

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Минск 2010

25

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический журнал

Основан в 1975 году

Выпуск 25

*Посвящается 80-летию со дня рождения академика
АН СССР и Российской академии наук Е.И. Шемякина*

(1929-2009гг.)

Минск
2010

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), Г.Я. Беляев (Беларусь), J. Grabski (Польша), G. Gudehus
(Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина),
Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь),
Ф.А. Романюк (Беларусь), К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия),
Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова (уч. секретарь)
И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда, А.В. Чигарев (председатель), А.М. Якимович
Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов
Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский
Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег
Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52
E-mail: theormech@rambler.ru

В журнале содержатся научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов.

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43

© БНТУ, 2010



9 декабря 2009 г. Евгению Ивановичу Шемякину исполнилось бы 80 лет.

Е.И.Шемякин родился в Новосибирске. Окончив с золотой медалью среднюю школу, он с 1947 по 1952 гг. учился на механико-математическом факультете Ленинградского государственного университета. После окончания аспирантуры ЛГУ в 1955 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук "Распространение волн в неидеально упругих средах".

С 1955 по 1960 гг. Е.И.Шемякин работал научным сотрудником в Институте химической физики АН СССР (г. Москва). Затем, когда было организовано Сибирское отделение Академии наук СССР, Е.И.Шемякин вернулся в Новосибирск и с 1960 по 1971 гг. заведовал лабораторией механики горных пород в Институте теоретической и прикладной механики.

Фундаментальные научные результаты, полученные в это время, были опубликованы в следующих работах: "Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой среде" (1955 г., 1958 г.), "Волны нагрузки при подземном взрыве в горных породах" (1961 г., совместно с Н.С.Медведевой), "О динамической сжимаемости прочных горных пород и металлов" (1964 г., совместно с академиком С.Л. Христиановичем). В 1962 г. Е.И. Шемякин, защитив диссертацию на тему "Распространение волн при подводном и подземном взрывах", получает ученую степень доктора технических наук.

В это время Евгений Иванович совмещает работу в Академии наук СССР с преподаванием в Новосибирском государственном университете, где в 1965 г. получает ученое звание профессора, а с 1967 по 1987 гг. заведует кафедрой механики сплошной среды механико-математического факультета. В 1968 г. выходит в свет его учебник "Динамические задачи теории упругости и пластичности".

В 1969 г. была опубликована такая важная работа, как «О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении» (в соавторстве с С.А. Христиановичем), а в 1974 г. — статья «К изучению механизма движения при коровых землетрясениях» («Известия АН СССР. Физика Земли », совместно с В.И. Щегловым).

В 1970 г. Евгений Иванович переходит на работу в Институт горного дела СО АН СССР на должность заместителя директора и с 1971 г. он становится сначала и.о. директора, а затем директором института. На этом посту он оставался до июля 1987 г. В этот период он ведет также активную научно-организационную и общественную работу. С 1970 по 1989 гг. Е.И. Шемякин был главным редактором журнала "Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых" (ФТПРПИ, журнал переводится на английский язык под названием "Soviet Mining Science"). Он являлся членом Советского райкома КПСС г. Новосибирска, избирался членом Новосибирского областного совета профсоюза и членом областного Совета народных депутатов (с 1977 г.), а также был председателем областного Совета научно-технических обществ.

Период работы в ИГД СО АН СССР был отмечен для Евгения Ивановича Шемякина крупными результатами в области физического моделирования горнотехнических процессов и их обобщения. Этапными работами являются опубликованные в ФТПРПИ статьи "Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений угля и руды" (1974 г.) и "Задачи механики сыпучих сред в горном деле" (1982 г., совместно с А.Ф. Ревуженко и С.Б. Стажевским). В этих работах были представлены и обобщены результаты физического моделирования на принципиально новых установках, созданных в ИГД СО АН СССР для исследования поведения твердых тел при простом и сложном нагружении. В 1979 г. выходит из печати его книга "Динамическое, разрушение, твердых тел" (совместно с В.С. Никифоровским).

В декабре 1976 г. Е.И. Шемякин избирается членом-корреспондентом АН СССР по отделению механики и процессов управления (механика горных пород). В 1980 г. он становится заместителем председателя Президиума Сибирского отделения АН СССР и остается на этом посту до 1986 г. В декабре 1984 г. Евгений Иванович был избран действительным членом АН СССР по отделению геологии, геофизики, геохимии и горных наук (горное дело, геофизика, геология).

С 1987 по 1992 гг. начинается новый период в государственной и общественной деятельности Евгения Ивановича — он работает Председателем Высшей аттестационной комиссии при Совете Министров СССР (на правах министра).

В 1991 г. Е.И. Шемякин был приглашен в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова заведовать кафедрой волновой и газовой динамики механико-математического факультета. Параллельно он проводит консультации в качестве главного научного сотрудника Института динамики геосфер Российской академии наук.

В 90-е годы Е.И. Шемякин публикует целый ряд оригинальных работ, в том числе "Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования" (1991 г., совместно с А.И. Бобряковым и А.Ф. Ревуженко), "О деформации вращающихся планет" (1993 г.), "О происхождении алмазных трубок" (1995 г.).

Е.И. Шемякин является основателем научной школы "Теоретические и экспериментальные, исследования необратимых, деформаций и разрушения твердых тел при ударе и взрыве", объединяющей ведущих специалистов из научно-исследовательских институтов Москвы и Новосибирска. Основные направления деятельности школы — разработка математических моделей процессов необратимого деформирования и разрушения твердых тел и методов решения краевых задач о деформировании и разрушении твердых тел, включая прикладные задачи горной науки.

Научные связи Е.И. Шемякина в Беларуси были многочисленны и разнообразны. Он неоднократно принимал участие в конференциях, совещаниях, связанных с решением задач геомеханики Солигорского месторождения, механики машин, теоретической механики. В Беларуси работают его ученики и научная школа по механике деформированного твердого тела, Совет по дисциплине докторских защите докторских диссертаций и другие научные структуры появились благодаря активной поддержке Е.И. Шемякина.

Весьма широки и разнообразны были международные контакты Е.И. Шемякина. Еще в 1968 г. он представляет на Международной конференции по прикладной механике (Стэнфорд, США) доклад "О затухании волн напряжений в горных породах". Он участвовал в работе симпозиумов в ФРГ (1976 г.) — "Проблемы освоения глубоких месторождений полезных ископаемых" и в Швеции (1982 г.) — "Новые технологии разработки рудных месторождений". В 1982 г. Е.И. Шемякин

избирается вице-президентом Международного общества по механике горных пород, а в 1984 г. возглавляет Научный совет по механике горных пород и горному давлению. В знак признания научных достижений Евгения Ивановича в 1992 г. он избирается членом Академии наук Чехословацкой Республики, в 1993 г. — членом Королевского общества инженеров (Швеция), в 1994 г. — председателем национальной группы геомехаников.

Заслуги Е.И. Шемякина в государственной, общественной и научной деятельности получили высокую оценку в нашей стране и за ее пределами. Он являлся лауреатом Государственной премии (1984 г.), действительным членом Академии естественных наук Российской Федерации и Академии горных наук, почетным членом Международной инженерной академии т.д.

Был награжден правительственными наградами: орденами «Знак Почета» (1967), Трудового Красного Знамени (1975 г.), Дружбы народов (1981 г.), медалями, был удостоен трех золотых медалей ВДНХ, был награжден медалями ГДР (1978 г.), БНР (1981 г.), КНДР (1985 г.).

Скончался Евгений Иванович 17 февраля 2009г. в г. Москве.

Светлая память об Евгении Ивановиче - ученом, общественным деятеле, человеке навсегда останется в сердцах его учеников и коллег.

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МЕХАНИКИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ПЕРСПЕКТИВНЫХ МАШИН

Высоцкий М.С., Харитончик С.В.

Введение

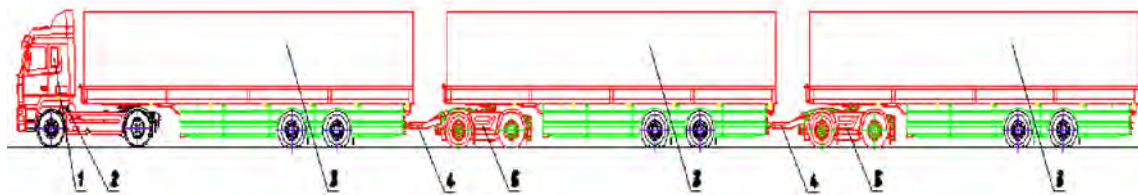
Все более актуальными становятся вопросы создания новых перспективных поколений большегрузных магистральных автопоездов для транспортировки грузов на дальние и сверхдальние расстояния между Европой, Азией и Дальним Востоком. Перспективные многозвенные автопоезда сократят количество транспорта на дорогах и количество занятых в грузоперевозках водителей, повысят экономическую эффективность и безопасность перевозок, значительно уменьшат вредные выбросы в окружающую среду.

С позиции логистики трансконтинентальных автоперевозок грузов транспортные средства должны быть модульной конструкции и иметь максимально возможное количество грузовых модулей [1, 2]. Этому отвечают многозвенные автопоезда с числом прицепных звеньев три и более. Однако, условия безопасности, с учетом длины многозвенного автопоезда не менее 40 м, требуют новых подходов при выборе параметров и разработке конструкции узлов, агрегатов, систем и автопоезда в целом, которые должны реализовывать функции маневренности, устойчивости, управляемости при эксплуатации.

В современной научно-технической литературе отсутствуют методы проектирования транспортных средств такого типа и поэтому существует необходимость создания методических основ для исследования динамики и проектирования автопоездов с последующим их использованием в цикле виртуальной разработки. С этой целью для анализа маневренности, управляемости и устойчивости требуется создание параметризованной универсальной динамической модели многозвенного автопоезда, позволяющей путем компьютерного моделирования провести серию виртуальных испытаний. Данные испытания помогут найти оптимальные решения конструкций рулевого управления, подвески, сцепного устройства и др. для обеспечения маневренности и стабилизации криволинейного движения многозвенного автопоезда. Также требуется создание алгоритма, моделирующего управляющее воздействие водителя на рулевое колесо при движении автопоезда по заданному маршруту, соответствующему условиям реальных дорожных развязок.

Многозвенный автопоезд

Магистральный автопоезд, используемый для этих целей, должен состоять из нескольких основных структурных укрупненных модулей: тягач головного звена, представляющий собой тяговый модуль с кабиной, грузовой модуль и автономный тяговый модуль с возможностью дистанционного управления (рис. 1). При этом, тяговые модули предназначены для придания автопоезду требуемых тягово-динамических свойств при осуществлении транспортной работы. В состав тягового модуля входит рама, силовая установка (двигатель внутреннего сгорания с системами), трансмиссионный блок (привод колес ведущего моста), ведущие мосты и управляемые оси, подвеска оси и ведущего моста, рулевое управление, тормозная система, седельно-сцепное устройство быстрого присоединения грузового модуля к тяговому модулю. Тяговый модуль может комплектоваться силовыми установками и трансмиссиями различных типов. Например, трансмиссия может быть как механической, так и электромеханической. Автономный тяговый модуль используется в звеньях автопоезда и предназначен для обеспечения их мобильности.



*1 - кабина, 2 - тяговый модуль, 3 - грузовой модуль, 4 - сцепное устройство,
5 – автономный тяговый модуль*

Рис. 1. Структура модульного многозвенного автопоезда

С учетом сказанного под одним звеном понимается единица транспортного средства, в состав которой входит тяговый и грузовой модули.

Задачи исследования

Для обеспечения различных способов передвижения звенья многозвенного автопоезда должны оснащаться управляемыми колесами в каждом звене, поскольку эффективность многозвенного автопоезда будет зависеть от его подвижности, определяемой совокупностью взаимосвязанных параметров, среди которых маневренность, управляемость и устойчивость движения. В данном исследовании под указанными свойствами будем понимать следующее.

Маневренность определяется способностью автопоезда преодолевать повороты на дорогах и разворачиваться на регламентированной по размерам территории.

Управляемость определяется возможностью автопоезда легко и быстро изменять свое положение на дороге при воздействии водителя на органы управления.

Устойчивость движения определяется способностью автопоезда сохранять направление движения и ориентацию продольной и вертикальной осей независимо от действия внешних и инерционных сил в заданных во времени или пути пределах.

С учетом сказанного задача данного исследования состоит в том, чтобы разработать теоретические методы и математические и компьютерные модели, описывающие динамику движения многозвенного автопоезда на криволинейных участках дорог; проверить адекватность предложенных методов и моделей. Это необходимо для выработки рекомендаций по выбору основных параметров узлов и систем управления автопоезда, чтобы обеспечить нормативные требования по маневренности, управляемости и устойчивости его движения.

Методика проведения компьютерных и физических испытаний

Показатели эксплуатационных свойств автопоезда, таких как маневренность, управляемость и устойчивость регламентированы внутриотраслевыми и международными нормами. Например, такой показатель как маневренность оценивается способностью транспортного средства на минимальной скорости вписаться в размеченный коридор с разворотом на 360°. Показатели маневренности регламентируются Директивой 97/27/EC of the European Parliament and European Parliament and of the Council, relating to the masses and dimensions of certain categories of motor vehicles and their trailers и СТБ ГОСТ Р 52389-2005 (рис. 2 а).

Основным нормативным документом по управляемости и устойчивости транспортных средств, действующим в Беларуси и Российской Федерации, являются стандарты [3 и 4]. В соответствии с ними показатели, характеризующие управляемость и устойчивость автопоезда определяют при выполнении следующих испытаний:

испытание «поворот $R_{п} = 35$ м», которое предназначено для определения максимальной скорости маневра при входе автопоезда в поворот;

испытание «переставка $S_{п} = 20$ м», которое предназначено для определения максимальной скорости маневра при смене автопоездом полосы движения на ограниченном участке пути;

испытание «усилие на рулевом колесе»;

испытание «стабилизация рулевого управления», которое предназначено для определения параметров, характеризующих самовозврат управляемых колес и рулевого колеса в нейтральное положение;

испытание «прямая», которое предназначено для определения средней угловой скорости корректирующих поворотов рулевого колеса;

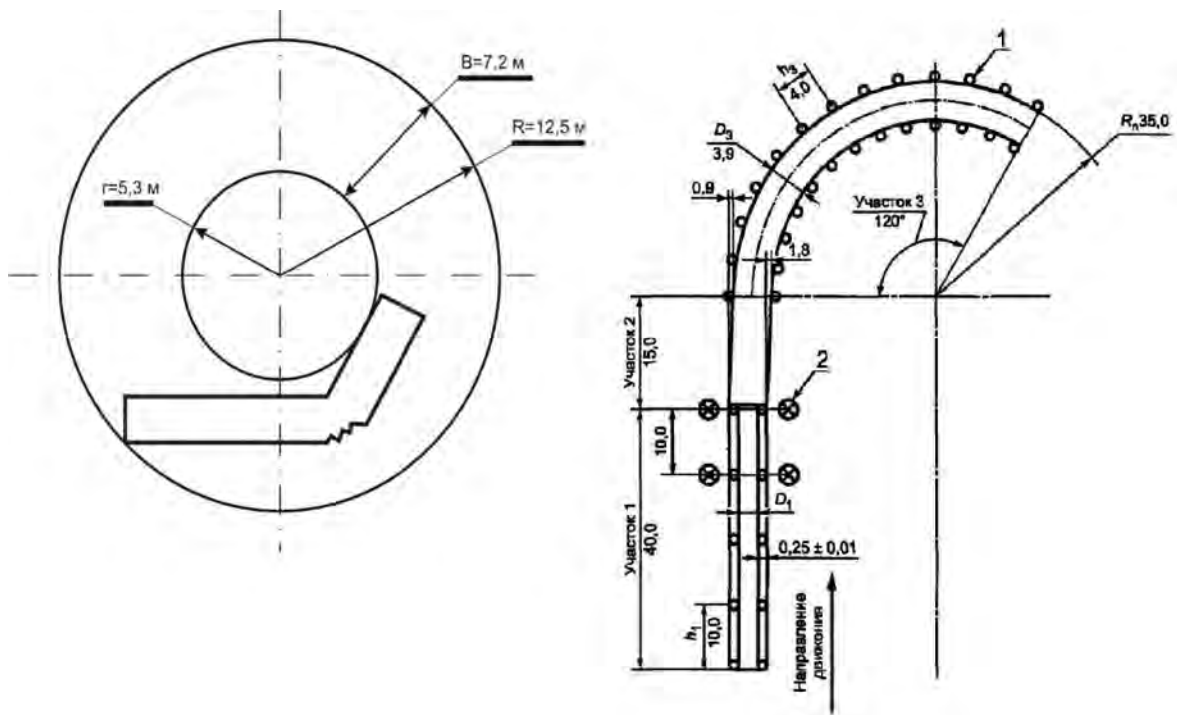
испытание «пробег», которое предназначено для определения допустимых скоростей в эксплуатационных режимах движения, если по результатам испытаний «поворот» и «переставка» скорости маневров автопоездов ниже нормативных значений.

