Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет маркетинга, менеджмента, предпринимательства
Кафедра «Бизнес-администрирование»

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие по выполнению контрольной работы для студентов специальности
1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии»
1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий»
1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленных предприятиях»

Электронный учебный материал

Минск 2015

УДК 51 (075.8)
ББК 22.18я73.1я7

Автор:
А.Е. Филиченок

Рецензент:
Б.М. Астрахан, доцент кафедры «Экономика и управление инновационными проектами в промышленности» БНТУ, кандидат технических наук

Филиченок, А.Е. Математика: методическое пособие по выполнению контрольной работы для студентов специальности 1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии», 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий», 1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленных предприятиях» / А.Е. Филиченок. – Мн.: БНТУ, 2015. – 54 с.

Методическое пособие содержит исходные данные и методические указания по выполнению контрольных работ по дисциплине «Математика». В работу включены темы 1 семестра «Линейной алгебры» и «Аналитической геометрии».

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: emd@bntu.by
http://www.bntu.by/ru/struktura/facult/psf/chairs/im/
Регистрационный № БНТУ/ ФММП51-60.2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа выполняется в соответствии с учебным планом БНТУ по специальностям 1-36 20 03 «Торговое оборудование и технологии», 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий», 1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленных предприятиях».

Методическое пособие предназначено для проведения контрольной работы по таким разделам курса «Математики», как «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия». Контрольная работа соответствует учебной программе 1 семестра по «Математике».

Выполнение контрольной работы обеспечивает более глубокое изучение материала, направлено на закрепление и систематизацию знаний, умений и формирование общих компетенций.

Теоретические сведения к контрольной работе (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач, можно найти в учебном пособии по «Математике» [1], а также другой рекомендуемой литературе. Контрольные работы сопровождаются решением типового варианта.

Контрольные работы содержат 25 вариантов.

1 СОДЕРЖАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

1.1 Цели и задачи контрольной работы

Целью контрольной работы является закрепление знаний, полученных в процессе обучения по дисциплине «Математика», формирование необходимых умений и навыков при выполнении операций над матрицами, вычислении определителей, исследовании и решении систем линейный уравнений, основных операций над векторами в координатах.

Для достижения поставленной цели в контрольной работе необходимо освоить следующие методы:
- метод приведения определителя к треугольному виду,
- метод Крамера и метод Гаусса для решения систем линейных уравнений,
- координатный метод изучения фигур на плоскости и в пространстве.

1.2 Содержание и порядок выполнения контрольной работы

1.2.1 Структура и задание на контрольную работу

Задачи выполняются в той последовательности, в которой они указаны в контрольной работе. Обязательно должно быть записано условие задачи, решение с достаточной степенью подробности и необходимыми пояснениями, затем ответ. Если в задаче приведено только условие и ответ, то задача считается нерешенной.

Отчет можно представлять в рукописном виде (четким и разборчивым почерком), используя только черные или синие чернила, или в печатном виде.

На титульном листе отчета должны быть указаны:
- дисциплина;
- номер варианта;
- номер группы;
- фамилия, имя, отчество студента.

1.2.2 Выбор варианта исходных данных для выполнения контрольной работы

Каждый студент выполняет контрольную работу по выбранному номеру варианта, который определяется на основе таблицы 1.1.

К цифрам в рамках необходимо добавить сумму цифр номера группы, например, 1+0+5+0+3+6+1+4=20

Таблица 1.1 – Номера вариантов контрольной работы

		Четвертая и пятая цифры зачетной книжки								
		01	02	03	04	05	06	07	08	09
Последние две цифры зачетной книжки	01	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	02	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	03	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	04	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	05	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	06	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	07	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	08	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	09	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	11	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	12	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	13	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	14	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	16	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	17	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	18	18	19	20	21	22	23	24	25	1
	19	19	20	21	22	23	24	25	1	2
	20	20	21	22	23	24	25	1	2	3
	21	21	22	23	24	25	1	2	3	4
	22	22	23	24	25	1	2	3	4	5
	23	23	24	25	1	2	3	4	5	6
	24	24	25	1	2	3	4	5	6	7
	25	25	1	2	3	4	5	6	7	8

1.2.3 **Порядок выполнения и защиты контрольной работы**

Руководитель контрольной работы составляет график выполнения отдельных разделов, проводит консультации по утвержденному расписанию, контролирует ход выполнения контрольной работы.

За качество принятых в контрольной работе решений отвечает студент, который обязан после каждого этапа представлять руководителю промежуточный объем работ на проверку. Руководитель проверяет выполненную работу, указывает ошибки и дает рекомендации по их исправлению.

Выполненная контрольная работа сдается студентом до начала экзаменационной сессии с учетом сроков проведения зачетов. Руководитель контрольной работы проверяет ее. Замечания фиксируются на оборотной стороне титульного листа.

При условии соответствия требованиям, предъявляемым к контрольной работе, она решением руководителя допускается к защите, о чем делается подпись «К защите» на титульном листе.

Если контрольная работа требует полной или частичной переработки, то студент обязан до защиты представить ее руководителю для повторной проверки.

Защита контрольной работы происходит (после исправления замечаний руководителя) в виде доклада и ответов на вопросы.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАЗДЕЛОВ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1 Содержание контрольной работы

3

№	Тема	Содержание темы	Номера заданий
1	2	3	4
1	Матрицы	Определение и виды матриц. Транспонированная матрица. Сложение матриц. Умножение матрицы на число. Умножение матриц.	1
2	Ранг матрицы	Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы.	2
3	Определители	Определители II и III порядков. Определитель матрицы n-го порядка. Свойства определителей. Алгебраическое дополнение. Вычисление обратной матрицы с помощью определителя.	3(а,б)
4	Системы линейных уравнений	Определение и виды систем линейных уравнений. Системы линейных уравнений с $m=n$. Метод обратной матрицы. Метод Крамера. Общее решение системы линейных уравнений. Однородные системы.	4-6
5	Векторы и операции над ними	Определение вектора и линейные операции над ними. Свойства линейных операций над векторами. Скалярное произведение векторов. Линейная зависимость векторов.	7-8

	2	3	4
6	Прямые линии и плоскости	Уравнение прямой на плоскости и пространстве. Уравнение плоскости.	9-11
7	Линии второго порядка. Парабола. Эллипс. Гипербола	Линии второго порядка. Парабола. Эллипс. Гипербола. Общее понятие о линии второго порядка.	12-14

2.2 **Контрольная работа**

1. **Найти произведения матриц *A* на *B* и *B* на *A***, если они существуют.

