

УДК 539.3

*И. Н. МЕЛЕШКО, С. А. ПРОНКЕВИЧ, А. В. ЧИГАРЕВ.*

## ИЗГИБАНИЕ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ

*Белорусский национальный технический университет.*

*(Поступила в редакцию 17.09.2009)*

Изгибание тонких пластин за счет задания только кинематических граничных условий по контуру имеет практическое применение в технологиях получения пологих оболочек без приложения контактных воздействий непосредственно по поверхности исходной пластины. Теоретическое решение задачи сводится к бигармоническому уравнению, которое хорошо исследовано в теории упругости, математической физике.

Бигармоническая функция является производящей функцией для напряжений в плоской задаче теории упругости, а в теории изгиба тонких пластин является функцией прогиба пластины при решении широкого класса граничных задач [1]. Однако эффективное решение этих задач возможно, как правило, в случае простых геометрий для односвязных областей. Классическим подходом к решению упругих задач, сводимых к бигармоническому уравнению, является метод теории функций комплексного переменного. В случаях, когда, для данной области удастся построить конформные преобразования, Н. И. Мусхелишвили [2] показал, что можно получить в конечном виде решение для достаточно широкого класса основных граничных задач для случая односвязной области, ограниченной простым замкнутым контуром. Причем существует конформное отображение единичного круга на эту область. Таким образом, в качестве базовых задач можно рассматривать краевые задачи для круга единичного радиуса с достаточно произвольными граничными условиями. Традиционно краевые задачи рассматриваются аналитическими методами теории функций комплексного переменного с помощью интегралов Коши, вариационных методов, методов интегральных уравнений и рядов. В работе представлен метод суперпозиции, разработанный в [3], который позволяет получить решение в аналитическом виде, удобном для численных расчетов. Современный подход, базирующийся на методе конечных элементов и использования пакета ANSYS, позволяет рассмотреть круг задач, для которых результаты могут быть доведены до числа и визуализации, и сравнить результаты численного решения, проведенного методом конечных элементов, и численно-аналитического.

Рассмотрим упругую изотропную пластину, срединная плоскость которой в плоскости  $Oxy$ , которая, в общем случае, находится под действием нагрузки  $g(x, y)$ , перпендикулярной срединной плоскости, а по контуру заданы кинематические граничные условия. На площадках, перпендикулярных к осям  $x$  и  $y$ , вводятся изгибающие моменты  $(M_x, M_y)$ , крутящие моменты  $(M_{xy}, M_{yx})$ , поперечные силы  $(Q_x, Q_y)$ , приходящиеся на единицу длины срединной поверхности. Эти моменты и силы выражаются через напряжения по формулам [4]:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = -M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz,$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz, \quad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям равновесия, имеющим вид

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g(x, y) = 0. \quad (2)$$

Как следует из гипотезы «прямых нормалей» Кирхгофа напряжения выражаются через функцию  $W(x, y)$ , которая представляет собой перемещения точек срединной поверхности в направлении оси  $z$ , перпендикулярной срединной плоскости пластинки [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \\ \tau_{yz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W, \quad \sigma_z = \frac{Ez_1 \left( h^2 - \frac{4}{3} z^2 \right)}{8(1-\nu^2)} \nabla^4 W - \frac{1}{2} g(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $h$  – толщина пластинки,  $z$  – координата точки, отсчитываемая от срединной поверхности,  $g(x, y)$  – интенсивность нагрузки, распределяемой по поверхности, перпендикулярной срединной поверхности.

Подстановка (3) в (1) и интегрирование дают выражения для моментов и сил через прогиб срединной поверхности  $W(x, y)$  [4]:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластинки.

Из формул (3) и (4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{J} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_x S_y}{J}, \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x}{J}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $J = \frac{h^3}{12}$  – момент инерции единичной площадки шириной  $h$  и с основанием, равным единице, относительно центральной оси, лежащей в срединной плоскости,  $S_x, S_y$  – статические моменты относительно осей  $y$  и  $x$ .

Первое и второе уравнения (2) при подстановке (4) удовлетворяются тождественно, а из третьего уравнения следует уравнение для  $W(x, y)$ :

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{q}{D}. \quad (6)$$

Зададим кинематические граничные условия.