На начальной стадии проектирования, когда еще не выбран тип рулевого механизма, нет необходимости выполнять компьютерное испытание «усилие на рулевом колесе», поскольку для управления автопоездом требуется разработка оригинального рулевого управления и алгоритма управления, так как для обеспечения высокой маневренности необходимо будет изменять не только положение управляемых колес, но и, возможно, размеры элементов сцепного устройства. То же относится и к испытаниям «стабилизация рулевого управления», «прямая», «пробег».

При испытаниях «поворот $R_{п} = 35$ м» автопоезд вводится в режим равномерного прямолинейного движения и устанавливается наивысшая передача, обеспечивающая устойчивую работу двигателя. Разметка дороги для испытаний приведена на рис. 2 б: на участке 1 ширина коридора $D_1 = 3,55$ м, на участке 3 ширина коридора $D_3 = 4,45$ м. При пересечении передними колесами транспортного средства границы между участками 1 и 2 размеченного коридора водитель быстро снимает ногу с педали газа и начинает поворачивать рулевое колесо вправо для выполнения маневра. Положение всех остальных органов управления должно оставаться неизменным. Внешний наблюдатель отмечает отрывы колес от дороги, выходы автопоезда за пределы коридора и информирует о них водителя. Результатом испытаний «поворот $R_{п} = 35$ м» является определение максимальной скорости прохождения испытательного участка, при которой не было выхода за пределы разметки и не наблюдался отрыв колес автопоезда от дороги.

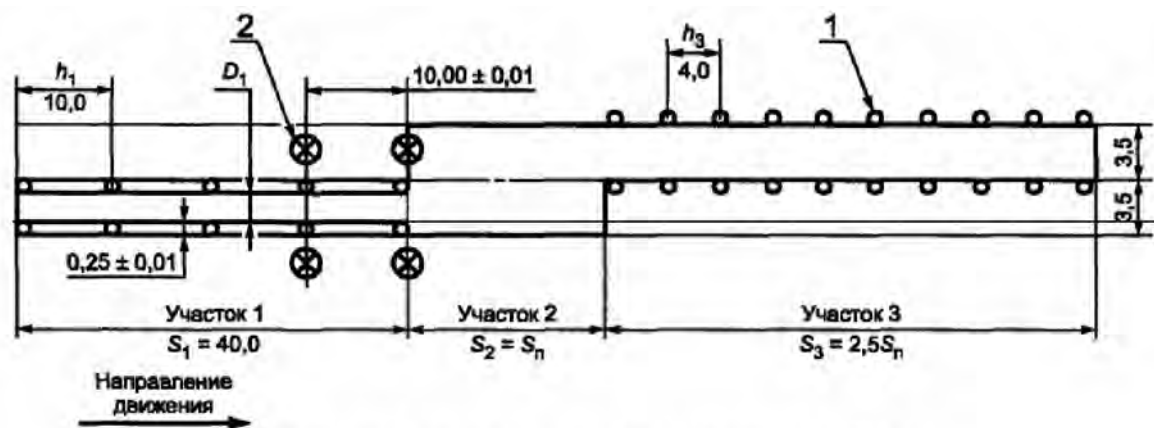
Согласно [3, 4] максимальная скорость выполнения маневра «поворот $R_{п} = 35$ м» должна быть не менее 42 км/ч.

В среде моделирования MSC.ADAMS определение критической скорости входа автопоезда в поворот осуществляется путем увеличения скорости движения до появления отрыва колеса или выхода транспортного средства за боковые границы коридора.



а) Разметка участка испытаний «маневренность»

б) Разметка участка испытаний «поворот $R_n = 35\text{ м}$ »



в) Разметка участка испытаний «переставка $S_n = 20\text{ м}$ »

Рис. 2. Схемы участков дорог для проведения нормативных испытаний

Схема разметки участка дороги для испытания «переставка $S_n = 20\text{ м}$ » приведена на рис. 2 в. Для исследуемого автопоезда согласно [3, 4] максимальная скорость выполнения маневра должна быть не менее 50 км/ч. При испытаниях многозвенный автопоезд также выходит на режим равномерного прямолинейного движения и выбирается наивысшая передача, обеспечивающую устойчивую работу двигателя. Положение рук водителя на рулевом колесе соответствует цифрам «3» и «9» циферблата часов. При пересечении передними колесами автопоезда границы между участками 1 и 2 размеченного коридора водитель быстро снимает ногу с педали газа и начинает выполнять маневр. Никакие воздействия на остальные органы управления не допускаются. Внешний наблюдатель отмечает отрывы колес от дороги, выходы автопоезда за пределы коридора и информирует о них водителя. Результатом испытаний «переставка $S_n = 20\text{ м}$ » является определение максимальной скорости прохождения участка разметки, при которой не было выхода за пределы разметки и не наблюдался отрыв колес транспортного средства от дороги.

Обобщенная математическая модель криволинейного движения многозвеного автопоезда

Силы, действующие при криволинейном движении на многозвеновый автопоезд, в соответствии с рекомендацией [5] можно определить отдельно для каждого звена с учетом взаимодействия звеньев между собой. В этой связи рассмотрим методику описания криволинейного движения на примере первого (головного) звена автопоезда.

Ускорения центров тягача и полуприцепа находятся в неподвижной системе координат XOY (рис.3). В некоторый момент времени продольная ось тягача расположена под углом γ_{11} к оси OX , на угол α_{11}^i повернуто внутреннее управляемое колесо, а наружное на угол α_{11}^o . В этот же момент времени продольная ось грузового модуля (полуприцепа) к оси OX расположена под углом γ_{12} . С центрами тяжести тягового и грузового модулей свяжем подвижные системы координат $x_{11}o_{11}y_{11}$ и $x_{12}o_{12}y_{12}$. Оси $o_{11}x_{11}$ и $o_{12}x_{12}$ будут направлены вдоль продольных осей модулей.

С учетом изложенного скорости центров масс тягового и грузового модулей равны соответственно $V_{11} = \omega_1 R_{11}$ и $V_{12} = \omega_1 R_{12}$. По рекомендациям [2] проекции данных скоростей на оси XOY равны

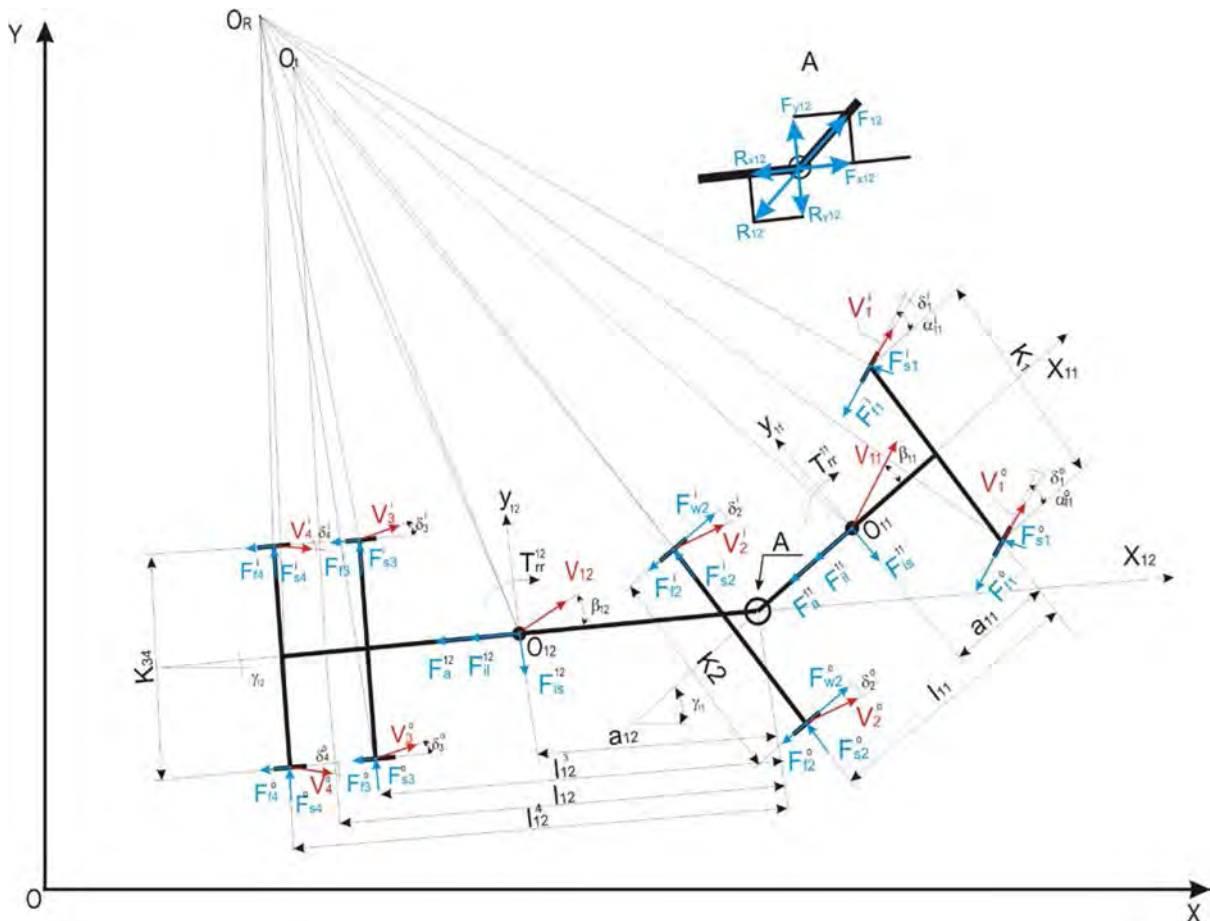


Рис.3. Расчетная схема криволинейного движения звена многозвеного автопоезда

$$V_{11}^X = V_{11} \cos(\beta_{11} + \gamma_{11}) = V_{11} \cos \beta_{11} \cos \gamma_{11} - V_{11} \sin \beta_{11} \sin \gamma_{11} = V_{11}^{X11} \cos \gamma_{11} - V_{11}^{Y11} \sin \gamma_{11};$$

$$V_{11}^Y = V_{11} \sin(\beta_{11} + \gamma_{11}) = V_{11} \cos \beta_{11} \sin \gamma_{11} + V_{11} \sin \beta_{11} \cos \gamma_{11} = V_{11}^{X11} \sin \gamma_{11} + V_{11}^{Y11} \cos \gamma_{11};$$

$$V_{12}^X = V_{12} \cos(\beta_{12} + \gamma_{12}) = V_{12} \cos \beta_{12} \cos \gamma_{12} - V_{12} \sin \beta_{12} \sin \gamma_{12} = V_{12}^{X12} \cos \gamma_{12} - V_{12}^{Y12} \sin \gamma_{12};$$

$$V_{12}^Y = V_{12} \sin(\beta_{12} + \gamma_{12}) = V_{12} \cos \beta_{12} \sin \gamma_{12} + V_{12} \sin \beta_{12} \cos \gamma_{12} = V_{12}^{X12} \sin \gamma_{12} + V_{12}^{Y12} \cos \gamma_{12}.$$

При этом скорости V_{11}^{X11} и V_{12}^{X12} являются скоростями продольного движения соответственно тягового и грузового модулей, а скорости V_{11}^{Y11} и V_{12}^{Y12} – скоростями бокового смещения.

Дифференцируя полученные выражения, находим проекции на оси неподвижной системы координат XOY ускорений центров масс тягового и грузового модулей:

$$j_{11}^X = \cos \gamma_{11} dV_{11}^{X11}/dt - V_{11}^{X11} \sin \gamma_{11} d\gamma_{11}/dt - \sin \gamma_{11} dV_{11}^{Y11}/dt - V_{11}^{Y11} \cos \gamma_{11} d\gamma_{11}/dt;$$

$$j_{11}^Y = \sin \gamma_{11} dV_{11}^{X11}/dt + V_{11}^{X11} \cos \gamma_{11} d\gamma_{11}/dt + \cos \gamma_{11} dV_{11}^{Y11}/dt - V_{11}^{Y11} \sin \gamma_{11} d\gamma_{11}/dt;$$

$$j_{12}^X = \cos \gamma_{12} dV_{12}^{X12}/dt - V_{12}^{X12} \sin \gamma_{12} d\gamma_{12}/dt - \sin \gamma_{12} dV_{12}^{Y12}/dt - V_{12}^{Y12} \cos \gamma_{12} d\gamma_{12}/dt;$$

$$j_{12}^Y = \sin \gamma_{12} dV_{12}^{X12}/dt + V_{12}^{X12} \cos \gamma_{12} d\gamma_{12}/dt + \cos \gamma_{12} dV_{12}^{Y12}/dt - V_{12}^{Y12} \sin \gamma_{12} d\gamma_{12}/dt.$$

В практической деятельности удобно пользоваться значениями не только скоростей, но и ускорений и сил, которые не меняют свое положение относительно модулей в звеньях автопоезда. С этой целью определим проекции найденных ускорений на продольные поперечные оси тягового и грузового модулей многозвенного автопоезда:

$$j_{11,12}^{X11,X12} = j_{11,12}^X \cos \gamma_{11,12} + j_{11,12}^Y \sin \gamma_{11,12};$$

$$j_{11,12}^{Y11,Y12} = j_{11,12}^Y \cos \gamma_{11,12} - j_{11,12}^X \sin \gamma_{11,12}.$$

С учетом ранее полученных выражений получаем:

$$j_{11,12}^{X11,X12} = j_{11,12} - V_{11,12}^{Y11,Y12} \omega_{11,12};$$

$$j_{11,12}^{Y11,Y12} = V_{11,12}^{X11,X12} \omega_{11,12} + dV_{11,12}^{Y11,Y12}/dt,$$

где $dV_{11}^{X11}/dt = j_{11}$, $dV_{12}^{X12}/dt = j_{12}$ – продольные ускорения модулей, а $d\gamma_{11}/dt = \omega_{11}$ и $d\gamma_{12}/dt = \omega_{12}$ – угловые скорости модулей.