1. $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\4&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$; 2. $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&1\\4&1\\-1&2\end{bmatrix}$;

3. $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$; 4. $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&1\end{bmatrix}$;

5. $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\4&3&3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&3\\2&1&1\end{bmatrix}$; 6. $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\5&1&2\\3&0&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$;

7. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$; 8. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$;

9. $A=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ -2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$; 10. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$;

11. $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$; 12. $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 4 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$;

13. $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 6 & 3\end{bmatrix}$; 14. $A=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$;

15. $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 4 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$; 16. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 5\end{bmatrix}$;

17. $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & -5\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$; 18. $A=\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 6\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$;

19. $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\\ 6 & 7\end{bmatrix}$; 20. $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 5\end{bmatrix}$;

21. $A=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}6 & 7 & 8\\ 4 & 6 & 3\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}$; 22. $A=\begin{bmatrix}5\\ 9\\ 6\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$;

23. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -4 & -5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 2\end{bmatrix}$; 24. $A=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 8\\ -2 & 0\end{bmatrix}$;

25. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 3 & -3 & 5\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ -5\end{bmatrix}$;

2. Найти ранг матрицы

1. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 2\\ 7 & 5 & 3 & 4\end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$; 3. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; 5. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 5 & -3\\ 3 & 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$; 6. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$; 8. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$; 9. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$;

10. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 0\\ 6 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$; 11. $\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$; 12. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$;

13. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 5\\ 2 & -2 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$; 14. $\begin{bmatrix}5 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$; 15. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$;

16. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; 17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$; 18. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

19. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; 20. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

22. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -3 \\ 9 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 23. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 24. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

25. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

3. **Вычислить определители для заданных матриц:**

а) третьего порядка – методами треугольников или диагоналей;

б) четвёртого порядка – разложением по элементам ряда или сведением к треугольному виду.

1. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

2. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

4. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

5. а) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

6. а) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

7. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

8. а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

9. а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

10. а) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

11. а) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$;

12. а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

13. а) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

14. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

15. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$;

16. а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

17. а) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

18. а) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

19. а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

20. а) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

21. а) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

22. а) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$;

23. а) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

24. а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

25. а) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

4. **Найти решение системы уравнений** по формулам Крамера, методом обратных матриц и методом Гаусса:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}$;

6. $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$;

8. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}$;

9. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 25 \end{bmatrix};$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix};$

11. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix};$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix};$

13. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix};$

14. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix};$

15. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 27 \end{bmatrix};$

17. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix};$

18. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix};$

19. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix};$

20. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix};$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix};$

22. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix};$

23. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix};$

24. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix};$

25. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix};$

5. **Исследовать систему на совместность и в случае совместности решите ее**:

1. $\begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$; 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -11 \\ -1 \end{bmatrix}$; 6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$; 8. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 7 & -7 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$;

9. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$; 10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$;

11. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 13 \\ -14 \end{bmatrix}$; 12. $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$;

13. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$; 14. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 16 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}$;

15. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 11 \\ 23 \\ 13 \end{bmatrix}$; 16. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$;

17. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \\ -6 \\ 17 \end{bmatrix}$; 18. $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 10 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$;

19. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; 20. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$;

21. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -7 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix}$; 22. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix}$;

23. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$; 24. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ -17 \end{bmatrix}$;

25. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$;

6. **Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.**

1. $\begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \\ 4 & -9 & 5 & -1 \\ 10 & 1 & -7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 4. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 6. $\begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & -3 \\ 6 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 8. $\begin{bmatrix} 4 & -6 & -1 & -1 \\ 7 & -7 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

9. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & -4 & -5 \\ 3 & 17 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

11. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

13. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 16. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

17. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 18. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & -7 & -1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

19. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 20. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

21. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 22. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

23. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 24. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -10 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

25. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

7. Даны векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. Найдите:

а) проекцию вектора $k\vec{a}+s\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$;

б) направляющие косинусы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, их скалярное произведение;

в) значение λ, при котором векторы $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ *и* $\vec{a}+2\vec{b}$ будут перпендикулярны.

1. $\vec{a}=3\vec{j}, \vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j};\ a)\, k=3,\ s=2.$
2. $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j};\ a)\, k=-1,\ s=2.$
3. $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}, \vec{b}=-3\vec{j};\ a)\, k=2..$
4. $\vec{a}=-5\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j};\ a)\, k=3,\ s=-2..$
5. $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j};\ a)\, k=-2,\ s=1.$
6. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}, \vec{b}=4\vec{i}+8\vec{j};\ a)\, k=2,\ s=\dfrac{1}{2}.$
7. $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}, \vec{b}=-6\vec{i};\ a)\, k=3,\ s=-\dfrac{1}{2}.$
8. $\vec{a}=\vec{i}-4\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j};\ a)\, k=-5,\ s=2.$
9. $\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{i}+3\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j};\ a)\, k=2,\ s=-3.$
10. $\vec{a}=-7\vec{i}+2\vec{j}, \vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j};\ a)\, k=-1,\ s=2.$
11. $\vec{a}=-3\vec{i}+5\vec{j}, \vec{b}=2\vec{i};\ a)\, k=-2,\ s=5.$
12. $\vec{a}=7\vec{i}-\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j};\ a)\, k=2,\ s=-3.$
13. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j};\ a)\, k=7,\ s=-2.$
14. $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j};\ a)\, k=-3,\ s=2.$
15. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}, \vec{b}=5\vec{i};\ a)\, k=-1,\ s=2.$
16. $\vec{a}=-6\vec{i}, \vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j};\ a)\, k=-\dfrac{1}{3},\ s=3.$
17. $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j};\ a)\, k=-3,\ s=4.$
18. $\vec{a}=5\vec{i}-4\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+\vec{j};\ a)\, k=-1,\ s=4.$

19. $\vec{a} = 7\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; $a) k = 2, s = -1$.

20. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = -4\vec{i}$; $a) k = -3, s = 2$.

21. $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = 7\vec{i} + \vec{j}$; $a) k = 3, s = -2$.

22. $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}, \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $a) k = 2, s = 3$.

23. $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = 9\vec{i} + \vec{j}$; $a) k = -5, s = 2$.

24. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = 6\vec{i} - 7\vec{j}$; $a) k = -5, s = 2$.

25. $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = -6\vec{j}$; $a) k = -3, s = 2$.

8. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

а)Являются ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимыми?

б) Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Найдите объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Координаты векторов для каждого варианта даны в таблице №1.

Таблица 1

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	2;3;1	5;7;0	3;-2;4
2	1;-2;7	4;0;-1	2;1;5
3	-1;3;0	2;5;7	4;-1;3
4	3;-7;4	1;6;-2	-5;1;3
5	4;-2;3	10;1;-5	0;3;7
6	6;1;-5	2;-7;-3	4;-5;4
7	2;6;-8	11;-3;-4	-7;2;1
8	7;-10;15	-6;0;7	4;3;10
9	1;2;-3	5;4;3	-7;-3;-2
10	-5;-2;3	-7;4;-2	0;8;10
11	4;-5;-5	-1;3;-6	7;-2;0
12	8;-6;12	-3;7;4	-5;-2;4
13	-9;-6;21	2;1;0	4;-7;5
14	-9;-6;2	2;1;0	4;-7;5
15	0;4;-5	7;3;6	-5;7;2
16	5;2;0	0;-7;3	-2;3;6

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
17	4;0;-3	2;-4;6	3;8;-5
18	1;-6;7	1;-2;0	6;-4;-2
19	-4;-3;1	-4;2;5	6;-8;3
20	1;0;-6	-1;9;7	0;4;1
21	1;7;-6	-3;9;7	0;4;1
22	4;-9;5	5;-1;-3	4;7;-7
23	3;-3;7	4;0;-8	7;3;-1
24	-2;-5;4	1;-1;7	-8;0;6
25	2;3;1	-4;-1;8	5;0;7

9. а) Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) Составить уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2;

в) в треугольнике $M_0M_1M_2$ найти уравнение стороны M_0M_1;

г) угол при вершине M_0;

д) уравнение и длину высоты M_1D;

е) уравнение и длину медианы M_1N;

ж) составить уравнение прямой, проходящей через точку M_2 параллельно стороне M_0M_1 треугольника, и найти расстояние между этими прямыми.

Координаты точек M_0, M_1, M_2 для каждого варианта даны в таблице №2.

Таблица №2

№	M_0	M_1	M_2	№	M_0	M_1	M_2
1.	1,-1	7,4	3,2	2.	-3,8	6,-2	8,3
3.	-6,2	-4,7	3,2	4.	0,-4	5,-3	2,8
5.	1,-5	1,1	2,3	6.	-5,2	8,-3	-6,6
7.	3,-1	4,1	3,-1	8.	3,-2	1,-1	1,7
9.	3,0	-2,-1	4,0	10.	1,-3	0,-2	5,1

№	M_0	M_1	M_2	№	M_0	M_1	M_2
11.	-3,1	2,-2	1,5	12.	2,-3	6,-1	-2,5
13.	2,-1	4,-1	0,5	14.	4,-1	2,-5	1,2
15.	1,-4	3,0	3,5	16.	5,2	1,-3	5,2
17.	6,2	0,-3	4,1	18.	1,2	3,-2	6,1
19.	2,3	1,-2	4,0	20.	3,0	6,-1	2,3
21.	1,1	3,-1	0,5	22.	2,-4	1,-3	4,-1
23.	3,2	-1,-2	0,3	24.	-1,2	3,-2	5,3
25.	0,2	-1,5	2,4				

10. а) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) уравнение полученной плоскости привести к уравнению в отрезках и построить её;

в) $M_0M_1M_2$, проходящей через три точки и проверить, лежит ли точка M_3 в этой плоскости, если не лежит, то найти расстояние от этой точки до плоскости;

г) $M_1M_2M_3$, проходящей через три точки, и найти угол между этой плоскостью и плоскостью $M_0M_1M_2$;

д) найти объём пирамиды $M_0M_1M_2M_3$, и длину высоты пирамиды, опущенной из точки M_0;

е) проходящей через точку M_0 (следующего варианта) параллельно плоскости $M_1M_2M_3$ и найти расстояние между этими плоскостями.

Координаты точек M_0, M_1, M_2 и M_3 приведены в таблице №3

Таблица №3

№	M_0	M_1	M_2	M_3	№	M_0	M_1	M_2	M_3
1.	1,0,2	-2,3,1	3,0,5	2,4,1	2.	3,1,-1	2,5,0	3,4,0	1,-1,2
3.	4,2,-1	2,1,0	1,5,3	1,3,0	4.	0,1,3	2,1,4	1,4,5	2,1,3
5.	0,3,-1	5,1,-1	2,1,7	3,2,0	6,	2,0,-4	1,3,5	2,1,6	0,3,-1
7.	-4,1,4	1,-2,0	3,2,7	4,1,2	8,	-2,1,3	3,0,5	5,1,3	-3,4,2
9.	2,-2,0	3,1,6	2,1,4	5,2,1	10.	4,0,-1	1,2,3	0,3,4	1,-1,3

№	M_0	M_1	M_2	M_3	№	M_0	M_1	M_2	M_3
11.	-1,3,0	2,4,-2	3,4,1	0,5,1	12.	-1,5,1	0,4,1	3,1,4	1,-2,3
13.	4,-3,0	2,1,5	3,1,0	2,4,1	14.	0,2,4	2,3,5	1,1,4	2,-2,1
15.	1,0,2	3,5,4	1,3,2	3,3,1	16.	2,-4,6	1,3,0	3,3,5	-2,3,1
17.	3,-2,1	8,1,3	2,2,5	1,0,3	18.	0,3,5	2,1,4	3,1,7	-1,3,2
19.	4,0,-1	2,3,6	1,6,1	0,2,5	20.	4,-2,0	3,1,0	5,1,3	2,4,1
21.	2,0,-3	1,-1,4	2,0,2	3,1,5	22.	2,-3,5	1,1,3	3,4,0	4,0,1
23.	5,1,-2	1,-2,0	3,1,2	4,2,6	24.	1,0,5	2,6,1	1,3,2	2,-3,0
25.	-2,3,5	1,-2,0	3,1,2	0,4,1					

11. Составить уравнение прямой в пространстве R^3:
а) проходящей через точку M_0, параллельно вектору $\vec{S}(m,n,p)$;
б) проходящей через точки M_1 и M_2 и записать его в канонической форме;
в) проходящей через точку M_0, параллельно прямой M_1M_2;
г) проходящей через точку M_0, перпендикулярно прямой M_1M_2;
д) найти угол между этой прямой M_1M_2 и прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\vec{S}(m,n,p)$.