По контуру заданы прогибы  $W(s)$  и углы поворота нормали  $dW/dn$  к границе срединной поверхности пластины. Требуется определить прогибы, деформации и напряжения в пластине.

Положим в уравнении (6)  $q = 0$  и рассмотрим решение задачи для круга  $S$  единичного радиуса, ограниченной окружностью  $L$ .

В полярных координатах  $r, \varphi$ :  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\varphi = \arctg(y/x)$  бигармоническое уравнение имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Граничные условия для уравнения (7) в полярных координатах имеют вид

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = l(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (8)$$

Бигармоническое уравнение (7) при граничных условиях (8) имеет единственное решение, и искомая бигармоническая функция  $W = W(r, \varphi)$  может быть представлена в единичном круге с центром в начале координат с помощью двух гармонических функций  $u_1 = u_1(r, \varphi)$  и  $u_2 = u_2(r, \varphi)$  в виде [3]

$$W = (r^2 - 1)u_1 + u_2. \quad (9)$$

При этом из граничных условий (8) для бигармонической функции  $W$  следуют граничные условия для гармонических функций  $u_1$  и  $u_2$

$$u_2|_{r=1} = g(\varphi), \quad \left( 2u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = l(\varphi). \quad (10)$$

Гармонические в круге функции  $u_1$  и  $u_2$  при граничных условиях (10) могут быть найдены при помощи интеграла Пуассона

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau, \quad (11)$$

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r}. \quad (12)$$

Подставляя эти выражения для  $u_1$  и  $u_2$  в формулу (9), получаем точное решение задачи (7), (8) в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{r^2 - 1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau. \quad (13)$$

Для приближения интегралов Пуассона в представлении решения уравнения (7) воспользуемся полученной формулой. Имеют место приближенные равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k), \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k), \quad (15)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[ h + 2 \operatorname{Im} \left( \ln \left( 1 - ze^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) \right) \right], \quad (16)$$

узлы  $\varphi_k = kh$ ,  $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ ,  $h = 2\pi/2n + 1$ . Квадратурные суммы в (15), (16) обладают следующим свойством: все коэффициенты  $A_k(r, \varphi)$  неотрицательны при всех  $r$  и  $\varphi$  и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) = 1. \quad (17)$$

Чтобы получить приближение производной  $\frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r}$  в формуле (13), потребуется специальная приближенная формула.

Гармоническая функция  $u_2(r, \varphi)$  внутри единичного круга представима рядом

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{-n}^n r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d \sin(\tau - \varphi) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ g(\tau) \sin k(\tau - \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ \left( -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k\tau d\tau \right) \cos k\varphi + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \cos k\tau d\tau \right) \sin k\varphi \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Заменяя последний ряд интегралом, получаем

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (19)$$

По системе точек (18) построим квадратурную формулу для интеграла в (19). Пусть

$$g'(\varphi) \approx \tilde{g}'(\varphi) = \sum_{-n}^n \theta_k(\varphi) g'(\varphi_k), \quad (20)$$

где

$$\theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right], \\ 0, & \varphi \notin \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k). \quad (21)$$

Здесь коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$  имеет вид

$$B_k(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (22)$$

Вычислим коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$ . Разложив ядро под знаком интеграла в (19) в ряд

$$\frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} = -\operatorname{Im} \frac{t+z}{t-z} = -\operatorname{Im} \left( \frac{2t}{t-z} - 1 \right) = -2 \operatorname{Im} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m} \right) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m(\tau - \varphi),$$

найдем

$$\begin{aligned} B_k(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g' \sin m(\tau - \varphi) d\tau = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} \left[ \cos m \left( \varphi_k + \frac{h}{2} - n \right) - \cos m \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m e^{im \left( \varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi \right)}}{m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m e^{im \left( \varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi \right)}}{m} \right]. \end{aligned}$$

Заменяем ряды их суммами. Тогда коэффициенты  $B_k(r, \varphi)$  запишутся в виде

$$B_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \ln \left( 1 - ze^{-i \left( \varphi_k - \frac{h}{2} \right)} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i \left( \varphi_k + \frac{h}{2} \right)} \right) \right]. \quad (23)$$

Подставляя приближенные выражения интегралов (14), (15), (21) с коэффициентами (16), (23) в формулу (13), находим приближенное решение задачи (7), (8)

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k) - \frac{1-r^2}{2} \left[ \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k) - \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k) \right]. \quad (24)$$

Полученное решение значительно проще, чем предложенное в [1] или [5], однако также довольно затруднительно и громоздко, поэтому при решении целесообразно использовать современные системы компьютерной математики (например, Mathematica), обладающие функциями для работы с комплексными числами [6].