Проекции сил, действующие на тяговый и грузовой модули при криволинейном движении многозвенного автопоезда, определим на подвижные системы координат $x_{11}o_{11}y_{11}$ и $x_{12}o_{12}y_{12}$, связанные их продольными и поперечными осями:

в системе координат $x_{11}o_{11}y_{11}$

$$\begin{aligned} \sum F_{X_{11}} &= -F_a^{11} - F_{il}^{11} + F_{w2}^i + F_{w2}^o - F_{f2}^i - F_{f2}^o - \\ &\quad - F_{f1}^i \cos \alpha_{11}^i - F_{f1}^o \cos \alpha_{11}^o - F_{s1}^i \sin \alpha_{11}^i - F_{s1}^o \sin \alpha_{11}^o - R_{12}^i; \\ \sum F_{Y_{11}} &= -F_{s1}^i \cos \alpha_{11}^i - F_{s1}^o \cos \alpha_{11}^o - F_{is}^{11} + F_{s2}^i + F_{s2}^o - F_{f1}^i \sin \alpha_{11}^i - F_{f1}^o \sin \alpha_{11}^o; \\ \sum M_{o_{11}} &= -T_{rr}^{11} + a_{11} F_{s1}^i \cos \alpha_{11}^i + a_{11} F_{s1}^o \cos \alpha_{11}^o + \\ &\quad + \frac{1}{2} K_1 F_{f1}^i \cos \alpha_{11}^i - \frac{1}{2} K_1 F_{f1}^o \cos \alpha_{11}^o + \frac{1}{2} K_2 F_{f2}^i + \frac{1}{2} K_2 F_{f2}^o. \end{aligned}$$

в системе координат $x_{12}o_{12}y_{12}$

$$\begin{aligned} \sum F_{X_{12}} &= -F_a^{12} - F_{il}^{12} - F_{f3}^i - F_{f3}^o - F_{f4}^i - F_{f4}^o + F_{X_{12}}; \\ \sum F_{Y_{12}} &= F_{s3}^i + F_{s3}^o - F_{is}^{12} + F_{s4}^i + F_{s4}^o + F_{Y_{12}}; \\ \sum M_{o_{12}} &= -T_{rr}^{12} - (l_{12}^3 - a_{12}) F_{s3}^i - (l_{12}^3 - a_{12}) F_{s3}^o - (l_{12}^4 - a_{12}) F_{s4}^i - (l_{12}^4 - a_{12}) F_{s4}^o + \\ &\quad + \frac{1}{2} K_{34} F_{f3}^i - \frac{1}{2} K_{34} F_{f3}^o + \frac{1}{2} K_{34} F_{f4}^i - \frac{1}{2} K_{34} F_{f4}^o, \end{aligned}$$

где под F_w приняты обозначения соответствующих окружных сил ведущих колес, F_f – сил сопротивления качению колес, F_a – силы аэродинамического сопротивления, F_{il} – продольной составляющей силы инерции, F_{is} – боковой составляющей силы

инерции, F_{si} – силы бокового уводы. Смысл остальных принятых переменных следует из рис. 3. В обозначениях индексов первая цифра указывает на порядковый номер звена автопоезда, вторая – «1» на отношение переменной к тяговому модулю, «2» на отношение переменной к грузовому модулю.

Многомассовая модель многозвенного автопоезда в MSC.ADAMS

Для анализа показателей маневренности, управляемости и устойчивости в MSC.ADAMS создана параметризованная полнокомплектная динамическая модель многозвенного автопоезда (рис. 4), позволяющая путем компьютерного моделирования провести серию виртуальных испытаний.

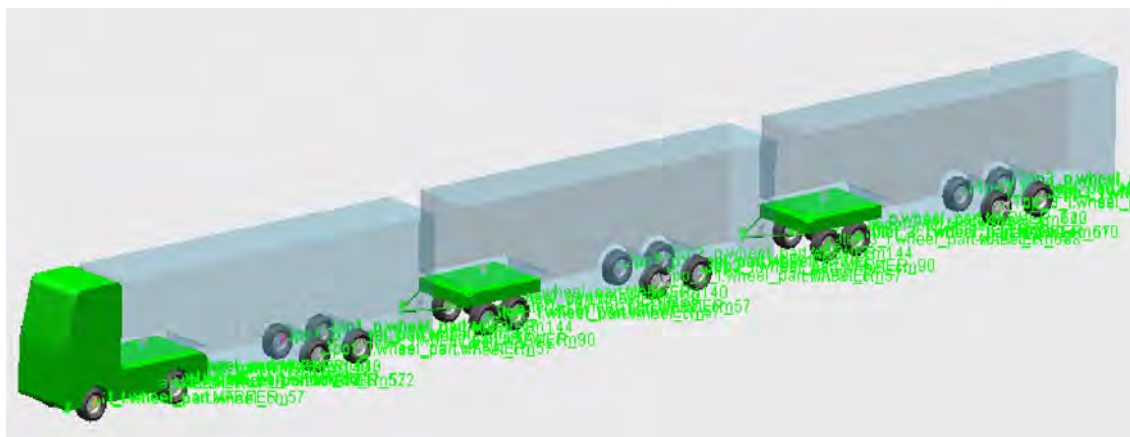


Рис. 4. Многомассовая динамическая модель многозвенного автопоезда

Динамическая модель автопоезда включает в себя подмодели тягового модуля с кабиной, трех грузовых модулей, двух тяговых подкатных модулей, две подмодели сцепного устройства, а также модели колес и дороги. Каждая подмодель включает в себя модели предварительно прокомпонованных узлов и агрегатов (двигатели, трансмиссии, рулевые управления, топливные баки, подвески и т.п.). С их учетом подмодели тяговых и грузовых модулей выполнены жесткими телами и задают соответствующее распределение инерционно-массовых характеристик полнокомплектной модели в пространстве. Подмодели сцепных устройств моделируются шарниром, имеющим одну вращательную степень свободы ведущего и ведомого звеньев.

В дальнейшем, при усовершенствовании сцепного устройства, модель может быть адаптирована к конструкции добавлением новых конструктивных элементов, включая и систему управления сцепкой.

Для обеспечения имитации движения автопоезда принимаются модели взаимодействия шины с дорогой, используемые в пакете MSC.ADAMS. В зависимости от типа испытаний используются модели шин Fiala или Pacejka.

В многокомпонентной модели автопоезда применяется модель шины, на основании теории E. Fiala [6] (рис. 5). Модель шины имеет жесткую ступицу А, пневматический элемент В, который моделирует упругое основание и сетку диагонально уложенных слоев каркаса шины в боковых стенках, исключая сдвиг периферии колеса относительно ступицы в окружном направлении и имеющий жесткость в боковом направлении, тонкая лента С, обладающая изгибной жесткостью в боковом направлении, моделирует каркас и брекер в короне шины, рабочая лента D с рабочей поверхностью, способной к сдвигу в тангенциальном направлении моделирует протектор шины. Данная модель с достаточной точностью для сравнительного анализа

показателей маневренности, управляемости и устойчивости движения автопоезда воспроизводит упругие и сцепные характеристики шины.

Таким образом, виртуальные испытания, проведенные с помощью разработанной динамической модели многозвенного автопоезда, позволят оптимизировать конструктивные решения рулевого управления, подвески, сцепного устройства и др. для обеспечения заданных стандартами показателей его маневренности, устойчивости и управляемости и разработки алгоритмов управления его движением.

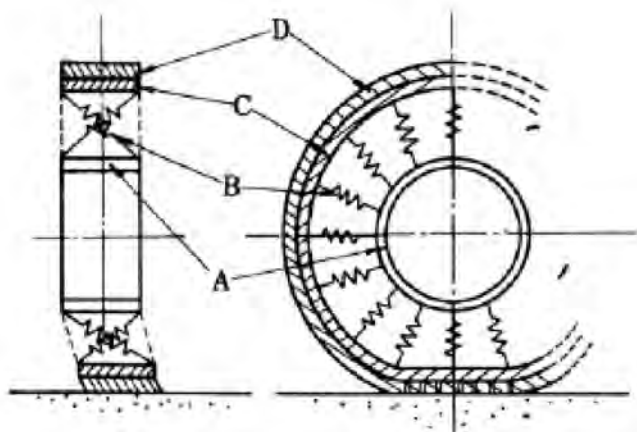


Рис. 5. Структура модели шины E. Fiala

Алгоритм воздействия на рулевое колесо

В условиях реальной эксплуатации техника вождения многозвенного автопоезда будет отличаться по сравнению с автопоездом классической компоновки. В первую очередь это касается проезда криволинейных участков движения. Здесь водитель должен стараться максимально эффективно использовать всю ширину заданного дорожного коридора, что исключит выход отдельных элементов звеньев за пределы коридора.

Определение в этой ситуации порядка действий водителя необходимо не только для обучения навыкам вождения водителя при проезде дорожных развязок, но необходимо также при проведении виртуальных испытаний и разработке алгоритмов автоматического управления движением многозвенного автопоезда.

В этой связи предлагается алгоритм, моделирующий управляющее воздействие водителя на рулевое колесо. Данный алгоритм основан на принципе корректировки курса движения автопоезда по отклонению от предварительно заданной траектории движения. Необходимая траектория движения задается в виде полилинии как функция пути в глобальной системе координат

$$S = f(X, Y).$$

В процессе движения автопоезда непрерывно производится расчет угла наклона касательной к заданной траектории, который определяет истинное направление курса движения автопоезда. Одновременно с этим определяется текущее направление курса движения автопоезда. Разница между направлением курса по траектории и текущим направлением курса движения автопоезда задает направление и закон поворота рулевого колеса выраженный зависимостью

$$\Theta_{rk} = f(\text{time}, \gamma, \psi, \Delta, V_{rk}) \text{ sign } \Delta,$$

где Θ_{rk} – угол поворота рулевого колеса, γ – направления курса траектории, ψ – текущее направление курса движения автопоезда, Δ – текущий угол рассогласования курсов, V_{rk} – скорость поворота рулевого колеса.

Виртуальные испытания и анализ маневренности, устойчивости, управляемости автопоезда

Рассмотрим результаты виртуальных испытаний многозвенного автопоезда на основе созданных динамических моделей по показателям эксплуатационных свойств, определенных на основе действующих стандартов (рис. 6, 7).

При движении многозвенного автопоезда по стандартизованному коридору по часовой стрелке (рис. 2 а) водитель удерживает левый габарит головного звена как можно ближе к кромке большого круга радиусом 12,5 м (рис. 6). В силу конструктивных особенностей полуприцеп даже одного звена будет перемещаться в направлении малого круга радиусом 5,3 м по причине действия боковых сил на колеса полуприцепа. Расчеты показывают (рис. 8), что отсутствие управляемых колес в грузовых модулях приводит к большей силовой нагруженности ходовой системы многозвенного автопоезда, созданию дополнительных моментов сопротивления повороту и соответствующей потере мощности. Так, значения боковых сил на некоторых колесах осей грузовых модулей достигают 27 кН. Несколько меньшие значения до 24 и 25 кН наблюдаются на колесах тяговых модулей и головного тягача.

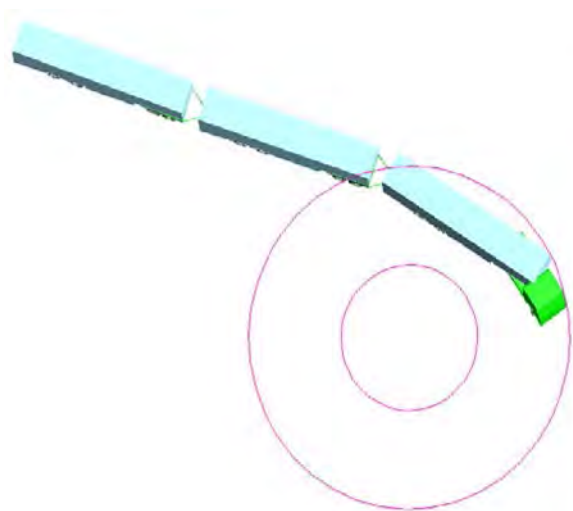


Рис. 6. Оценка маневренности многозвенного автопоезда

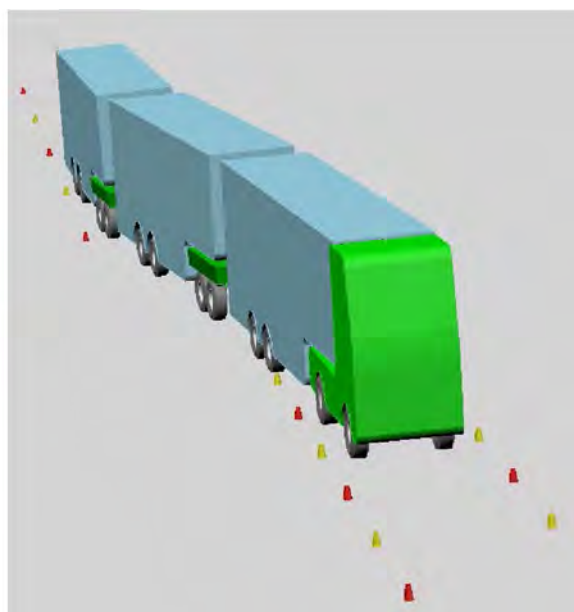


Рис. 7. Оценка маневра «переставка»

Разные значения боковых сил на колесах левого и правого бортов многозвенного автопоезда возникают еще и в связи с перераспределением масс при движении по криволинейной траектории. Это становится наиболее заметным при увеличении скорости движения, в частности, при выполнении маневра «переставка».



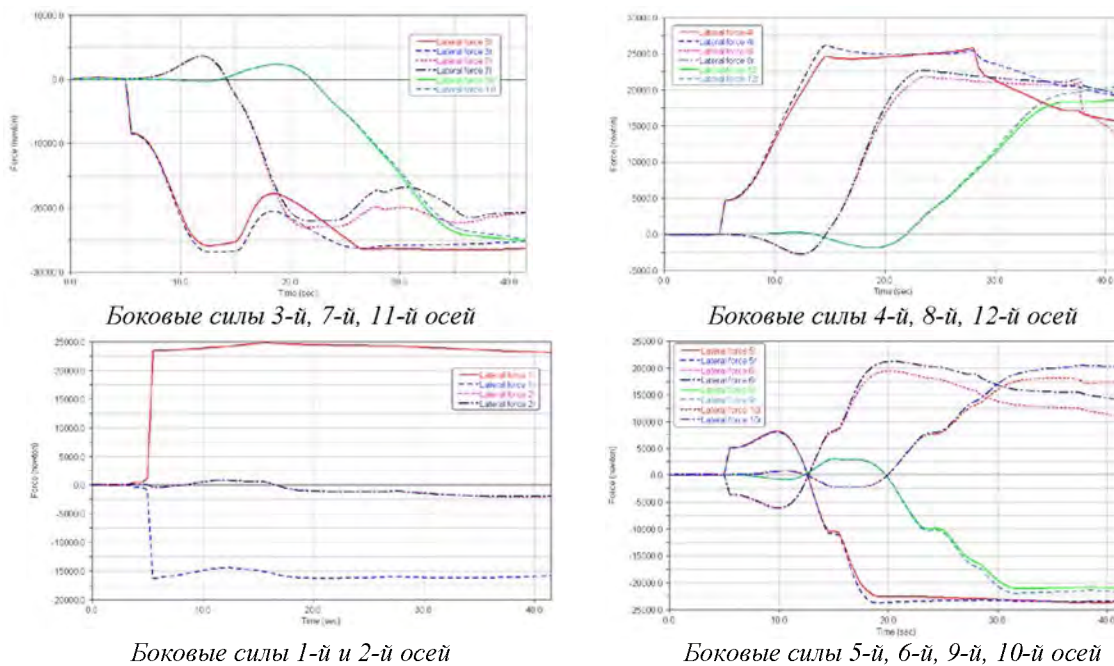


Рис. 8. Изменение боковых сил на колесах многозвенного автопоезда при исследовании маневренности

Моделирование маневра «переставка» (рис. 7) осуществляется в соответствии с разметкой, указанной на рис. 2в, и выполнение маневра начинается при пересечении передними колесами автопоезда границы между участками 1 и 2 размеченного коридора. Наличие управляемых колес только на тягаче головного звена приводит к тому, что второе и третье звенья автопоезда пересекают слева разметку на участке 1, а после прохождения головным звеном участка 2 размеченного коридора второе и третье звенья автопоезда пересекают справа разметку на участке 3 (рис. 9). Вместе с тем автопоезд остается устойчивым вплоть до скорости 50 км/ч. Повышение границы устойчивости возможно при управлении значениями нормальных реакций колес. Анализ их динамики на пройденном пути показывает (рис. 10), что нагрузка на наружные колеса вначале маневра резко уменьшается, а при выходе на участок 3 еще более резко увеличивается и достигает почти до 6 т.