Координаты точек и векторов даны в таблице №4

Таблица №4

№	M_0	M_1	M_2	$\vec{S}$	№	M_0	M_1	M_2	$\vec{S}$
1.	1,3,-1	3,4,2	0,3,5	2,4,-3	2.	3,-2,1	4,0,2	5,1,0	3,-3,2
3.	4,0,-1	2,1,5	1,2,1	3,2,6	4.	1,-2,5	0,4,2	1,3,5	2,1,-3
5.	2,-2,4	1,1,3	2,3,5	1,4,5	6.	3,-1,2	1,0,5	4,3,1	6,2,-2
7.	0,5,4	3,1,2	3,2,1	5,4,2	8.	5,2,-1	3,1,4	2,3,5	-3,2,4
9.	3,0,4	2,6,1	4,3,0	-1,2,5	10.	2,-2,0	5,0,4	1,3,6	-2,4,1
11.	-3,2,1	5,4,3	1,4,7	2,-3,0	12.	4,-3,1	2,0,3	3,1,1	4,6,1
13.	5,0,1	3,2,4	5,1,3	-1,2,1	14.	0,2,-3	1,4,2	2,0,5	-3,2,5
15.	1,-3,5	2,4,1	3,2,1	0,-2,3	16.	2,1,4	3,1,5	3,1,8	1,6,2
17.	0,4,-2	1,3,1	3,4,1	-3,2,5	18.	-3,0,4	2,5,1	0,4,3	-3,4,6

№	M_0	M_1	M_2	$\vec{S}$	№	M_0	M_1	M_2	$\vec{S}$
19.	-1,3,5	2,4,0	3,5,1	-4,0,1	20.	0,2,-1	3,4,1	2,6,2	3,-2,0
21.	3,5,2	1,6,2	5,1,4	3,2,0	22.	1,-4,2	4,1,3	1,0,4	1,2,5
23.	4,6,1	2,0,2	3,1,2	0,1,5	24.	3,0,-3	1,4,0	2,5,1	0,4,3
25.	2,-2,3	4,0,1	2,5,3	-4,1,0					

12. **Дано уравнение эллипса** $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$. Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

№	A	B	C	D	F
1	5	4	-10	16	1
2	3	8	6	-16	-13
3	2	5	-8	10	3
4	8	4	-16	24	12
5	5	1	20	6	24
6	2	9	-12	18	9
7	2	4	12	16	26
8	2	1	16	4	34
9	9	4	-18	16	-11
10	3	6	6	36	39
11	4	2	24	4	30
12	1	9	4	18	4
13	3	4	18	8	19
14	8	2	-16	12	10
15	2	5	12	20	28
16	3	6	12	-12	0
17	5	3	20	-6	8
18	5	1	30	2	41
19	2	5	4	30	37
20	6	4	12	-24	18
21	8	2	48	4	58
22	6	4	24	-8	4

№	A	B	C	D	F
23	1	6	6	-24	27
24	8	3	48	6	51
25	9	5	72	-10	104

13. **Дано уравнение гиперболы** $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$. Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

№	A	B	C	D	F
1	-4	5	-8	-30	61
2	-3	2	6	-16	35
3	4	-3	-16	18	1
4	-3	1	12	2	-8
5	-2	4	12	8	-6
6	-1	6	4	36	56
7	-2	1	12	-2	-15
8	-4	9	-16	18	29
9	-2	2	4	-20	52
10	6	-3	12	12	12
11	5	-1	20	6	16
12	-3	2	6	-16	35
13	2	-5	12	10	23
14	-3	6	12	36	60
15	5	-1	-30	-4	46
16	-1	4	6	-16	11
17	-5	3	20	18	22
18	-2	6	12	12	0
19	3	-2	6	-12	-9
20	-2	4	4	24	42
21	-1	5	4	10	6
22	4	-3	-8	-12	4
23	-3	4	18	16	1
24	-2	1	12	8	0
25	6	-5	-12	-20	16

14. **Дано уравнение параболы** $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$.
Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

№	A	B	C	D	F
1	2	0	-4	3	-4
2	0	2	8	1	5
3	5	0	-30	-1	43
4	0	3	-6	-4	11
5	4	0	-8	3	10
6	0	2	-8	4	20
7	1	0	4	5	-1
8	0	5	-30	-2	53
9	-3	0	6	2	-13
10	0	-2	4	5	-22
11	2	0	4	4	14
12	0	4	-8	1	1
13	-1	0	2	-3	-7
14	0	3	-12	-2	20
15	-5	0	30	2	-43
16	0	2	4	4	-22
17	3	0	24	2	46
18	0	1	-8	4	4
19	1	0	-4	-5	-11
20	0	-3	36	1	-112
21	2	0	-4	-4	-10
22	0	5	-40	2	82
23	2	0	-20	-3	38
24	0	4	-24	-1	38
25	4	0	8	6	-8

2.3 Решение типового варианта

1. Найти произведения матриц A на B и B на A, если они существуют.

$A=\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$;

Решение. В данном случае матрица A не согласована с матрицей B, так как число столбцов матрицы А не равно числу строк матрицы В. Значит, произведение АВ не существует. Матрица B согласована с матрицей A. Тогда произведение $B_{2\times 2}\, A_{2\times 3}= C_{2\times 3}$ находится следующим образом:

$$C=\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 9\cdot(-3)+7\cdot 0 & 9\cdot(-3)+7\cdot 1 & 9\cdot(-2)+7\cdot 4 \\ 6\cdot(-3)+3\cdot 0 & 6\cdot(-3)+3\cdot 1 & 6\cdot(-2)+3\cdot 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -27 & -20 & 10 \\ -18 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для приведения матрицы к трапециевидной формы применим элементарные преобразования. Для этого переставим местами первую и последнюю строки:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

затем, добавляя ко второй и третьей строкам первую, помноженную на соответствующий коэффициент, а также вычитая из четвертой сумму второй и третьей строк, получим в первом столбце нули, кроме a_{11}=1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 3S_1 \\ S_4 - (S_2 + S_3) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S_3 - S_2 \rightarrow$$

Далее, необходимо получить нули во втором столбце ниже элемента a_{22}=1. Для этого из третьей строки вычтем вторую:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Удаление нулевых строк не изменяет ранга матрицы. Полученная матрица имеет форму трапеции. Ранг матрицы равен порядку левого минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, следовательно, $r_A = 2$.