В качестве примера рассмотрим круглую пластину единичного радиуса со следующими граничными условиями:

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = 0,05 \cdot \sin(2\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Толщина пластины составляет 0,01 м, материал – сталь со следующими физическими характеристиками: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,23$ .

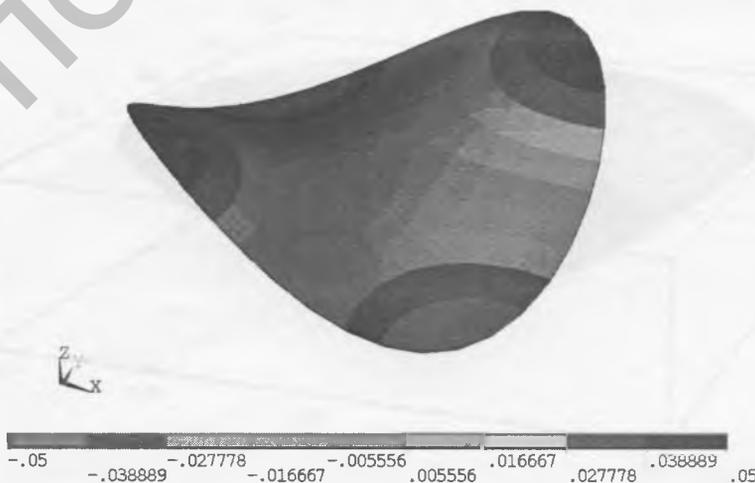


Рис. 1. Распределение перемещений  $W$  в пластине, полученное в программе ANSYS

На рис. 1 представлено распределение перемещений для пластины, соответствующее заданным граничным условиям, полученное в конечно-элементной программе ANSYS. Пластина моделировалась с использованием конечного элемента Shell63 из библиотеки конечных элементов данной программы, используемого при расчетах упругих деформаций пластин и оболочек.

На рис. 2 показаны поля перемещений, полученные для данной задачи в программе Mathematica. Прогибы контура изменяются от  $-5$  до  $+5$  см.

В качестве примера пластины с заданием изгибания по контуру рассмотрим круглую пластину единичного радиуса со следующими граничными условиями:

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Данным граничным условиям соответствует прогиб пластины на угол  $0,1$  рад. На рис. 3 представлена визуализация результатов расчета, полученных в программе Mathematica. На рис. 4 представлены результаты расчета в программе ANSYS.

Максимальный прогиб, полученный в пакете Mathematica, для данной задачи с использованием формулы (24) составляет  $0,04987$  м. Максимальный прогиб, полученный в программе ANSYS,  $-0,04055$  м. Расхождение в результатах составляет менее  $20\%$ , что можно считать приемлемым для данной задачи.

Сравнение результатов, полученных на основе построения приближенного решения логарифмами и с использованием конечно-элементного моделирования, показывает, что результаты