Пересечение участка 1 разметки можно объяснить наличием больших углов увода, вызванных перераспределением нормальных реакций колес. Динамика изменения углов увода, как следует из рис. 10, указывает на необходимость предъявления более жестких требований к управлению подвеской многозвенного автопоезда.

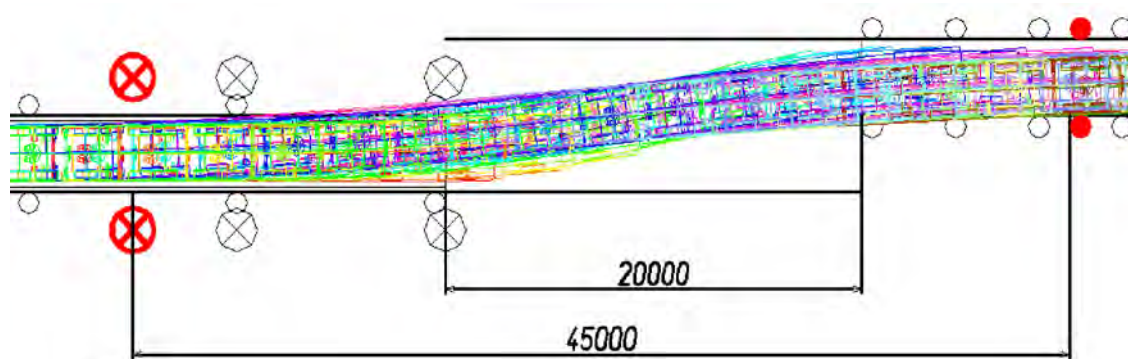
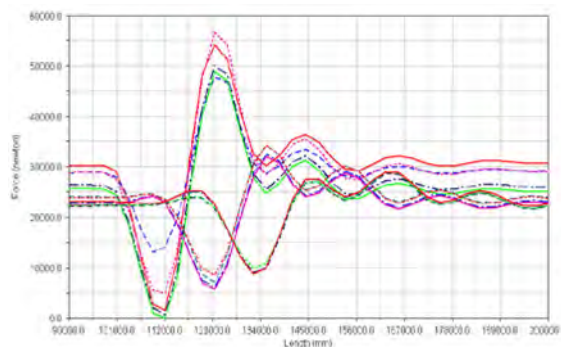
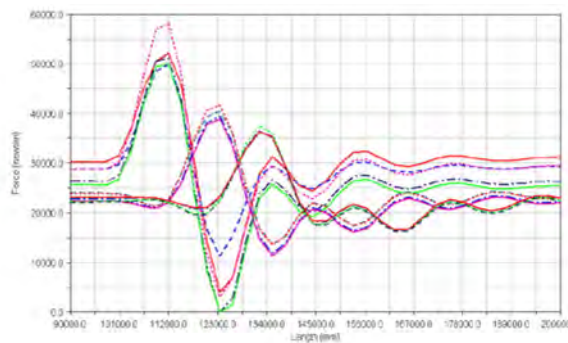


Рис. 9. Изменение траектории движения многозвенного автопоезда при выполнении маневра «ПЕРЕСТАВКА» на предельной скорости

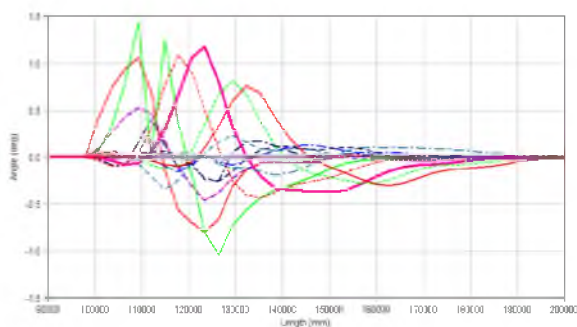
Результаты дальнейшего моделирования позволяют отметить, что оснащение тяговых тележек многозвенного автопоезда управляемыми колесами дает возможность выполнить маневр «переставка» без пересечения участка 1 на скорости 52 км/ч. Оснащение управляемыми колесами грузовых модулей позволяет существенно уменьшить влияние боковых сил на маневренность и осуществить разворот автопоезда на 180° без пересечения границ окружностей радиусами 12,5 и 5,3 м.



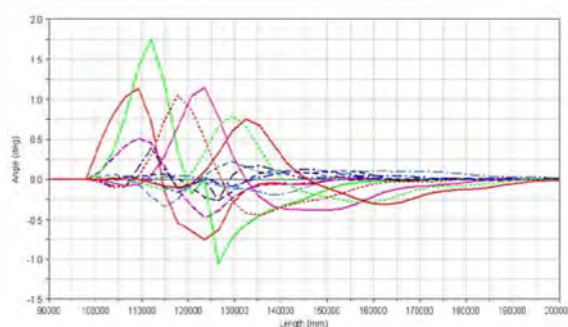
Вертикальные реакции колес левого борта



Вертикальные реакции колес правого борта



Углы увода колес левого борта



Углы увода колес правого борта

Рис. 10. Изменение вертикальных реакций и углов увода на колесах многозвенного автопоезда при выполнении маневра «ПЕРЕСТАВКА» на предельной скорости 49,8 км/ч в среде MSC.ADAMS

Экспериментальные исследования, проверка адекватности и уточнение компьютерной модели автопоезда в MSC.ADAMS

Для подтверждения адекватности созданных компьютерных моделей в условиях испытательного полигона были проведены предварительные экспериментальные исследования многозвенного автопоезда. Это дало возможность не только уточнить теоретический метод и компьютерные модели, но и на основании изучения динамики автопоезда дать рекомендации по улучшению и оптимизации его конструкции.

Экспериментальное исследование параметров криволинейного движения многозвенного автопоезда было выполнено в 2009 году на Республиканском полигоне для испытания автотракторной техники в Минске (Беларусь). Для исследования был взят экспериментальный образец многозвенного автопоезда в составе тягача МАЗ-544019, двух подкатных тележек МАЗ-84200 и трех полуприцепов МАЗ-931010 производства Минского автомобильного завода (рис. 11).



Испытание «поворот $R_n = 35$ м»



Экспериментальные исследования маневренности



Испытание «переставка»

Рис. 11. Экспериментальные исследования многозвенного автопоезда

В ходе движения по окружности радиусом 50 м и более установлено, что все звенья многозвенного автопоезда повторяют траекторию, задаваемую движением головного звена. При этом не установлено «сползания» второго и третьего звеньев к центру окружности.

При проведении экспериментальных исследований маневренности было установлено, что однозвенный автопоезд вписывается в коридор, задаваемый окружностями радиусами 12,5 и 5,3 м. Второе и третье звенья автопоезда начинают пересекать внутреннюю окружность радиусом 5,3 м уже при прохождении $\frac{1}{4}$ окружности. При этом величина «сползания» внутренних колес передних осей грузовых модулей второго и третьего звеньев составила соответственно 0,55 и 0,9 м. При развороте автопоезда на 360° происходит более интенсивное «сползание» второго и третьего звеньев к центру поворота. Величина «сползания» к центру поворота внутреннего колеса передней оси грузового модуля второго звена при повороте автопоезда по окружности диаметром 25 м на 360° составила 1,24 м. При этом расчет показывает, что эта величина не превышает 0,74 м. Корректировка характеристик увода и сцепления шины с дорогой позволяет скоррелировать расчетную оценку с экспериментальными данными.

Выполнение маневра «переставка» показало устойчивое без отрыва колес движение многозвенного автопоезда в снаряженном состоянии на различных скоростях вплоть до максимально заданной 85 км/ч. Устойчивое движение в снаряженном состоянии автопоезд показал и при движении одновременно по двум окружностям одинаковых радиусов диаметром 40 м.

Заключение

Эксплуатация многозвенных автопоездов связана с движением по траекториям различной кривизны и конфигурации. К новым типам движения магистрального грузового автомобильного транспорта следует отнести движение одновременно по окружностям разных радиусов; движение многозвенного автопоезда по сложной траектории, характеризующейся наличием одновременно нескольких радиусов; образование фигур типа «треугольник» в местах погрузки и разгрузки транспортно-логистических терминалов.

Разработана компьютерная модель многозвенного автопоезда для оценки динамики криволинейного движения. Представленные результаты моделирования типовых маневров согласуются с данными экспериментов, проведенных на Республиканском автополигоне. Отличие расчетных и экспериментальных данных не превышает 10%.

Для обеспечения требуемых характеристик необходимо применение на многозвенных автопоездах перспективных механизмов и электронных систем, действие которых направлено на поддержание заданной траектории движения. В частности, требуется использование передних управляемых колес в тяговых тележках и полуприцепах, электронной системы рулевого управления автопоездом, интеллектуального сцепного устройства.

Наименее предпочтительным при движении на малых радиусах является автопоезд с грузовыми модулями без управляемых колес. Экспериментальные данные и компьютерное моделирование указывают на довольно стремительное «сползание» второго и третьего звеньев к центру поворота при развороте автопоезда на 360° .

Результаты экспериментальных исследований указывают также на необходимость уточнения и корректировки исходных данных в математических моделях бокового увода колес. Так, в ходе эксперимента установлено, что величина «сползания» к центру поворота внутреннего колеса передней оси грузового модуля второго звена при повороте автопоезда по окружности диаметром 25 м на 360° составила 1,24 м. При этом расчет показывает, что эта величина не превысит 0,74 м. Уточнение коэффициента бокового увода в сторону увеличения на 30% позволяет добиться совпадения данного параметра в расчете и в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высоцкий М.С., Кочетов С.И., Пожиток В.Н., Харитончик С.В. Реализация принципов модульности для перспективных магистральных автопоездов. *Механика машин, механизмов и материалов*, №3, 2008, с. 5–8.
2. Vysotski M., Kalesnikovich A., Kharytonchik S., Kochetov S., Pozhitok V. Preliminary optimization of general-arrangement decisions of multilink trucks for virtual design. FISITA 2008 World Automotive Congress, September 14 to 19, 2006, Munich, Germany. F2008-04-29.
3. СТБ ГОСТ Р 52302-2006. Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытаний.
4. ГОСТ Р 52302-2004. Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытаний.
5. Литвинов А.С., Фаробин Я.Е. Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств. – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
6. Masato A. *Vehicle Handling Dynamics. Theory and Application*, Elsevier 2009, ISBN-13:978-1-8561-7749-8.

СИНТЕЗ ПОДХОДОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КАБИН ГРУЗОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

Харитончик С.В.

В условиях современного рынка продукция грузового автомобилестроения должна быть привлекательна для потребителя по целому ряду свойств. Каждый потребитель желает, чтобы приобретенные им автомобили имели яркие отличительные по отношению к конкурентам стилевые решения, подчеркивающие имидж компании. Ключевую роль здесь играет кабина автотранспортного средства. Поэтому очень важно ее выделение среди конкурирующих образцов при помощи средств дизайна, наделение характерными признаками, запоминающимися чертами, выгодно отличающимися от других машин.

Вместе с тем потребителю важно не только стилевое совершенство кабины, но и влияние внешних форм на аэродинамику всего автомобиля, а также на безопасность водителя и пассажиров. Решение таких разных задач в отрыве друг от друга позволяет достичь максимума показателей какого-либо одного свойства, но одновременно может ухудшить показатели других свойств. В частности, задача совершенствования аэродинамики непосредственно влияет на экономическую эффективность грузового автомобиля или автопоезда.

Большая площадь фронтальной проекции и прямоугольная плохо обтекаемая форма кузова автотранспортных средств способствуют возникновению значительного аэродинамического сопротивления (*критерии аэродинамики*) [1]. Данный факт особенно важен, если учесть, что современная перевозка грузов связана с большими скоростями, влияющими на рост сопротивления. Кроме того, аэродинамика АТС тесно связана с дизайном кабины.

Обеспечение требуемой прочности (*критерии прочности*) кабины осуществляется главным образом за счет ее силового каркаса и наружных штампованных облицовочных панелей. Однако, в связи с высокой стоимостью штампов, не всегда имеется возможность обновления внешнего вида кабины отвечающего современным требованиям технической эстетики, предъявляемым к изделиям данного класса. Кроме того, существует необходимость создания семейства кабин (вагонной, полуприцепной, капотной компоновки; с бытовым модулем и без бытового модуля) для различных условий и регионов эксплуатации автопоездов.

В связи с изложенным необходима разработка подходов к созданию перспективных грузовых автомобилей и автопоездов, в которых будут в совокупности решены вопросы создания кабин на основе совместной оптимизации стилевых, аэродинамических и прочностных свойств. Решение данной задачи, относящейся к различным областям механики, позволит в рамках заданного ограниченного пространства найти способы повышения экономичности и эффективности автотранспортных средств.

Рассмотрим особенности обеспечения указанных выше свойств.

Исходными данными для разработки внешнего строения АТС являются техническое задание, задающее основные параметры АТС, и компоновочный чертеж со схематически изображенными основными узлами и агрегатами (рис. 1). Базируясь на этих документах, дизайнеры выполняют поисковые эскизы экстерьера кабины, принимая во внимание вопросы аэродинамики, эргономики рабочего места и зоны отдыха водителя и пассажира (рис. 2).

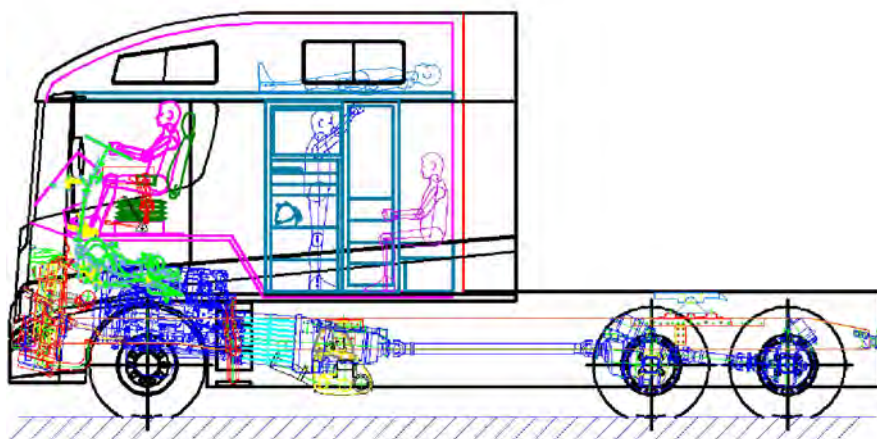


Рис. 1. Компоновочный чертеж со схематически изображенными основными узлами и агрегатами



Рис. 2. Поисковый эскиз экстерьера автопоезда

При разработке дизайна АТС необходимо опираться на следующие критерии эстетических свойств создаваемого объекта:

- информативность (наглядное выражение назначения изделия; образность формы);
- целостность композиции (выразительность объемно-пространственной структуры; тектоничность, соразмерность, колорит);
- стилевая выразительность (соответствие современным стилевым тенденциям; соответствие стилевому ансамблю среды);
- социально-утилитарная ценность (общественная оправданность; функциональное соответствие);
- экономическая эффективность (трудоемкость; материалоемкость);
- производственно-техническая ценность (технологичность; прогрессивность конструкций и материалов);
- отделка и товарный вид (качество наружной и внутренней отделки; выразительность фирменных знаков).