3. Вычислить определители для заданных матриц:

а) третьего порядка – методами треугольников или диагоналей;

б) четвёртого порядка – разложением по элементам ряда или сведением к треугольному виду.

а) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

Решение.

а) Вычислим определитель, пользуясь правилом треугольников.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 7 - 2\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 8 - 0\cdot 7\cdot 4 = -4.$$

Вычислим методом диагоналей определитель.

$$\left|\begin{matrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 0\cdot 5\cdot 8 + 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 7 - 2\cdot 5\cdot 3 - 0\cdot 4\cdot 7 - 3\cdot 1\cdot 8 = -4.$$

б) Можно разложить определитель по любому ряду, но удобнее всего раскладывать по тому, в котором больше нулей. Поэтому данный определитель удобно раскладывать либо по третьей строке, либо по четвертому столбцу.

Рассмотрим разложение, например, по третьей строке и вычислим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2\cdot(2\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 1 + 7\cdot 3\cdot 3 - 7\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 5 - 2\cdot 0\cdot 3) + 0 - 0 = -72.$$

Вычислить определитель методом приведения его к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{3}{2} S_1 \\ \\ S_4 - S_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{13}{2} & -2 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{4}{13} S_2 = \\ S_4 - \frac{5}{13} S_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{13}{2} & -2 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{42}{13} \\ 0 & 0 & \frac{36}{13} & \frac{72}{13} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ S_4 - \frac{9}{2} S_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{13}{2} & -2 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13} & \frac{42}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{8}{13} \cdot (-9) = -72.$$

4. Найти решение системы уравнений по формулам Крамера, методом обратных матриц и методом Гаусса:

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Решение.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 6, \\ -4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим решение по *формулам Крамера*: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1, n}$.

Найдем определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -74.$$ Определитель не равен 0, значит система имеет единственное решение.

Заменим в основной матрице первый столбец на столбец свободных членов и вычислим полученный определитель:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 7 & 5 & -1 \\ 1 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 148.$$

Заменим в основной матрице второй столбец на столбец свободных членов и вычислим полученный определитель:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ -4 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Заменим в основной матрице третий столбец на столбец свободных членов и вычислим полученный определитель:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -4 & 5 & 7 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -74.$$

Теперь мы можем вычислить значение каждого x_i, путем простого деления i-го определителя на главный определитель системы.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{148}{-74} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-74} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-74}{-74} = 1.$$

Таким образом, получим: $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Решим систему методом обратных матриц.

Запишем основную матрицу системы: $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.

Найдем матрицу, обратную основной.

Обратная матрица существует только для невырожденной матрицы и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A. Причем алгебраические дополнения, вычисленные к элементам i-й строки матрицы A, поставлены в i-й столбец.

$$A^{-1} = \frac{1}{-74}\begin{bmatrix} 29 & 1 & -33 \\ 25 & -17 & -31 \\ 9 & -15 & -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{29}{74} & -\frac{1}{74} & \frac{33}{74} \\ -\frac{25}{74} & \frac{17}{74} & \frac{31}{74} \\ -\frac{9}{74} & \frac{15}{74} & \frac{23}{74} \end{bmatrix}.$$

Решение будет иметь вид $X = A^{-1}B$, где_матрица-столбец B – столбец свободных членов.

$X = A^{-1}B =$

$$= \frac{1}{-74}\begin{bmatrix} 29 & 1 & -33 \\ 25 & -17 & -31 \\ 9 & -15 & -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{29}{74} & -\frac{1}{74} & \frac{33}{74} \\ -\frac{25}{74} & \frac{17}{74} & \frac{31}{74} \\ -\frac{9}{74} & \frac{15}{74} & \frac{23}{74} \end{bmatrix}. \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{29}{74}\cdot 6+\left(-\frac{1}{74}\right)\cdot 7+\frac{33}{74}\cdot 1 \\ -\frac{25}{74}\cdot 6+\frac{17}{74}\cdot 7+\frac{31}{74}\cdot 1 \\ -\frac{9}{74}\cdot 6+\frac{15}{74}\cdot 7+\frac{23}{74}\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений методом Гаусса. Расширенная матрица имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 6 \\ -4 & 5 & -1 & 7 \\ 3 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right].$$

1. **Прямой ход**. Применяя к расширенной матрице, последовательность элементарных операций стремимся, чтобы каждая строка, кроме первой, начиналась с нулей, и число нулей до первого ненулевого элемента в каждой следующей строке было больше, чем в предыдущей.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 6 \\ -4 & 5 & -1 & 7 \\ 3 & -6 & 7 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ S_2+4S_1 \\ S_3-3S_1 \end{array}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 6 \\ 0 & -23 & 31 & 31 \\ 0 & 15 & -17 & -17 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ S_2:(-23) \\ \end{array}=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{23} & -\frac{31}{23} \\ 0 & 15 & -17 & -17 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ S_3-15S_2 \end{array}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{23} & -\frac{31}{23} \\ 0 & 0 & \frac{74}{23} & \frac{74}{23} \end{array}\right].$$

Матрица приведена к трапециевидной форме. Прямой ход закончен.

2. **Обратный ход.** Перейдем к системе:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 6, \\ \qquad x_2 - \dfrac{31}{23}x_3 = -\dfrac{31}{23}, \\ \qquad\qquad \dfrac{74}{23}x_3 = \dfrac{74}{23}. \end{cases}$$

Начиная с последнего уравнения, последовательно находим значения переменных. $\dfrac{74}{23}x_3 = \dfrac{74}{23} \Rightarrow x_3 = 1.$ Подставляя его в уравнение, соответствующее второй строке, получим: $x_2 - 1 \cdot \dfrac{31}{23} = -\dfrac{31}{23} \Rightarrow x_2 = 0.$ Поднимаемся, последовательно, ещё на строку выше, получим: $x_1 - 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2.$

5. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix};$$

Решение.

Система имеет вид: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

1. Исследуем систему на совместность. Для этого найдем ранги основной и расширенной матриц системы.