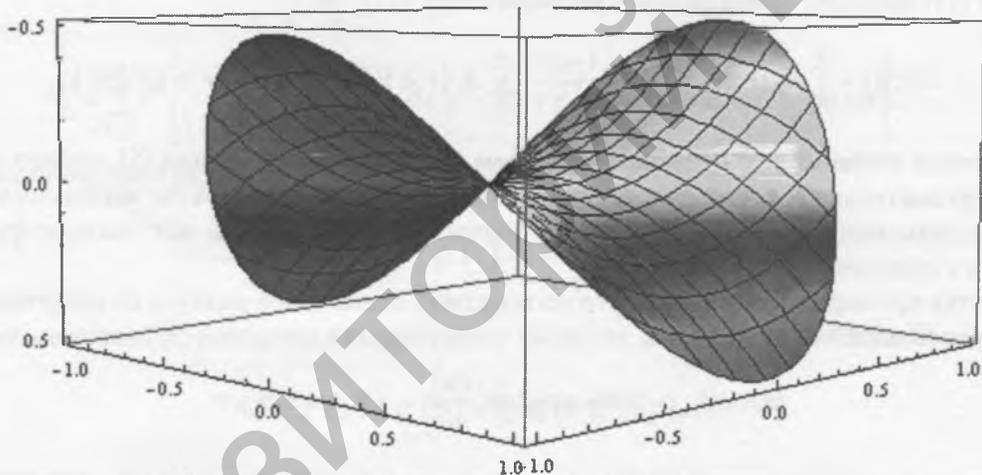


Рис. 2. Поля перемещений  $W$ , полученные в программе Mathematica

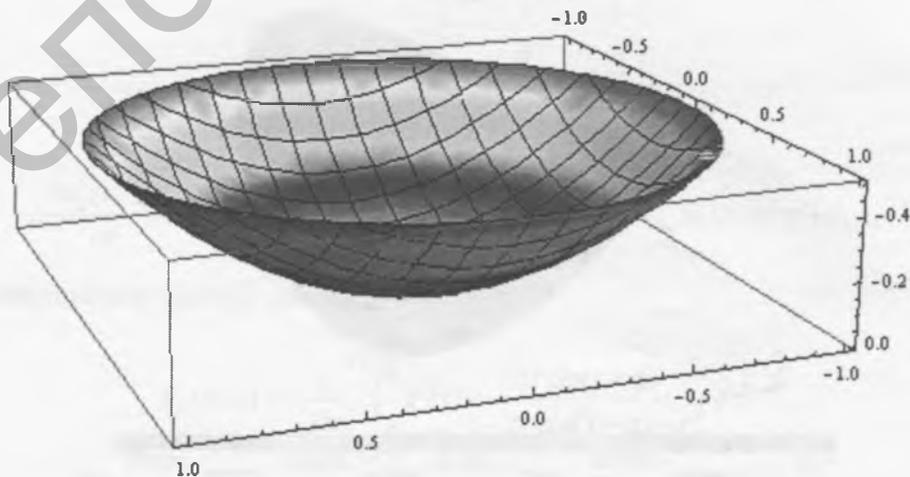


Рис. 3. Визуализация результатов расчета, полученных в программе Mathematica

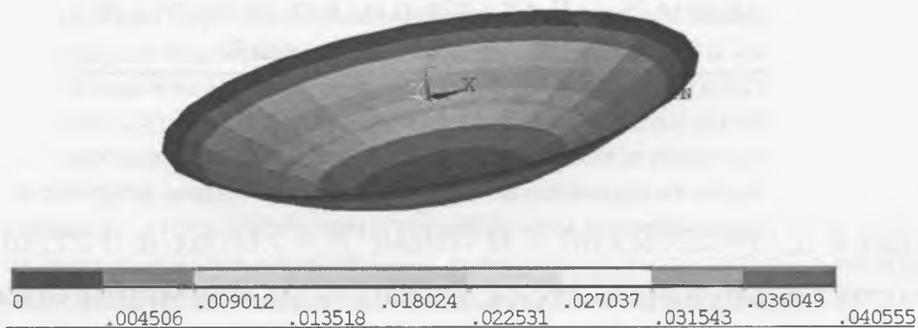


Рис. 4. Результаты расчета, полученные в программе ANSYS

сопоставимы, а использование систем компьютерной математики (Mathematica, Maple, MathCAD и др.) для решения такого рода задач значительно проще и не требует изучения таких громоздких систем, как ANSYS, и дает результаты, точность которых не хуже, чем при решении их с помощью программы ANSYS или других аналогичных конечно-элементных пакетов.

### Литература

1. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев, 1972.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
3. Мелешко И. Н., Чигарев А. В. // Машиностроение. Мн. 2009. № 24. С. 161–165.
4. Тимошенко С. П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1966.
5. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М., 1977.
6. Дьяконов В. Mathematica 4. Учебный курс. СПб., 2001

*I. N. MELESHKO, S. A. PRONKEVICH, A.V. CHIGAREV*

### THIN PLATES BENDING UNDER ABSENCE OF TRANSVERSE LOADING

### Summary

A method of numerical evaluation of plate flexure is developed. A deformation of a single radius circular plate under asymmetrical boundary conditions is examined and the results are compared to numerical computations obtained with help of ANSYS.