Итогом этапа дизайна становится уточненная трехмерная компоновка кабины. Она является основой для проведения виртуальных испытаний на прочность и аэродинамику. При необходимости осуществляется корректировка конструкции (компоновки) кабины с повторным проведением виртуальных испытаний.

Среди всех свойств кабины безопасность следует отнести к разряду наиболее важных, поскольку непосредственно связана с сохранением жизни водителя и пассажиров. Поэтому безопасность кабины в первую очередь определяется ее прочностью, а прочность кабины рассматривается как способность при авариях сохранять жизненное пространство, т.е. остаточное пространство внутри кабины, достаточное для выживания находящихся там людей.

Безопасность кабины регламентирована международными правилами ЕЭК ООН № 29, определяющими три вида испытаний: испытание кабины на удар спереди; испытание на прочность крыши кабины; испытание на прочность задней стенки кабины. После каждого из этих испытаний в кабине грузового транспортного средства должно сохраниться жизненное пространство, в котором может поместиться на сиденье манекен 75-процентильной репрезентативности, не приходя в соприкосновение с жестко закрепленными частями кабины.

Следует отметить, что стоимость и трудоемкость натурных испытаний высока, а при повреждении АТС его необходимо изготавливать заново после доработки конструкции для повторных испытаний. Современные компьютерные технологии позволяют эффективно проводить *виртуальные испытания* кабин. Их особенностью является возможность детального изучения взаимодействия всех систем и механизмов, т.е. комплексное исследование объекта. Таким образом, в процессе проведения виртуальных испытаний исследуется поведение различных частей и АТС в целом при имитации реальных нагрузок в рабочем режиме, что позволяет выбрать основные параметры АТС уже на начальных стадиях проектирования.

Для проведения виртуальных испытаний кабин АТС наилучшим образом подходят численные конечно-элементные методы динамического моделирования, реализуемые, например, в программных пакетах LS-DYNA, MSC.Marc и ANSYS. Они позволяют создавать модели поведения материалов в области упруго-пластической деформации и проводить анализ процесса испытаний во времени.

В качестве исходных данных используется трехмерная геометрическая модель кабины. Для проведения виртуального моделирования кабины на основе ее трехмерной модели средствами пакета формируется конечно-элементная модель. Конструкция кабины содержит оболочку кабины, усилители, предназначенные для повышения прочности, и подвеску (рис. 3). В соответствии с Правилами при всех видах испытаний моделируется крепление кабины к неподвижной раме автомобиля через подвеску кабины (рис. 4).

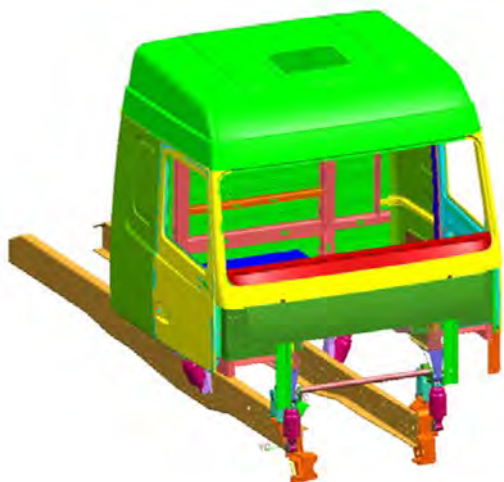


Рис. 3. Геометрическая модель кабины

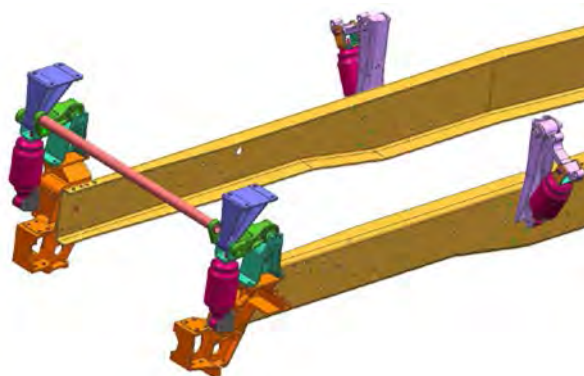


Рис. 4. Геометрическая модель подвески кабины

Для оболочки кабины можно использовать изотропную билинейную упруго-пластичную модель материала. Она с достаточной точностью описывает деформации, возникающие при испытаниях на безопасность.

В качестве ударной нагрузки для модели кабины моделируется цилиндрический маятник, выполненный из объемных конечных элементов. В ходе виртуальных испытаний маятник движется к фронтальной части кабины со скоростью 8,9 м/с. После соприкосновения с облицовкой кабины он деформирует ее, подвеску и детали кабины. Процесс соударения маятника с кабиной и ее деформация происходят достаточно быстро. Например, их длительность в ходе виртуального испытания кабины МАЗ-6430 составила 0,242 с (рис. 5). При этом в процессе испытаний происходит потеря маятником кинетической энергии от заданной изначально 40 кДж, из которых почти 16 кДж поглощается элементами кабины (рис. 6).

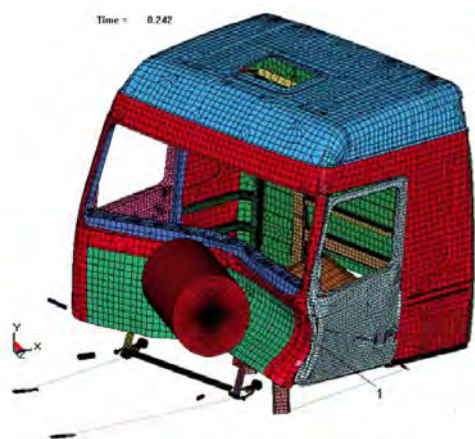


Рис. 5. Результаты виртуального испытания на удар кабины спереди

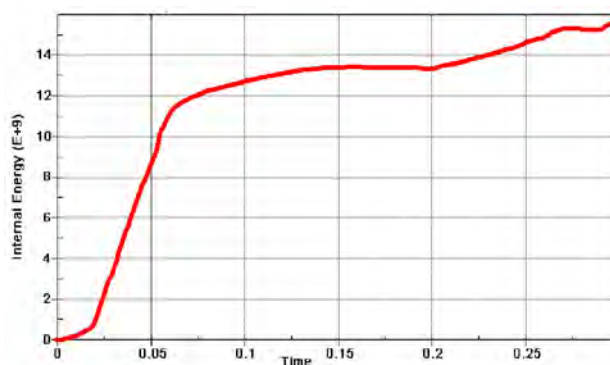


Рис. 6. График поглощения моделью кабины энергии при ее испытании на удар спереди

Продольный размер внутреннего пространства кабины в ее нижней части на стороне водителя до испытаний был равен 1,963 м, а по окончании – 1,653 м, т.е. 84,2% от начального размера или уменьшился на 0,31 м. Следует отметить, что размеры жизненного пространства кабины по высоте и ширине не изменились. Наиболее нагруженные места в кабине находятся в зоне левых нижних усилителей кабины. Область с наиболее сильной пластической деформацией для кабины находится в зоне левой двери.

Установлено, что для кабины МАЗ-6430 максимальное значение эффективного напряжения $8,6 \cdot 10^8$ Па получил элемент, находящийся на левом нижнем усилителе. Рассмотрение результатов моделирования по максимальному главному напряжению показало, что его наибольшее значение $9,1 \cdot 10^8$ Па также относится к левому нижнему усилителю. Места наиболее вероятного разрушения в кабине располагаются в зонах с наибольшими деформациями.

Анализ результатов приведенного виртуального краш-теста показывает, что создание пусть и унифицированных цельнометаллических кабин является не самым лучшим решением их конструктивного исполнения. В частности, внесение любых изменений и дополнений в конструкцию кабины непосредственно сказывается на ее прочности и соответствии Правилам ЕЭК ООН №29. Это указывает на то, что целесообразно пересмотреть подходы к их конструктивному исполнению.

Более прогрессивным на этом фоне выглядит использование каркасно-панельных конструкций. Данный подход позволяет отработать каркас кабины на соответствие Правилам, обеспечив безопасность и минимизировав при этом его массу. В дальнейшем на каркас крепятся облицовочные панели, создающие выбранное стилевое решение и обеспечивающие заданные аэродинамические характеристики.

Кроме того, установка наружной и внутренней облицовки позитивно скажется на улучшении прочности всей конструкции кабины. При этом, принимая во внимание перспективы использования композитных, стеклопластиковых и других материалов, изготовление из них облицовок не приведет к существенному увеличению общей массы кабины. Благодаря данному подходу производители смогут удешевить стоимость кабины и предложить покупателю выбор большого разнообразия вариантов дизайна экстерьера грузового автомобиля.

Результаты исследований **аэродинамического сопротивления** автопоездов различных конструктивно-компоновочных схем свидетельствуют, что среднее значение коэффициента сопротивления всех составляющих (величины расстояния между задней стенкой кабины и передней стенкой полуприцепа, длины кабины, угла бокового обтекания воздушного потока и др.) для автомобилей с кабиной над двигателем на 8% выше, чем для автомобилей с расположением кабины за двигателем. Более благоприятные характеристики у последних за счет ступенчатости формы, обеспечивает более плавное обтекание потоком воздуха. Тем не менее, наибольшее распространение получила компоновка с кабиной над двигателем в силу компактности всего автопоезда.

Данное обстоятельство указывает на зависимость значения коэффициента лобового сопротивления от геометрии лобовой поверхности этого объема и дизайна формы. Весьма существенное влияние на величину коэффициента лобового сопротивления оказывает величина пространства между задней стенкой кабины и передней плоскостью полуприцепа. Коэффициент лобового сопротивления уменьшается в значительной степени с уменьшением этого расстояния. Однако исключение этого пространства является наиболее сложной задачей в достижении высоких аэродинамических качеств седельного автопоезда, т.к. минимальные размеры этого пространства определены нормативными документами. Наиболее перспективным альтернативным решением явилось бы исключение этого «свободного» пространства в пользу аэродинамических характеристик и грузоподъемности автопоездов.

Второй составляющей проблемы «свободного» пространства в обеспечении высоких аэродинамических характеристик являются «сопрягающие» размеры и форма полуприцепа. Высокие аэродинамические характеристики, достигнутые в форме тягача не могут быть реализованы при агрегатировании его с полуприцепами различных видов и формы. Оптимальное решение возможно только при разработке формы полуприцепа в тесной взаимосвязи по всем параметрам с формой тягача, как единой композиционно-пластической структуры.

При движении АТС в окружающей воздушной среде происходит сжатие набегающего потока воздуха в передней части автопоезда. В результате здесь создается область повышенного давления. Под его влиянием струйки воздуха устремляются к задней части автопоезда. Скользя по его поверхности, они обтекают контур транспортного средства. Однако в некоторый момент начинает проявляться явление отрыва элементарных струек от обтекаемой ими поверхности и образования в этих местах завихрений. В задней части автопоезда воздушный поток окончательно срывается с кузова АТС. Это способствует образованию здесь области пониженного давления, куда постоянно осуществляется подсос воздуха из окружающего воздушного пространства. За счет различия давлений воздуха впереди и сзади автопоезда создается сила лобового сопротивления. Чем позже происходит срыв воздушного потока с обтекаемой поверхности и соответственно меньше область пониженного давления, тем меньшей будет и сила лобового сопротивления.

Оседание грязи на поверхности автопоезда следует рассматривать с учетом двух аспектов. Во-первых, загрязнение фар, сигнальных фонарей, а также стекол в значительной степени отражается на безопасности. Вторым аспектом данной про-

блемы является эстетика. Загрязнение больших площадей боковых поверхностей автопоезда, особенно в зонах входа в кабину и дверных ручек, снижает его потребительские качества.

В последние десятилетия в связи с мощным развитием компьютерной техники и компьютерных технологий существенно расширились возможности численного расчета и анализа прикладных задач отрывных течений. Для этих целей можно воспользоваться пакетами программ типа Fluent. Для повышения точности моделирования сетка на поверхности автопоезда выполняется более мелкой с использованием квадратных и треугольных ячеек. В остальной части расчетной области могут применяться сетки с тетрагексагональными и гибридными ячейками.

Исследование аэродинамики автопоезда возможно производить посредством моделирования турбулентного обтекания с помощью уравнений неразрывности и Рейнольдса [2, 3]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

где $\overline{u'_i u'_j}$ – Рейнольдсовы напряжения, которые замыкаются на основе гипотезы Буссинеска [3, 4]. Для замыкания использовалась SST- $k-\omega$ модель Ментера [3, 4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tilde{P}_k - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \omega) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\alpha}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + (1 - F_1) 2 \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Здесь член генерации энергии турбулентности определен, как $\tilde{P}_k = \min(P_k, 10\beta^* \omega k)$,

где P_k задается выражением $P_k = \left[\nu_t \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Функция смешения F_1 вычисляется, как $F_1 = \tanh(\arg_1^4)$, где справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \arg_1 &= \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right], \\ CD_{k\omega} &= \max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-10} \right). \end{aligned}$$

Турбулентная вязкость вычисляется, как

$$\nu_t = \min \left(\frac{k}{\omega}, \frac{a_1 k}{|S_{ij}| F_2} \right),$$

где $|S_{ij}| = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}}$ – модуль тензора скоростей деформации, константа $a_1 = 0.31$, а

вторая функция смешения $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$ при $\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right)$. Константы

модели $\sigma_{k1} = 1.176$, $\sigma_{\omega 1} = 2.0$, $\alpha_1 = 0.5532$, $\beta_1 = 0.075$, $\sigma_{k2} = 1.0$, $\sigma_{\omega 2} = 1.168$, $k = 0.41$, $\alpha_2 = 0.4403$, $\beta_2 = 0.0828$, $\beta^* = 0.09$.

Размеры расчетной области принимаются в зависимости от геометрических размеров исследуемого объекта. Для реализации условий движения автопоезда в неограниченном пространстве внешние границы расчетной области выбираются достаточно далеко от зон возмущения потока. В остальной части расчетной области реко-

мендуется использование сетки с тетрагексагональными и гибридными ячейками. Общая мощность сетки порядка нескольких миллионов ячеек позволяет, с одной стороны, провести моделирование на современном компьютере за приемлемое время, а с другой – повторить геометрию реального автопоезда в необходимых деталях, достаточных для адекватного натурным испытаниям моделирования с учетом вращения колес и движения дороги относительно автопоезда.

В качестве примера рассмотрим результаты моделирования движения автопоезда на скорости 80 км/ч. При иных скоростях картина обтекания будет аналогична, за исключением величины исследуемых характеристик (давления, скорости, турбулентной вязкости).

На рис. 7 приведено распределение продольной компоненты скорости в вертикальной срединной плоскости, где отчетливо выделяются зоны торможения потока на лобовых поверхностях кабины, а также кузова автомобиля и прицепа. Здесь значения продольной компоненты скорости уменьшаются, а давление возрастает. Отрыв потока на крыше кабины происходит достаточно гладко, форма пограничного слоя монотонно растущая, без завихрений и обратных потоков, интенсивного вихреобразования не наблюдается.

В пространстве между кабиной и кузовом грузового автомобиля вихреобразование практически отсутствует, а вихревая зона организуется внизу между кабиной и кузовом грузового автомобиля. Основные проблемные зоны вихреобразования на поверхности кабины на боковой ее поверхности снизу на уровне ступенек и сверху на уровне верхнего края лобового стекла. На крыше кабины имеется система относительно мелкомасштабных катящихся вихрей.