Расширенная матрица имеет вид: $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right]$. С помощью элементарных преобразований приведем ее к виду трапеции:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 17 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 91 & 91 \end{array}\right].$$

Так как матрица содержит 4 ненулевые строки, то ранг расширенной матрицы равен 4. Аналогично, ранг основной матрицы будет равен 4. Ранги основной и расширенной матриц равны, следовательно, система совместна и имеет единственное решение, так как число неизвестных $n = 4$ равно рангу системы.
Решая ее методом Гаусса, получим: $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = -1.$

6. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 14 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Решение.

Матрица системы имеет вид: $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 14 & -6 & -1 \end{bmatrix}$. Ее ранг равен 3. Так как $r=3<n=4$ – числа неизвестных, то система имеет ненулевое решение. В качестве базисного минора можно выбрать

$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 14 & -6 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$ При таком выборе базисного минора переменные x_1, x_2 , x_3 будут базисными, а x_4 – свободной.

Составим систему из уравнений, коэффициенты которых вошли в базисный минор. Одновременно выразим базисные переменные через сводную:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = x_4, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = x_4, \\ x_1 + 14x_2 - 6x_3 = x_4. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы и выполним действия, составляющие прямой ход метода Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & x_4 \\ -1 & 3 & -4 & x_4 \\ 1 & 14 & -6 & x_4 \end{pmatrix} S_1 \leftrightarrow S_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & x_4 \\ 2 & 7 & 1 & x_4 \\ 1 & 14 & -6 & x_4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & x_4 \\ 0 & 13 & -7 & 3x_4 \\ 0 & 17 & -10 & 2x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & x_4 \\ 0 & 13 & -7 & 3x_4 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{13} & -\frac{25}{13}x_4 \end{pmatrix}$$

Преобразованная расширенная матрица соответствует системе уравнении, которая эквивалентна исходной однородной системе:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = x_4, \\ \qquad 13x_2 - 7x_3 = 3x_4, \\ \qquad\qquad -\frac{11}{13}x_3 = -\frac{25}{13}x_4. \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса даёт значения базисных неизвестных, выраженных через свободные переменные

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{63}{11}x_4, \\ x_2 = \dfrac{16}{11}x_4, \\ x_3 = -\dfrac{25}{11}x_4. \end{cases}$$

Пусть x_4=c, где $c \in R$. Общее решение системы будет: $X = \begin{pmatrix} -\dfrac{63}{11}c \\ \dfrac{16}{11}c \\ -\dfrac{25}{11}c \\ c \end{pmatrix}$.

Поскольку r=3 и n=4, то фундаментальная система решений для однородной системы состоит из одного решения. Придав свободной переменной значение равное 1, получаем:

$$X(\ ) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Даны векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. Найдите:

а) проекцию вектора $k\vec{a} + s\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$;

б) направляющие косинусы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, их скалярное произведение;

в) значение λ, при котором векторы $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ *и* $\vec{a} + 2\vec{b}$ будут перпендикулярны;

Решение.

а) Найдем координаты вектора $-4\vec{a} + 3\vec{b} = -4(4,0,2) + 3(-3,0,-4) = (-25,0,-20)$

Воспользуемся формулой: $np_{\vec{a}}\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)=\dfrac{\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{b}\right|}$.

Найдем скалярное произведение векторов:

$\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=-25\cdot 4+0\cdot 0+\left(-20\right)\cdot 2=-140$.

Найдем модуль вектора:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+0^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$

$$np_{\vec{a}}\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)=\frac{-140}{2\sqrt{5}}=-14\sqrt{5}.$$

б) Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ по формулам $\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\vec{a}\right|}$; $\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$ будут равны:

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^2+0^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \cos\beta=\frac{0}{\sqrt{20}}=0,\quad \cos\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Аналогично, направляющие косинусы вектора $\vec{b}$

$$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{\left(-3\right)^2+0^2+\left(-4\right)^2}}=-\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{0}{\sqrt{25}}=0,\quad \cos\gamma=-\frac{4}{5}.$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме имеет вид:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=4\cdot\left(-3\right)+0\cdot 0+2\cdot\left(-4\right)=-20.$

в) Если векторы $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$ перпендикулярны, то есть, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, тогда $\cos\varphi=0$ и скалярное произведение равно нулю.

Найдем координаты векторов:

$\vec{a}-\lambda\vec{b}=\left(4,0,2\right)-\lambda\left(-3,0,-4\right)=\left(4+3\lambda,0,2+4\lambda\right)$,

$\vec{a}+2\vec{b}=\left(4,0,2\right)+2\left(-3,0,-4\right)=\left(-2,0,-6\right)$, Скалярное произведение имеет вид: $(\vec{a} - \lambda\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\vec{b}) = (4 + 3\lambda)\cdot(-2) + 0\cdot 0 + (2 + 4\lambda)\cdot(-6) = -20 - 30\lambda$.

Решим уравнение $-20 - 30\lambda = 0$, $\quad \lambda = -\dfrac{2}{3}$.

8. Даны векторы $\vec{a} = (-5,6,1)$, $\vec{b} = (1,3,-1)$ *и* $\vec{c}\,(-4,7,8)$.

а)Являются ли векторы $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ линейно независимыми?

б) Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

в) Найдите объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$.

Решение.

а) Для проверки, Являются ли линейно независимыми, необходимо составить матрицу системы векторов и вычислить её определитель

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 \end{bmatrix}; \quad \det A = -160 \neq 0 \cdot$$

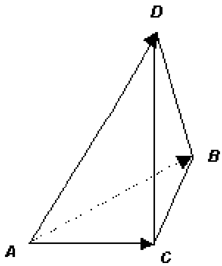
Так как определитель не равен нулю, то система векторов является линейно независимой.

б) Из определения векторного произведения следует, что площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, равна $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Итак, $S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ или $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \dfrac{\sqrt{178}}{2}\,(ед.^2)$

в) Объем пирамиды равен $V_{пир} = \dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, где $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$ - смешанное произведение векторов.



Найдем смешанное произведение:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -160$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V_{пир} = \frac{1}{6}|\,\overline{abc}\,| = \frac{1}{6}|-160| = \frac{160}{6} = 26\frac{2}{3}\,(\partial^3)$$

9. Даны точки $M_0(1;0)$, $M_1(3;-1)$, $M_2(6;1)$. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку M_0, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$; б) проходящей через две точки M_1 и M_2;

в) в треугольнике $M_0M_1M_2$ найти уравнение стороны M_0M_1;

г) угол при вершине M_0;

д) уравнение и длину высоты M_1D;

е) уравнение и длину медианы M_1N;

ж) составить уравнение прямой, проходящей через точку M_2 параллельно стороне M_0M_1 треугольника, и найти расстояние между этими прямыми.

