t) = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = \frac{d^*r^*}{dt} + \omega r^* + \frac{dh}{dt}. \quad (11.3)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \frac{d^2h}{dt^2} = a^* + a_h; \quad (11.4)$$

$$a(t) = \frac{d^{*2}r^*}{dt^2} + 2\omega \frac{d^*r^*}{dt} + \omega(\omega r^*) + \frac{d\omega}{dt} r^* + \frac{d^2h}{dt^2}. \quad (11.5)$$

## ЛЕКЦИЯ 12

### Кинематика звеньев манипулятора

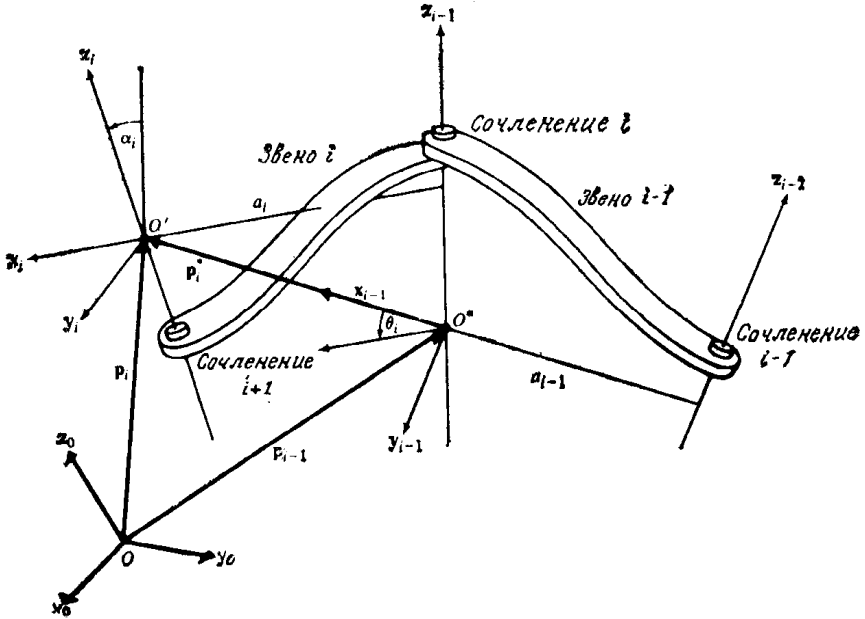


Рис. 12.1. Взаимосвязь систем координат, имеющих начала в точках  $O$ ,  $O''$ ,  $O'$

$$v_i = \frac{d^* p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} p_i^* + v_{i-1}, \quad (12.1)$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\omega}_i^*, \quad (12.2)$$

$$\dot{U}_i = \frac{d^{*2} p_i^*}{dt^2} + \dot{\omega}_{i-1} p_i^* + 2\omega_{i-1} \frac{d^* p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} (\omega_{i-1} p_i^*) + \dot{U}_{i-1}, \quad (12.3)$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\omega}_i^*. \quad (12.4)$$

$$\dot{\omega}_i^* = \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \omega_i^*. \quad (12.5)$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \omega_i^*. \quad (12.6)$$

$$\omega_i^* = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i-e \text{ сочленение – вращательное;} \\ 0, & \text{если } i-e \text{ сочленение – поступательное.} \end{cases} \quad (12.7)$$

$$\frac{d^* \omega_i^*}{dt} = \begin{cases} z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если } i-e \text{ сочленение – вращательное;} \\ 0, & \text{если } i-e \text{ сочленение – поступательное.} \end{cases} \quad (12.8)$$

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i-e \text{ сочленение – вращательное;} \\ \omega_{i-1}, & \text{если } i-e \text{ сочленение – поступательное.} \end{cases} \quad (12.9)$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i), & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – вращательное;} \\ \omega_{i-1}, & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – поступательное.} \end{cases} \quad (12.10)$$

$$\frac{dp_i^*}{dt} = \begin{cases} \omega_i^* p_i^*, & \text{если } i-e \text{ сочленение – вращательное;} \\ z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i-e \text{ сочленение – поступательное.} \end{cases} \quad (12.11)$$

$$\frac{d^{*2} p_i^*}{dt^2} = \begin{cases} \frac{d^* \omega_i^*}{dt} p_i^* + \omega_i^* (\omega_i^* p_i^*), & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – вращательное;} & \\ z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – поступательное.} & \end{cases} \quad (12.12)$$

$$v_i = \begin{cases} \omega_i p_i^* + v_i, & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – вращательное;} & \\ z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_i p_i^* + v_{i-1}, & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – поступательное.} & \end{cases} \quad (12.13)$$

$$(ab)c = b(ac) - a(bc), \quad (12.14)$$

$$a(bc) = b(ac) - c(ab). \quad (12.15)$$

$$v_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i p_i^* + \omega_i (\omega_i p_i^*) + v_{i-1}, & \text{если } i-e \\ \text{сочленение – вращательное;} & \\ z_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\omega}_i p_i^* + 2\omega_i (z_{i-1} \dot{q}_i) + \omega_i (\omega_i p_i^*) + v_{i-1}, & \\ \text{если } i-e \text{ сочленение – поступательное.} & \end{cases} \quad (12.16)$$

## Литература

1. Фу, К. Робототехника / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. – М. : Мир, 1989. – 624 с.
2. Шахинпур, М. Курс робототехники / М. Шахинпур. – М. : Мир, 1990. – 527 с.
3. Механика промышленных роботов / под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – М. : Высшая школа, 1988. – Кн. 1 : Кинематика и динамика. – 1988. – 304 с.
4. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Мир, 1974. – 832 с.
5. Околов, А. Р. Математическое обеспечение промышленных роботов: учебно-методический комплекс для студентов специальности 1-53 01 06 «Промышленные роботы и робототехнические комплексы»: в 2 ч. / А. Р. Околов, Е. Р. Новичихина, Г. С. Свицерский. – Минск : БНТУ, 2012–2013. – Ч. 1 : Лабораторные работы. – 2012. – 80 с.
6. Околов, А. Р. Математическое обеспечение промышленных роботов : учебно-методический комплекс для студентов специальности 1-53 01 06 «Промышленные роботы и робототехнические комплексы»: в 2 ч. / А. Р. Околов, Е. Р. Новичихина, Г. С. Свицерский, А. А. Шевченко, С. И. Шахнер. – Минск : БНТУ, 2012–2013. – Ч. 2 : Курсовая работа. – 2013. – 60 с.

## Содержание

ЛЕКЦИЯ 1 .....	3
ЛЕКЦИЯ 2 .....	8
ЛЕКЦИЯ 3 .....	12
ЛЕКЦИЯ 4 .....	13
ЛЕКЦИЯ 5 .....	19
ЛЕКЦИЯ 6 .....	24
ЛЕКЦИЯ 7 .....	29
ЛЕКЦИЯ 8 .....	35
ЛЕКЦИЯ 9 .....	40
ЛЕКЦИЯ 10 .....	47
ЛЕКЦИЯ 11 .....	50
ЛЕКЦИЯ 12 .....	51
Литература .....	54



Учебное издание

**ОКОЛОВ** Андрей Ромуальдович  
**ДРОЗД** Анастасия Витальевна  
**МАТРУНЧИК** Юлия Николаевна  
**ЛИЦКЕВИЧ** Ольга Вячеславовна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ**

Учебно-методическое пособие к лекциям  
для студентов специальности  
1-53 01 06 «Промышленные роботы  
и робототехнические комплексы»

Редактор *О. В. Ткачук*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 24.12.2015. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,54. Тираж 100. Заказ 658.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.