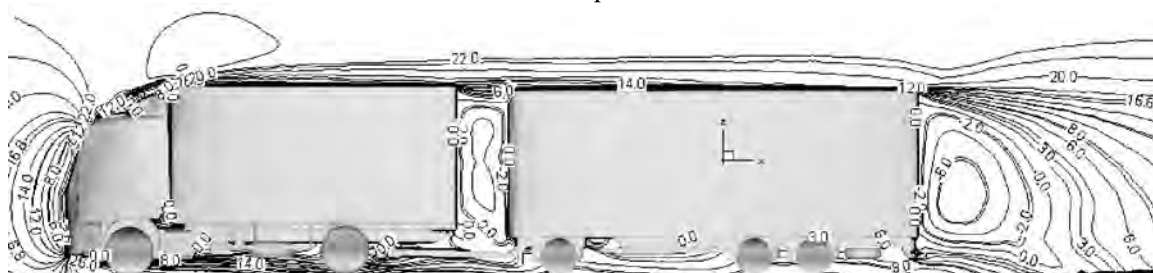


Рис. 7. Распределение продольной скорости в вертикальной срединной плоскости при движении автопоезда со скоростью 80 км/ч

Проведенное численное моделирование аэродинамики автопоезда по достаточно подробной геометрической модели с учетом рельефа днища, вращения колес и движения дороги относительно автопоезда позволило выявить основные проблемные зоны вихреобразования – на боковой поверхности кабины снизу на уровне ступенек и сверху на уровне верхнего края лобового стекла, в кормовой части прицепа и в зазоре между кузовом автомобиля и прицепа. Данный факт отражается в значениях коэффициентов давления и общего аэродинамического сопротивления. Для режимов движения при различных скоростях до 90 км/ч коэффициент общего аэродинамического сопротивления незначительно отличается от коэффициента сопротивления давления и обусловлен сопротивлением формы. Рассчитанная величина коэффициента общего аэродинамического сопротивления в диапазоне скоростей 30–90 км/ч практически постоянна и составляет 0,76.

Полученные данные могут быть использованы при проведении работ по аэродинамической оптимизации не только конструкции автопоезда в целом, но и внешних аэродинамических устройств в отдельности. Прежде всего, это относится к кабине прицепного автопоезда и зазорам между элементами автопоезда. Улучшение обтекания элементов кабины (зеркала, ступени, обтекатель и т. д.) также является

очень важным элементом оптимизации, поскольку четверть общего сопротивления прицепного автопоезда составляет сопротивление кабины [1, 4, 5].

С учетом рассмотренных особенностей обеспечения стилевых, прочностных и аэродинамических свойств следует отметить, что при создании современного АТС крайне важен синтез параметров конструкции экстерьера по комплексу критериев, в первую очередь определяющих прочностные, аэродинамические и эстетические свойства изделия. Для реализации названного подхода необходимо выработать алгоритм с параллельной структурой проектирования кабин перспективных транспортных средств, который отразит взаимосвязь и приоритетность используемых критериев этих свойств для достижения наилучшего результата (рис. 8).

Источником для разработки технических предложений (позиция 1) являются требования к дизайну автопоезда, параметрам безопасности и аэродинамики. По нашему мнению целесообразно, чтобы коэффициент аэродинамического сопротивления не превышал заданной величины, поскольку любое его увеличение сразу приводит к росту расхода топлива и снижению экономической эффективности перевозки грузов. Данное требование отражено в блоке 7.

В отношении безопасности кабин следует сказать, что в отличие от аэродинамического сопротивления, уменьшение которого только приветствуется, прочность кабины нельзя уменьшать, но одновременно и нельзя увеличивать (позиция 8), поскольку ее увеличение ведет к перерасходу материала и удорожанию кабины.

Как следует из рис. 8, на основании технического предложения осуществляется параллельная разработка дизайна кабины (блок 2) и ее каркаса (блок 3). Данные, полученные в ходе выполнения работ блока 3, являются основой для создания 3D-моделей оболочки кабины. Итогом завершения поиска стилевых решений кабины и конструктивных решений для ее каркаса является проведение их виртуальных испытаний с анализом показателей аэродинамики и прочности (блоки 5 и 6). Полученные результаты могут не устроить разработчиков и потребуют, например, для дизайна не только доработки внешних форм, но и уточнения конструкции каркаса. По этой причине блоки 7 и 8 имеют по два выхода в случае получения решения с неудачным комплексом конструктивных параметров.

Если же полученное решение по совокупности стилевых, аэродинамических и прочностных характеристик устраивает разработчиков, следует переходить к разработке технического задания и конструкции кабины (блоки 9 и 10). Вместе с тем, данные стадии работ могут повлиять на изменение дизайна автопоезда. В этом случае потребуются вернуться к уточнению стилевых решений (блок 11).

После отработки конструкции кабины и решения вопросов дизайна (блоки 10 и 11), следует повторить комплекс виртуальных испытаний с учетом реальных конструктивных особенностей (блоки 12...15). Только после их успешного завершения следует переходить к изготовлению опытного образца и физическим испытаниям кабины для подтверждения всех ее заданных характеристик.

Данный подход позволит повысить качество проектирования, сократить их сроки, а также средства на доводку конструкции кабин перспективных автомобилей.

Таким образом, для сокращения сроков и финансовых затрат на разработку перспективных автотранспортных средств целесообразно использовать методы компьютерного проектирования и виртуальных испытаний разрабатываемой конструкции кабин с учетом критериев дизайна, аэродинамики и прочности.

Одним из перспективных подходов при создании кабин с применением компьютерного проектирования является использование каркасно-панельных конструкций. При этом прочность кабины будет обеспечиваться за счет каркаса, а применение облицовочных панелей позволит создать современный дизайн и оптимизировать аэродинамические характеристики автопоезда. Данный подход позволяет осуще-

свить технически обоснованный выбор геометрических форм и параметров кабин, а также материалов их исполнения на основе удовлетворения комплекса требований по эстетике, аэродинамике и действующих норм по безопасности.

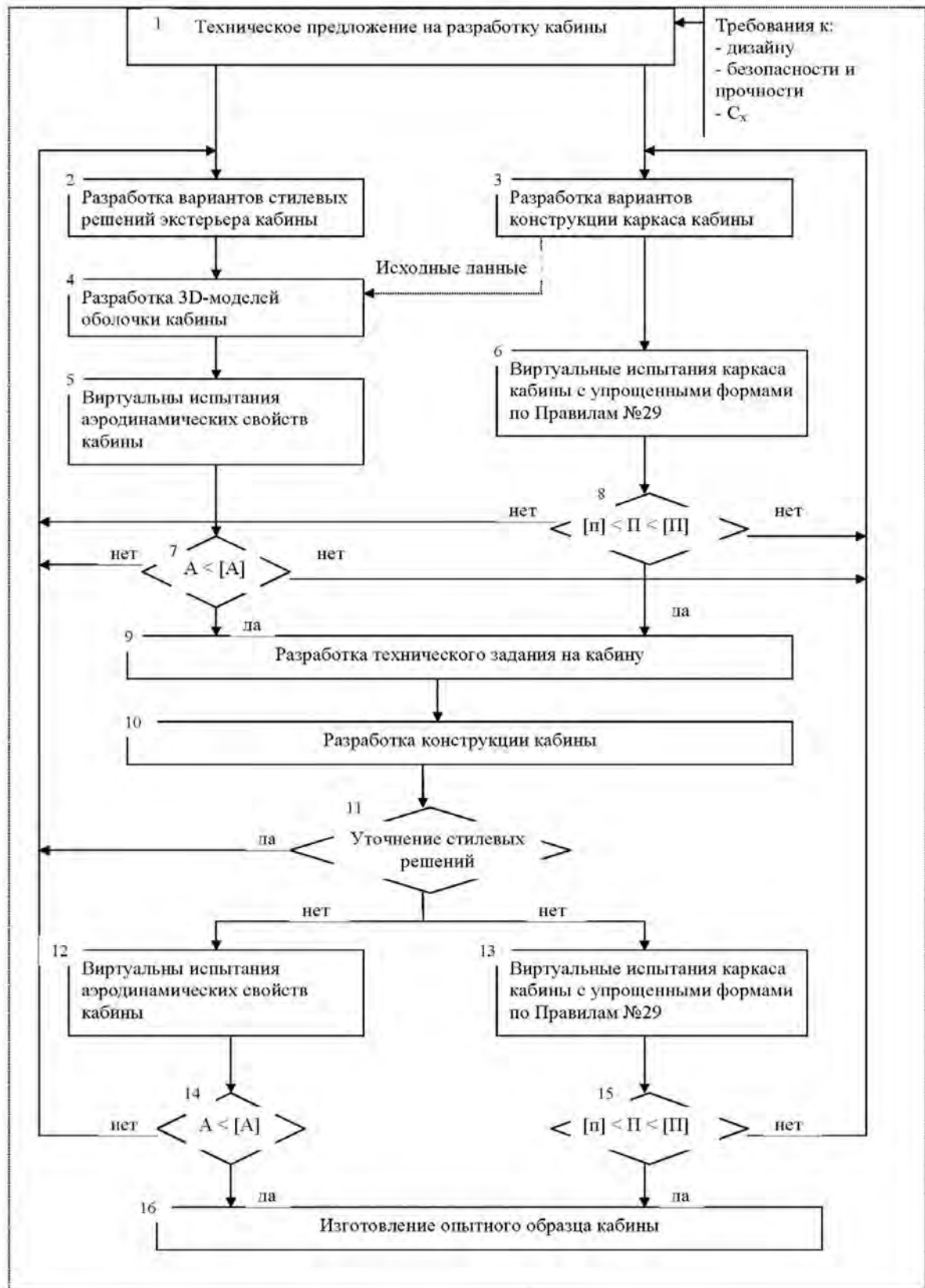


Рис. 8. Алгоритм проектирования кабин

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов А.Н., Высоцкий М.С. Аэродинамика колесного транспорта / А.Н. Евграфов, М.С. Высоцкий // Минск: НИРУП "Белавтотракторостроение", 2001. – 368 с.
2. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений / И.А. Белов, С.А. Исаев // СПб: Балтийский Государственный технический университет, 2001. – 108 с.
3. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев // СПб.: Судостроение, 2005. – 392 с.
4. Wood R., Bauer S. Simple and low-cost aerodynamic drag reduction devices for tractor-trailer trucks / R. Wood, S. Bauer // SAE International Report. – 2003. – No. 01-3377. – 18 p.
5. Kopp S. The aerodynamic development of the new MAN trucks TGX & TGS / S. Kopp // MAN Nutzfahrzeuge AG Report. – 2008. – No. F2008-04-001. – 7 p.

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ ДИСКОВ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

The numerical method of calculation of rational profiles of the reinforced twirled disks in view of the phenomenon of creeping in them is developed. As criteria of rational designing are used a condition equal-stress reinforcements and a condition equal-strength bonding agent leafs of a disk. Metal-composite disks results of calculations are discussed with use of both criteria of rational designing at flat and space reinforcement. It is shown, that at equal carrying capacity such disks can have weight essentially smaller, than the reinforced disks of constant thickness, or much greater carrying capacity at equality of their weights.

Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных авторами в [1], где изучалась проблема оптимального и рационального профилирования вращающихся армированных дисков газовых турбин на базе критериев кратковременной прочности фазовых материалов с целью минимизации их (дисков) массы. Однако на практике диски газовых турбин эксплуатируются в условиях длительного нагружения (требуемый ресурс работы таких элементов конструкции имеет порядок 10^5 часов [2]) при повышенных температурах, поэтому в них могут активно развиваться деформации ползучести. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос о рациональном профилировании металлокомпозитных дисков (которые в последнее время находят все более широкое применение на практике) с учетом развития деформаций ползучести в них.

Рассмотрим диск симметричной относительно срединной плоскости структуры, имеющий переменную толщину $H(r)$ и армированный N семействами волокон, причем армирование может осуществляться в плоскостях, параллельных срединной плоскости – плоское армирование (рис. 1, а в [1]), или по поверхностям, расстояние между которыми изменяется пропорционально изменению $H(r)$ – пространственное армирование (рис. 1, б в [1]). Исследуется лишь случай осесимметричного растяжения диска при постоянной угловой скорости, так как это главный этап расчета вращающегося диска на прочность [3, 4]. Диск подчиняется обычным упрощающим гипотезам [3, 4].

В силу известного формального сходства определяющих уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения [5]) и деформационной теории пластичности [3], частным случаем которой является теория упругости, для решения задачи рационального профилирования армированных дисков, работающих в условиях установившейся ползучести фазовых материалов, можно воспользоваться алгоритмами, разработанными в [1], модифицировав их применительно к использованию метода секущего модуля, с помощью которого приближенно решаются задачи как в рамках деформационной теории пластичности [3], так и в рамках теории течения установившейся ползучести [5]. При этом в [1] нужно принять коэффициент Пуассона связующего ν равным 0,5, коэффициенты линейного теплового расширения α, α_k фазовых материалов – равными нулю, а под E, E_k следует понимать секущие модули связующего и арматуры k -го семейства. Кроме того, под ϵ_{ij} в [1] нужно понимать не деформации, а скорости деформаций установившейся ползучести.

Для получения практически приемлемого решения рационального профилирования композитных дисков на напряженное или деформированное состояние в фазах композиции нужно наложить определенные ограничения. В условиях ползучести для

дисков газовых турбин в качестве такого ограничения выступает предельно допустимое значение скорости деформации ползучести $\dot{\epsilon}_{\max}$ [2]:

$$|\dot{\epsilon}| \leq \dot{\epsilon}_{\max} = 10^{-9} \text{ 1/ч.} \quad (1)$$

На основании известных для фазовых материалов законов установившейся ползучести можно определить и соответствующие $\dot{\epsilon}_{\max}$ предельные значения напряжений σ_c в фазах композиции диска.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из диска, ограниченного контурами радиусов $r_0 = 0,05$ м, $r_1 = 0,1975$ м, и лопаток длиной $l = 0,114$ м [6]. Диск изготовлен из алюминиевого сплава Д16Т и армирован стальной проволокой У8А. В условиях установившейся ползучести поведение этих материалов удовлетворительно описывается степенным законом

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^m, \quad (2)$$

а их физико-механические характеристики при температуре $T \approx 200$ °С приведены в табл. 1. (Значения σ_c в табл. 1 получены на основании законов установившейся ползучести (2) с учетом значения $\dot{\epsilon}_{\max}$ из (1).) Лопатки изготовлены из сплава Д16Т и продольно армированы борными волокнами ($\rho_* = 2500$ кг/м³ [8]) с плотностью $\omega_* = 0,6$.

Таблица 1.
Физико-механические характеристики фазовых материалов диска [2, 7, 8]

Материал	m	$B, (\text{МПа})^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}$	$\sigma_c, \text{МПа}$	$\rho, \text{кг/м}^3$
Сплав Д16Т	6,0	$3,5 \cdot 10^{-15}$	8,116	2800
Проволока У8А	24,982	$1,054 \cdot 10^{-84}$	1003	7800

На рис. 1, 2 изображены профили дисков, изготовленных из указанной композиции при разных структурах армирования и разных критериях рационального проектирования.

Ломанные l на этих рисунках изображают профили, соответствующие эталонным дискам. Под эталонными в настоящей работе понимаются диски с теми же характерными параметрами армирования, что и профилированные диски, но имеющие постоянную толщину $H = h_* = \text{const}$ (здесь h_* – толщина лопатки). Следовательно, в эталонных дисках не выполняются условия рационального проектирования, а их несущая способность определяется методами, аналогичными тем, что использованы в [9], но с учетом указанного выше изоморфизма между определяющими уравнениями деформационной теории пластичности и теории течения установившейся ползучести и с применением метода секущего модуля.