Решение.

а) Воспользуемся формулой уравнения прямой:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Здесь (x_0, y_0)- координаты точки, через которую проходит прямая. В нашем случае это точка $M_0(1;0)$. Вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярен прямой. По условию это вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Найдем его координаты: $\overrightarrow{M_1M_2}=(5-1;1-(-1))=(4;2)$.

Подставим в формулу:

$4(x-1)+2(y-0)=0$. Выражая переменную y, получим уравнение $y=-2x+2$.

б) Воспользуемся формулой уравнения прямой:

$$\frac{x-x_{M_1}}{x_{M_2}-x_{M_1}}=\frac{y-y_{M_1}}{y_{M_2}-y_{M_1}}.$$

Подставим в формулу координаты точек:

$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-(-1)}{1-(-1)}$; $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}$. Выражая переменную y, получим уравнение $y=x-4$.

г) Угол при вершине M_0 треугольника $M_0M_1M_2$ равен углу между векторами $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{M_0M_1}=(2;-1)$, $\overrightarrow{M_0M_2}=(4;1)$. Воспользуемся формулой косинуса угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\overrightarrow{M_0M_2}}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M_0M_2}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot4+(-1)\cdot1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{85}}.$$

д) Высота M_1D перпендикулярна стороне M_0M_2. Поэтому можно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Здесь (x_0, y_0) - координаты точки $M_1(3;-1)$. Вектор $\overrightarrow{M_0M_2}=(4;1)$. Подставим в формулу:

$4\cdot(x-3)+1\cdot(y-(-1))=0$. Выражая переменную y, получим уравнение $y=-4x+11$.

Чтобы найти высоту M_1D, воспользуемся формулой расстояния от точки M_1 до прямой M_0M_2:

$$d=\frac{\left|A\cdot x_{M_1}+B\cdot y_{M_1}+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$ Для этого составим уравнение прямой M_0M_2 с помощью уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_{M_0}}{x_{M_2}-x_{M_0}}=\frac{y-y_{M_0}}{y_{M_2}-y_{M_0}},\quad \frac{x-1}{5-1}=\frac{y-0}{1-0}.$$ Получим уравнение $x-4y-1=0$.

Подставим в формулу: $$\left|M_1D\right|=\frac{\left|1\cdot 3+(-4)\cdot(-1)-1\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{6}{\sqrt{17}}.$$

е) Чтобы составить уравнение медианы M_1N, найдем координаты точки N – середины отрезка M_0M_2.

$$x_N=\frac{x_{M_0}+x_{M_2}}{2}=\frac{1+5}{2}=3,\quad y_N=\frac{y_{M_0}+y_{M_2}}{0}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{x-x_{M_0}}{x_N-x_{M_0}}=\frac{y-y_{M_0}}{y_N-y_{M_0}},\quad \frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{\frac{1}{2}-0}.$$ Получим уравнение

$\frac{1}{2}x+2y-\frac{1}{2}=0$ или $x+4y-1=0$.

Длину медианы M_1N найдем по формуле:

$$\left|M_1N\right|=\sqrt{(x_{M_1}-x_N)^2+(y_{M_1}-y_N)^2}=\sqrt{(3-3)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}.$$

10. а) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) уравнение полученной плоскости привести к уравнению в отрезках и построить её;

в) $M_0M_1M_2$, проходящей через три точки и проверить, лежит ли точка M_3 в этой плоскости, если не лежит, то найти расстояние от этой точки до плоскости;

г) $M_1M_2M_3$, проходящей через три точки, и найти угол между этой плоскостью и плоскостью $M_0M_1M_2$;

д) найти объём пирамиды $M_0M_1M_2M_3$, и длину высоты пирамиды, опущенной из точки M_0;

е) проходящей через точку M_0 (следующего варианта) параллельно плоскости $M_1M_2M_3$ и найти расстояние между этими плоскостями.

Решение.

а) Для составления уравнения плоскости используем формулу:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 .$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) - координаты точки, через которую проходит плоскость. В нашем случае это точка $M_0(-1;2;0)$. Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ перпендикулярен плоскости. По условию это вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Найдем его координаты: $\overrightarrow{M_1M_2}=(2-3;2-7;0-4)=(-1;-5;-4)$.

Подставим в формулу: $-1(x-(-1))+(-5)(y-2)+(-4)(z-0)=0$.

Упрощая выражение, получим общее уравнение плоскости: $x+5y+4z-9=0$.

в) Для составления уравнения плоскости используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 .$$

Подставим координаты точек $M_0M_1M_2$ и упростим выражение:

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-0 \\ 3-(-1) & 7-2 & 4-0 \\ 2-(-1) & 2-2 & 0-0 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(x+1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x+1)\cdot 0-(y-2)\cdot(-12)+z\cdot(-15)=0,$$
$$12y-15z-24=0.$$

г) Уравнение плоскости $M_1M_2M_3$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-4 \\ 2-3 & 2-7 & 0-4 \\ 3-3 & (-3)-7 & 1-4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-4 \\ -1 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$25x+3y-10z-56=0$. Вектор, перпендикулярный плоскости $M_1M_2M_3$, имеет координаты $\overrightarrow{n_1}=(25;3;-10)$.

В пункте в) было составлено уравнение плоскости $M_0M_1M_2$: $12y-15z-24=0.$ Для нее $\overrightarrow{n_2}=(0;12;-15)$.

Косинус угла между плоскостями можно найти как угол между их нормальными векторами по

$$\cos\phi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Подставим координаты векторов в формулу:

$$\cos\phi=\frac{|25\cdot 0+3\cdot 12+(-10)\cdot(-15)|}{\sqrt{25^2+3^2+(-10)^2}\sqrt{0^2+12^2+(-15)^2}}=\frac{186}{\sqrt{270846}}.$$

11. Составить уравнение прямой в пространстве R^3:

а) проходящей через точку M_0, параллельно вектору $\vec{S}(m, n, p)$;

б) проходящей через точки M_1 и M_2 и записать его в канонической форме;

в) проходящей через точку M_0, параллельно прямой M_1M_2;

г) проходящей через точку M_0, перпендикулярно прямой M_1M_2;

д) найти угол между этой прямой M_1M_2 и прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\vec{S}(m, n, p)$.