Оба рисунка соответствуют дискам, полотно которых армировано в радиальном направлении, но структура армирования профилированных дисков при этом может быть плоской или пространственной.

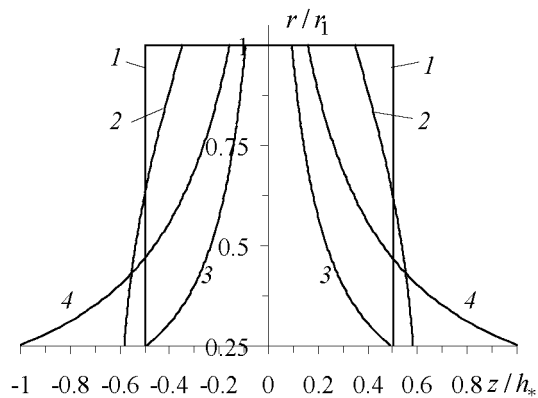


Рис. 1. Рациональные профили металлокомпозитных дисков при радиальном равнонапряженном армировании

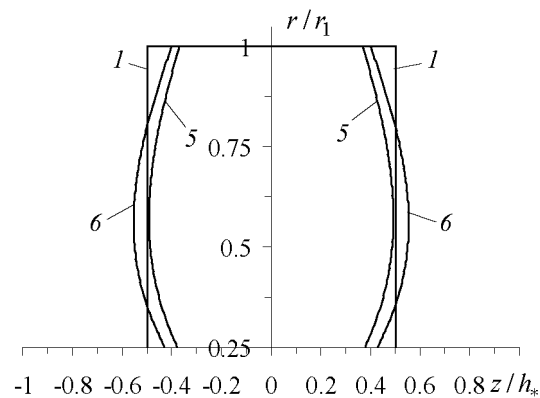


Рис. 2. Рациональные профили металлокомпозитных дисков при радиальном армировании и равнопрочном связующем

На рис. 1 изображены профили дисков, радиально армированных равнонапряженными волокнами, причем плотность армирования на внутреннем контуре $\omega_{01} = 0,7$. Методом, аналогичным изложенному в [9], было установлено, что при этом значении ω_{01} несущая способность эталонного диска определяется величиной $n = 9505,93$ об/мин (при этом во внутренней точке $r = 0,589r_1$ полотно диска интенсивность скоростей деформаций ползучести в связующем $\dot{\epsilon}_i$ достигает предельного значения $\dot{\epsilon}_{\max}$ из (1), а интенсивность напряжений в связующем – предельного значения σ_c для сплава Д16Т, см. табл. 1).

Кривые 2 на рис. 1 задают рациональный профиль диска при плоском (см. рис. 1, а в [1]), а кривые 3 – при пространственном (см. рис. 1, б в [1]) армировании. Массы этих дисков, отнесенные к массе эталона, приведены в табл. 2, из которой следует, что использование плоского равнонапряженного армирования позволяет уменьшить массу диска всего на 5,6 %, а пространственного равнонапряженного армирования – на 47,1 % при $n = 9505,93$ об/мин. При этом напряжение в арматуре $\sigma_a = 0,5705\sigma_{ca}$ (здесь σ_{ca} – предельно допустимое напряжение σ_c для армирующей проволоки У8А, см. табл. 1), а интенсивность скоростей деформаций установившейся ползучести в связующем $\dot{\epsilon}_i$ достигает предельно допустимого значения (1) на внешнем контуре ($r = r_1$).

Таблица 2.

Относительная масса M рационально профилированных дисков

Характеристика решения	Номер профиля диска на рис. 1, 2					
	1	2	3	4	5	6
M	1,0	0,9441	0,5288	0,9984	0,8968	1,0003

За счет рационального профилирования полотна диска можно повысить его несущую способность по сравнению с эталонным диском. Так, при пространственном армировании за счет увеличения массы рационально профилированного диска его несущую способность можно увеличить до $n = 12300$ об/мин. Профиль такого диска изображен на рис. 1 кривыми 4, а его масса примерно равна массе эталонного диска (см. табл. 2).

Так как напряжения в равнонапряженных волокнах постоянны и равны $\sigma_a = 0,5705\sigma_{ca}$, т.е. несущая способность волокон используется всего на 57,05 %, а интенсивность скоростей деформаций ползучести в связующем $\dot{\epsilon}_i$ достигает предельно допустимого значения (1) только на внешнем контуре, то возникает вопрос: нельзя ли за счет требования «равнодеформируемости» связующего

$$\dot{\epsilon}_i(r) = \dot{\epsilon}_{\max} = \text{const}, \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad (3)$$

улучшить характеристики диска по сравнению со случаем равнонапряженного армирования?

Действительно, из (2) следует, что при выполнении условия (3) интенсивность напряжений в связующем σ_i будет постоянна, причем $\sigma_i(r) = \sigma_c = \text{const}$, где σ_c – предельно допустимое напряжение в связующем (см. табл. 1 для материала Д16Т), а значит, при выполнении равенства (3) в связующем реализуется условие равнопрочности. В силу этого при условии (3) несущая способность связующего используется более полно, чем ранее при $\sigma_a = \text{const}$, и кроме того, в случае (3) напряжения в арматуре на внутреннем контуре будут больше, чем в случае условия равнонапряженности волокон $\sigma_a = \text{const}$. Следовательно, несущая способность волокон, по крайней мере в некоторой окрестности внутреннего контура $r = r_0$, при $\sigma_i(r) = \sigma_c = \text{const}$ будет использоваться более полно, чем при условии $\sigma_a = 0,5705\sigma_{ca} = \text{const}$.

Кривые 5 на рис. 2 определяют рациональный профиль диска при плоском радиальном армировании полотна в случае использования критерия (3) при $\omega_{01} = 0,7$ и $n = 9505,93$ об/мин. Относительная масса m такого диска приведена в табл. 2, из которой следует, что использование плоского армирования позволяет уменьшить массу диска на 10,32 %. Сравнение масс дисков, соответствующих профилям 4 на рис. 2 и 2 на рис. 1, показывает, что, как и предполагалось, критерий рационального проектирования (3) приводит к более эффективному проекту по сравнению с условием равнонапряженности арматуры $\sigma_a = \text{const}$. При этом максимальное значение напряжения в арматуре достигается на внутреннем контуре: $\sigma_a(r_0) = 0,8968\sigma_{ca}$, а $\sigma_i(r) = \sigma_c = \text{const}$, т.е. несущая способность фазовых материалов используется более полно, чем ранее при $\sigma_a(r) = 0,5705\sigma_{ca} = \text{const}$. (При использовании критерия (3) в случае пространственного армирования разработанный итерационный процесс решения рассматриваемой задачи для исследуемой композиции расходится, поэтому пока не удалось получить соответствующий рациональный профиль диска.)

Как и в случае использования критерия равнонапряженного армирования, за счет рационального профилирования диска с равнопрочным связующим можно повысить его несущую способность по сравнению с эталонным диском. Так, при плоском армировании за счет увеличения массы рационально профилированного диска его несущую способность в случае использования критерия (3) можно увеличить до $n = 9920$ об/мин. Профиль такого диска изображен на рис. 2 кривыми 6, а его масса равна массе эталонного диска (см. табл. 2). Напомним, что при использовании критерия равнонапряженности арматуры в случае пространственного армирования удалось получить $\max n = 12300$ об/мин при массе профилированного диска, равной массе эталонного (см. профиль 4 на рис. 1).

Поведение кривых 5, 6 на рис. 2 показывает, что при использовании критерия рационального проектирования (3) для рассматриваемой Д16Т–У8А-композиции получаем необычные бочкообразные профили полотна диска. Такие «экзотические» профили порождаются условием (3) и неоднородностью композитного материала

диска. Действительно, согласно формуле (5) из [1], плотность армирования ω_1 при плоской радиальной структуре армирования полотна диска определяется равенством $\omega_1(r) = r_0 \omega_{01} / r$, $r_0 \leq r \leq r_1$. Следовательно, структура армирования по радиусу r неоднородна, а значит, и композитный материал полотна диска в целом неоднороден. Такая неоднородность и приводит к возможности появления профилей, качественно отличных от традиционно используемых профилей дисков [3, 4], выполненных из однородных конструкционных сталей. (Традиционно используемые профили, как правило, качественно похожи на профили 3, 4 на рис. 1.)

Для других композиций рациональные профили, полученные при использовании критерия (3), могут получиться подобными профилям 3, 4 на рис. 1, т.е. качественно подобными традиционным профилям дисков.

Кроме радиальных структур армирования авторами были исследованы и случаи радиально-окружного армирования полотна диска с равнонапряженной арматурой радиального семейства и при использовании критерия (3). В этих случаях также удалось получить определенный эффект снижения массы рационально профилированных дисков, но величина этого эффекта все же значительно меньше, чем в случае профиля 3 на рис. 1. Так, для диска с плоским радиально-окружным армированием при условии равнонапряженности волокон радиального семейства получили снижение массы полотна диска на 31,6 %. (Соответствующий рациональный проект не изображен.)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (08-01-00046-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное профилирование армированных вращающихся дисков // Механика композитных материалов. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 3 – 24.
2. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И.И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
4. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
5. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. III. – М.: Гос. н. изд-во машиностроит. лит., 1959. – 1120 с.
7. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб // Проблемы прочности. – 2005. – № 5. – С. 30 – 44.
8. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
9. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О влиянии структуры армирования на несущую способность термоупругих металлокерамических вращающихся дисков // Проблемы прочности. – 2001. – № 4. – С. 5 – 24.

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЯЗКОСТИ СЕТЧАТЫХ
ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ**

Немцов В.Б.

In this paper the statistical theory of viscosity for network polymer systems is represented.

В работе рассматривается полимерная сетчатая структура, представляющая совокупность сегментов, соединяющих узлы сетки. Узлы сетки образуются благодаря поперечным химическим связям (сшивкам) между длинными цепными молекулами. В случае плотных полимерных систем, состоящих из длинных цепных молекул, узлы возникают также за счет зацеплений молекул при их перепутывании [1,2].

Сегмент содержит N мономеров длиной l_0 . Сетка находится в растворителе и представляет собой разряженный гель.

Сдвиговая вязкость определяется через временную корреляционную функцию (ВКФ) микротензора напряжений $\hat{\sigma}_{12}$ [3,4].

$$s = (\beta/v) \langle (\hat{\sigma}_{12}(t) \hat{\sigma}_{12}(0)) \rangle, \quad (1)$$

v – объем системы, $\beta = (kT)^{-1}$

Для преодоления трудностей вычисления s необходимо использовать разумную модель $\hat{\sigma}_{12}$ и ВКФ.

В работе используется модель для $\hat{\sigma}_{ij}$ предложенная М. Дои и С. Эдвардсом [1].

$$\hat{\sigma}_{ij} = K \sum x_i x_j; \quad K = \frac{3kT}{l_0^2 N} \quad (2)$$

x_i – компоненты вектора связи, направленного вдоль мономера длиной l_0 . Используем далее разложение в Фурье вектора связи $\gamma(x_i)$. Коэффициенты ряда определяются как

$$x_i(p) = \frac{1}{N} \int_0^N ds x_i(s) \cos \frac{\pi p s}{N}. \quad (3)$$

Тогда тензор сдвиговых напряжений определяется соотношением [1,2].

$$\hat{\sigma}_{12} = K \sum_p \frac{2\pi^2 p^2}{N} x_1(p) x_2(p). \quad (4)$$

причем моды $x_i(p)$ независимы.

Введем нормированную ВКФ тензора напряжений

$$c(t) = s(t) / s(0). \quad (5)$$

Комплексная ВКФ имеет вид

$$c(\omega) = \int_0^\infty c(t) \exp(-i\omega t) dt = c''(\omega) - ic'(\omega). \quad (6)$$

Коэффициент сдвиговой вязкости определяется как

$$\eta(\omega) = s(0) c''(\omega), \quad (\omega - \text{частота}). \quad (7)$$

Для вычисления используем уравнение Цванцига-Мори

$$dc(t)dt = - \int_0^t M(t-\tau) c(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$M(t)$ – функция памяти.

Для решения (8) используем преобразование Фурье-Лапласа

$$c(z) = \int_0^{\infty} c(t)e^{zt} dt, \quad z = \omega - i\varepsilon. \quad (9)$$

В итоге получим

$$c(z) = \frac{1}{cz + M(z)}, \quad (10)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $z = \omega - i\varepsilon$, находим

$$c(\omega) = \frac{1}{i\omega + M(\omega)}; \quad M(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\omega - i\varepsilon), \quad (11)$$

$$M(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} M(t) dt = M''(\omega) - iM'(\omega) \quad (12)$$

и тогда

$$c''(\omega) = \frac{M''(\omega)}{(M''(\omega))^2 + (\omega - M'(\omega))^2}. \quad (13)$$

В дальнейшем используем следующую модель функции памяти [6,7]:

$$M(t) = a \operatorname{sech} bt. \quad (14)$$

Параметры a и b находятся из асимптотического выражения для $s(t)$ в случае малых времен.

Из (14) следуют формулы

$$M''(\omega) = \frac{\pi a}{2b} \operatorname{sech} \frac{\pi \omega}{2b}, \quad (15)$$

$$M'(\omega) = -\frac{ia}{2b} \left[\Psi \left(\frac{1}{4} + \frac{i\omega}{4b} \right) - \Psi \left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{4b} \right) \right] - \frac{\pi a}{2b} \tanh \frac{\pi \omega}{2b}, \quad (16)$$

Ψ называется Ψ -функцией Эйлера.

В результате зависящий от частоты ω коэффициент сдвиговой вязкости определяется как

$$\eta(\omega = s(0)\tau \operatorname{sech} \frac{\pi \omega}{2b}) / \left[\left(\operatorname{sech} \frac{\pi \omega}{2b} \right)^2 + \xi^2(\omega) \right], \quad (17)$$

где

$$\tau = \frac{2b}{\pi a}. \quad (18)$$

При $\omega = 0$, $\eta = s(0)\tau$, $s(0)$ – модуль сдвига, τ – время корреляции тензора $\hat{\sigma}_{12}$.

Для расчета a и b используем асимптотическое выражение (при $t \rightarrow 0$)

$$s(t) = s(0) - \frac{t^2}{21} s_2 + \frac{t^4}{41} s_4. \quad (19)$$

Здесь

$$G = s(0) = \frac{\beta}{\nu} \langle \hat{\sigma}_{12}(0) \hat{\sigma}_{12}(0) \rangle - \text{модуль сдвига}, \quad (20)$$

$$s_2 = \frac{\beta}{\nu} \langle \dot{\hat{\sigma}}_{12}(0) \dot{\hat{\sigma}}_{12}(0) \rangle, \quad s_4 = \frac{\beta}{\nu} \langle \ddot{\hat{\sigma}}_{12}(0) \ddot{\hat{\sigma}}_{12}(0) \rangle. \quad (21)$$

Расчет s_0 , s_2 и s_4 аналогичен вычислениям, приведенным в статье [5] с учетом замены $K = \frac{3kT}{I_0^2}$ на $K = \frac{3kT}{I_0^2 N}$.

При вычислении средних значений s_2 и s_4 осуществлялось равновесное усреднение относительных скоростей по распределению Максвелла $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = \frac{kT}{M}$.

Параметры a и b равны

$$a = s_2 / s_0; \quad b = \sqrt{s_4 / s_2 - \frac{s_2}{s_0}}, \quad (22)$$

Вычисляя $s(0)$, s_2 и s_4 с помощью (4), получим

$$s(0) = \rho kT, \quad s_2 = \frac{6\rho\pi^2 p^2 (kT)}{N^3 M_0^2}, \quad s_4 = \frac{6\rho(kT)^2 \pi^2 p^2 \xi^2}{N^3 I_0^3 M^3}. \quad (23)$$

В формулах (23) M – приведенная масса двух бусинок на концах мономера, ρ – плотность числа молекул, ξ – коэффициент трансляционного трения мономера о растворитель. В b учитывается, что члены, содержащие ξ значительно больше членов без ξ .