Координаты точек и векторов даны: M_0 (4,-3,1), M_1 (2,5,2), M_2 (1,7,4), $\vec{S}$ (2,5,-3).

Решение.

а) Используем уравнение $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, подставим в него координаты вектора $\vec{S}(2; 5; -3)$:

$$\frac{x-x_0}{2}=\frac{y-y_0}{5}=\frac{z-z_0}{-3}.$$

В результате получим уравнение бесконечного числа прямых, параллельных вектору $\vec{S}$. Чтобы получить единственную прямую, проходящую через точку $M_0(4; -3; 1)$, подставим в полученное уравнение координаты этой точки

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{-3}.$$

б) Используем уравнение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ и подставим в него координаты точек M_1 (2,5,2) и M_2 1,7,4):

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-5}{7-5}=\frac{z-2}{4-2}.$$

Получим уравнение прямой M_1M_2 в каноническом виде:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{2}.$$

в) Из канонического уравнения прямой M_1M_2 возьмем координаты вектора $\vec{S}(-1;2;2)$ параллельного прямой. Этот вектор является направляющим и для искомой прямой. Поэтому воспользуемся уравнением прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Подставим в него координаты точки M_0 и вектора $\vec{S}(-1;2;2)$

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

д) Угол между двумя прямыми

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

направляющие векторы которых $\vec{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2(m_2, n_2, p_2)$, будет определяться как угол между соответствующими направляющими векторами из условия

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{|\vec{S}_1|\cdot|\vec{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Уравнение прямой M_1M_2: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;-3;1)$ и параллельной вектору $\vec{S}(2;5;-3)$: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-1}{-3}$.

В нашем случае векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ имеют координаты: $\vec{S}_1(-1,2,2)$ и $\vec{S}_2(2,5,-3)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 2\cdot(-3)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+5^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{38}} = \frac{2}{\sqrt{190}}.$$

12. Дано уравнение эллипса $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

Решение.

Объединяем слагаемые с одинаковой переменной

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 36y) + 4 = 0,$$

выносим за скобку коэффициент при переменной во второй степени

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) + 4 = 0,$$

выражения в скобках дополняем до полного квадрата, затем вычитаем те постоянные, которые прибавили в скобках, чтобы не нарушить условия задачи,

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) + 4 - 4\cdot 1 - 4\cdot 9 = 0.$$

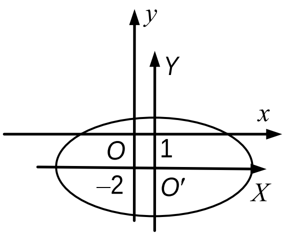


Рис. 1.

Получим выражение

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0.$$

Произведем замену координат, тем самым введем новую систему координат:

$$X = x - 1;\ x_0 = 1;$$
$$Y = y + 2;\ y_0 = -2.$$

С новыми переменными уравнение будет иметь вид:

$$4X^2 + 9Y^2 = 36$$

или после деления на правую часть (рис. 1)

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого $a = 3$ принадлежит оси Ox, меньшая полуось – $b = 2$ принадлежит оси Oy, начало координат новой системы координат находится в точке $O'(1; -2)$ (рис. 1).

13. Дано уравнение гиперболы $x^2 - 4y^2 + 4x - 16y - 16 = 0$. Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

Решение.

Задача решается по такой же схеме, как предшествующая.

$$x^2 - 4y^2 + 4x - 16y - 16 = 0,$$
$$(x^2 + 4x) - (4y^2 + 16y) - 16 = 0,$$
$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 + 4y + 4) - 16 - 4 + 4 \cdot 4 = 0,$$
$$(x + 2)^2 - 4(y + 2)^2 - 4 = 0,$$
$$X = x + 2;\ x_0 = -2;\ Y = y + 2;\ y_0 = -2.$$

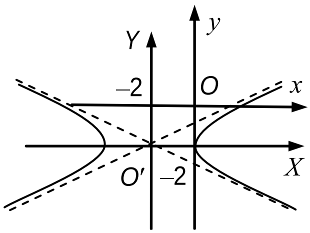


Рис. 2.

Полученное каноническое уравнение гиперболы в новой системе координат имеет вид:

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = 1,$$

действительная полуось – $a = 2$, мнимая – $b = 1$, новое начало координат находится в точке $O'(-2; -2)$ прежней системы координат (рис. 2).

14. Дано уравнение параболы $y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$. Преобразовать его к каноническому виду и построить линию.

Решение.

Аналогично предшествующему:

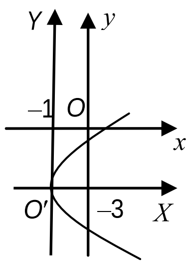


Рис. 3.

$$(y^2 + 6y) - 2x + 7 = 0,$$
$$(y^2 + 6y + 9) - 2x + 7 - 9 = 0,$$
$$(y + 3)^2 = 2(x + 1),$$

произведем замену переменных:

$$X = x + 1;\ x_0 = -1;$$
$$Y = y + 3;\ y_0 = -3.$$

В новой системе координат каноническое уравнение параболы будет:

$$Y^2 = 2X,$$

где осью симметрии является ось Ox, вершина находится в точке $O'(-1; -3)$ (рис. 3), являющейся началом координат новой системы координат.

г) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y + 25 = 0$, аналогично предшествующему

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) + 25 = 0,$$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) + 25 - 9 - 16 = 0,$$

$$9(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 0,$$

этому уравнению удовлетворяет только одна точка с координатами $O'(-1; 2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом выполнения контрольной работы является закрепление теоретических знаний, получение практических навыков при решении основных задач «Линейной алгебры» и «Аналитической геометрии». В частности:

- системы линейных уравнений;
- операции над векторами;
- уравнения прямых и плоскостей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибкова, В.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум (с использованием электронных таблиц): учеб.пособие / В.П. Грибкова [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2011. –348 с.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер[и др.]; под редакцией проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004. –471 с.

3. Апатенок, Р.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб.пособие / Р.Ф. Апатенок [и др.]. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986. –270 с.

4. Рпатенок Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии: учеб.пособие / Р.Ф. Апатенок [и др.]. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993. –275 с.

5. Мацкевич, И.П. Высшая математика. Общий курс.: учеб.пособие / И.П. Мацкевич [и др.]. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993. –320 с.