В итоге после суммирования по числу мод получим

$$\tau_p = \frac{2b}{\pi a} = \frac{2\xi N^3 M_0^2}{6Mp^2\pi^2(kT)}, \quad \tau = \sum \tau_p, \quad \sum \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \tau = \frac{\xi I_0^2 N^3}{24\pi(kT)}. \quad (24)$$

Затем используется выражение для коэффициента трения ξ , предложенное Зиммом [1]. Это выражение учитывает гидродинамическое взаимодействие между молекулами,

$$\xi = \frac{3}{8} \cdot (6\pi^3)^{1/2} \eta_s I_0 \sqrt{N}; \quad \tau = \frac{\sqrt{6\pi^{1/2}} \eta_s I_0^3 N^{7/2}}{64kT}, \quad (25)$$

где η_s – вязкость растворителя.

Таким образом, время корреляции τ и, следовательно, коэффициент вязкости пропорционален числу мономеров в сегменте в степени $7/2$,

$$\tau \propto N^{7/2}, \quad \eta \propto N^{7/2}.$$

Этот результат существенен, так как $7/2$ близко к экспериментальному значению 3,4. Роль числа мономеров в сегменте иллюстрируется следующими числовыми оценками:

$$1. \text{ При } l_0 = 3 \text{ \AA}, \quad N = 100, \quad kT = 4 \cdot 10^{-21}, \quad N^{7/2} = 10^7,$$

$$\eta_s = 10^{-3} \text{ Пас}, \quad \tau = 4,576 \cdot 10^{-6} \text{ с}, \quad \eta = 0,4576.$$

Модуль сдвига $G = 10^5$ Пас.

$$2. \text{ При } l = 3 \text{ \AA}, \quad N = 10^4, \quad N^{7/2} = 10^{14} \quad \tau = 45,76 \text{ с}, \quad \eta = 4,576 \cdot 10^5 \text{ Пас}.$$

Важным результатом является кубическая зависимость вязкости от длины мономера.

Рассмотрим расчет коэффициента вязкости при растяжении образца (коэффициента продольной вязкости). Так как эластомеры можно считать практически несжимаемыми, то напряжения при растяжении определяются разностью

$$\sigma = \sigma_{11} - \sigma_{33}. \quad (26)$$

Напряжения σ_{11} и σ_{33} выражаются временными корреляционными функциями микроскопического тензора натяжений.

Тогда

$$\sigma = 2 \int_0^t dt' G(t-t') (e_{11}(t') - e_{33}(t')) dt', \quad (27)$$

где G – ВКФ касательных микроскопических напряжений $\hat{\sigma}_{12}$, которая рассчитывалась выше.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (28)$$

где e_{ij} – тензор скоростей деформаций.

Его можно выразить через тензор кратности удлинений λ_{ij} с помощью формулы [8–10]

$$e_{ij} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j} \frac{d\gamma_{kl}}{dt}, \quad \gamma_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m}{\partial a_k} \frac{\partial x_m}{\partial a_l} \right). \quad (29)$$

Здесь x_i – эйлеровы координаты, а a_i – лагранжевы координаты. Учтем, что

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial a_i}, \quad \lambda_{ij}^{-1} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \quad (30)$$

где λ_{ij} – тензор кратности удлинений материальных волокон, λ_{ij}^{-1} – обратный ему тензор. В результате можно получить соотношение

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\lambda}_{il} \lambda_{lj}^{-1} + \dot{\lambda}_{jk} \lambda_{ki}^{-1}). \quad (31)$$

Точка означает дифференцирование по времени. В случае одноосного растяжения $\lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ и с учетом несжимаемости среды справедливы равенства $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ [9].

Тогда

$$e_{11} = \dot{\lambda} / \lambda, \quad e_{33} = -\frac{1}{2} \dot{\lambda} / \lambda, \quad e_{11} - e_{33} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}, \quad (32)$$

где $\dot{\epsilon}$ – скорость деформации растяжения.

На основании (27) и (32) получим материальное уравнение для растягиваемого образца

$$\sigma = \int_{-\infty}^t 3G(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (33)$$

или

$$\sigma = \int_{-\infty}^t E(t-t') \dot{\epsilon}(t') dt', \quad E = 3G, \quad (34)$$

где E – релаксационный модуль Юнга.

В случае медленной изменяемости $\dot{\epsilon}(t)$ на молекулярных масштабах, $\dot{\epsilon}(t')$ можно вынести за знак интеграла. Тогда

$$\sigma = \eta_l \dot{\epsilon}, \quad \eta_l = \int_0^{\infty} E(t') dt = 3 \int_0^{\infty} G(t) dt. \quad (35)$$

Здесь η_l вязкость при растяжении, она выражается через сдвиговую вязкость, которая рассчитывалась выше

$$\eta_l = 3\eta. \quad (36)$$

Диспергирующие по частоте ω вязкости связаны соотношением

$$\eta_l(\omega) = 3\eta(\omega). \quad (37)$$

Отметим, что, если в качестве тензора γ_{kl} воспользоваться средним значением микроскопического выражения для тензора $\hat{\gamma}_{kl}$ [10] представляется возможным учесть в явном виде зависимость вязкости η_l от степени ориентационной упорядоченности нематического эластомера.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Дой, С. Эдвардс. Динамическая теория полимеров. М., Мир, 1998, 434 с. Theory of Polymer dynamics. Clarendon Press-Oxford, 1986.
2. M. Warner and E.M. Terentjev. Liquid Crystal Elastomers. Clarendon Press-Oxford, 2006, 408.
3. Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Репке. Статистическая механика неравновесных процессов. Москва, Физматлит, 2002, т.1, 432 с, т.2.
4. В.Б. Немцов Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком «Тэхналогія», Минск, 1997, 280 с.
5. V.B. Nemtsov. Viscosity of the dilute solution of flexible polymer molecules. Теоретическая и прикладная механика, вып. 24. Минск 2009, БНТУ, стр. 206–210.
6. Tankeshkar, K. Longitudinal and bulk viscosities of Lennard-Jones fluids / K. Tankeshkar, K.N Pathak, S. J. Ranganathan // J. Phys.: Condensed Matter. – Vol. 8. – 1996. – P. 10847–10861.
7. Nemtsov V.B. Breathing Sphere Model for Description of the Vibration Energy Transfer in a Viscoelastic Medium / V.B. Nemtsov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – Vol. 8. – 2005. – P. 134–147.
8. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.:Машиностроение 1986–336 с.
9. Хазанович Т.Н. Статистический вывод уравнений вязко-эластичности каучукоподобных полимеров при однородных конечных деформациях. Механика полимеров, «Зинатне» Рига 1969, т. 6, с. 980–986.
10. Бленд Д. Нелинейная теория упругости, М, Мир, 1972,–184 с.
11. Немцов В.Б. Упругость нематических эластомеров. Теоретическая и прикладная механика, вып. 22, Минск 2007, с. 11–17.

ОБ ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БАРАБАННОЙ ПЕРЕПОНКЕ

Михасев Г.И., Квятковская Т.М.

The problem on calculation of the strain-stress state of the human tympanic membrane is considered. The tympanic membrane is assumed to be an elastic isotropic shallow conical shell that is conjoined with the malleus along the asymptotic line. The semi-moment equations of the thin shell theory are assumed as governing for the tympanic membrane. The boundary conditions at the shell edges as well as along the malleus are derived.

Для правильного понимания функционирования среднего уха, как механической колебательной системы, представляется важной задача об исследовании каждого составляющего элемента данной системы. Главным звеном в среднем ухе является барабанная перепонка (иначе, тимпанальная мембрана), которая, принимая внешний звуковой сигнал, приводит в движение цепь слуховых косточек. Динамические характеристики барабанной перепонки сильно зависят от степени ее натяжения, вызванного действием барабанной мышцы «*musculus tensor tympani*».

Целью настоящей работы является построение математической модели системы «барабанная перепонка – молоточек» с целью оценки напряжений в перепонке при заданном перемещении молоточка (рис.1).

Форма барабанной перепонки близка к конической, втянутой внутрь с углом конусности близким к $\pi/2$. По своим геометрическим и механическим характеристикам барабанная перепонка делится на две части – *pars flaccida* (мембрана Шрапнеля) и *pars tensa* (рис. 1). Натяжение перепонки является неравномерным: нижняя ее часть *pars tensa* натянута, в то время как верхняя *pars flaccida* ненатянута. Х. Вульштейн [1] считает, что *pars flaccida* не следует рассматривать как часть трансформатора звука. В свою очередь натяжение *pars tensa* также является неравномерным, что обусловлено направлением действия барабанной мышцы, вызывающей перемещение рукоятки молоточка.

Живая ткань *pars tensa* барабанной перепонки имеет сложную структуру и состоит из четырех слоев, из которых, в частности, два внутренних слоя представляют собой радиальные и нерадиальные волокна.

Для построения модели введем ряд упрощающих предположений:

- 1) Барабанная перепонка есть тонкая пологая круговая усеченная коническая оболочка с радиусом R в основании конуса и углом конусности γ , близким к $\pi/2$ (см. рис. 2 и 3).

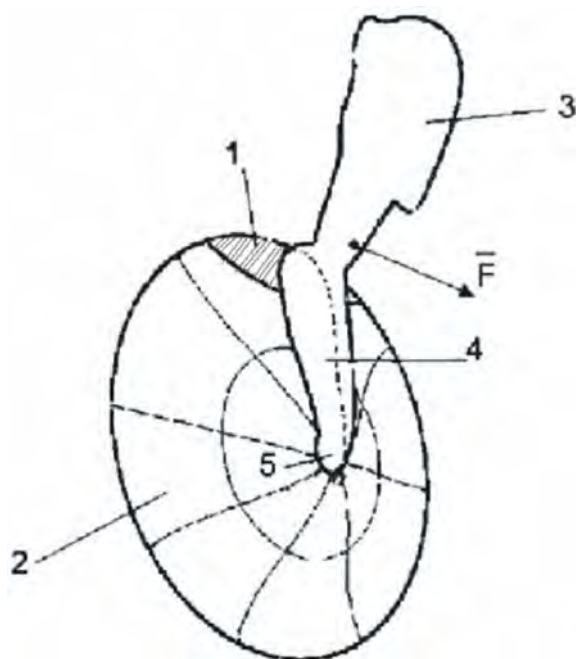


Рис.1 Система «барабанная перепонка - молоточек»: 1- *pars flaccida*; 2- *pars tensa*; 3-молоточек; 4-рукоятка молоточка «*malleus manubrium*»; 5 – *umbo*. F -сила, моделирующая действие барабанной мышцы.

- 2) Следуя работам [2, 3], считаем, что часть pars tensa обладают свойством изотропии с усредненным модулем упругости $E = 3.3 \times 10^7 \text{ Н/м}^2$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.4$.

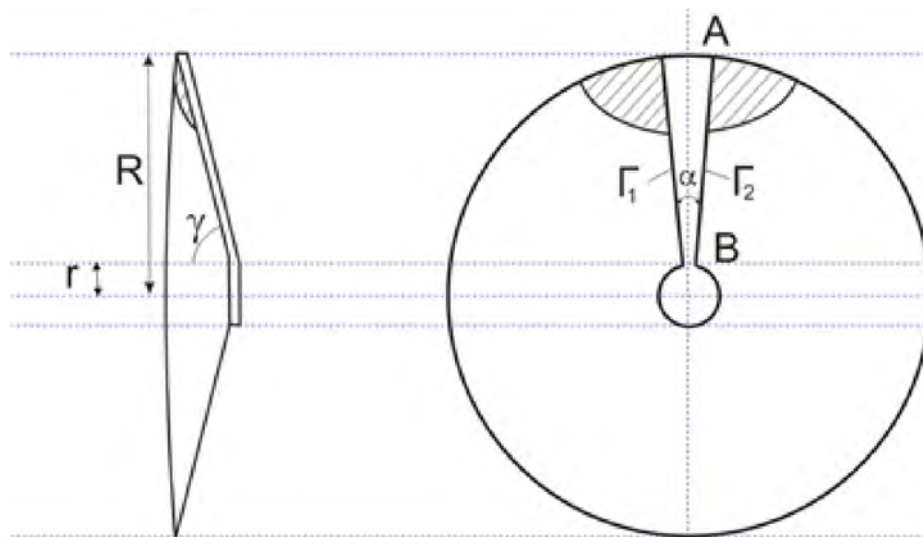


Рис.2. Поперечное сечение, а также вид сверху моделируемой системы «барабанная перепонка - молоточек»

- 3) Рукоятку молоточка рассматриваем как недеформируемый стержень переменного сечения, жестко сопряженный с конической поверхностью оболочки по асимптотическим линиям; нижнюю часть рукоятки в области Umbo заменяем на недеформируемое цилиндрическое твердое тело с радиусом r в основании, которое жестко связано со стержнем и поверхностью конуса (см. рис. 2).

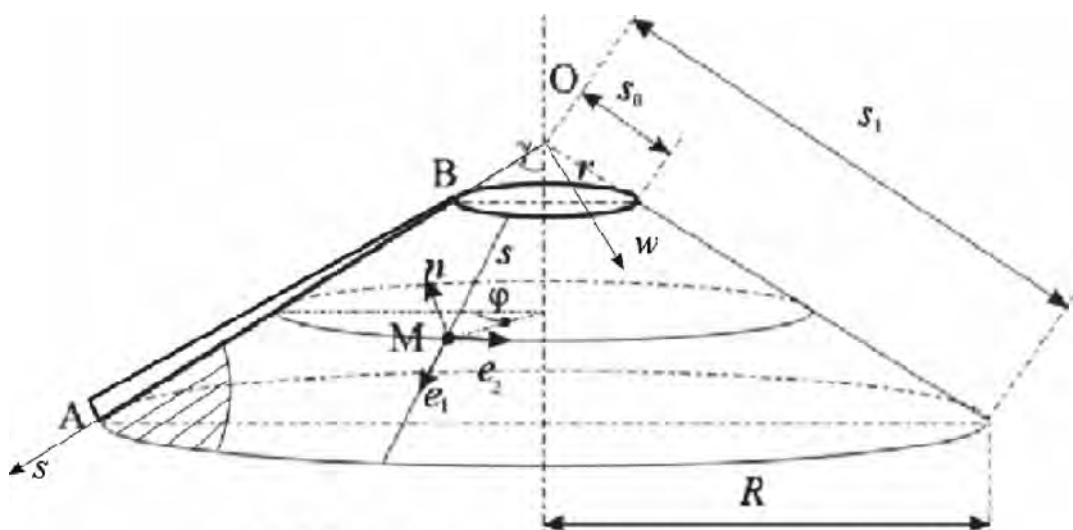


Рис. 3. Геометрическая модель барабанной перепонки в виде пологой конической оболочки

- 4) Действие барабанной мышцы заменяется силой, которая обуславливает перемещение молоточка.
 5) На нижнем крае конуса (т.е. на тимпанальном кольце) части pars tensa рассматриваем условия жесткого или упругого защемления оболочки [2].

б) Учитывая отсутствие сил натяжения в части *pars flaccida* и принимая во внимание относительную подвижность молоточка в его основании, будем считать, что нижний край конической оболочки части *pars flaccida* является свободным.

Последнее предположение является важным в предлагаемой модели, ибо оно учитывает возможность перемещения молоточка как абсолютно твердого тела под действием барабанной мышцы.

Введем на срединной поверхности конической оболочки криволинейную систему координат s, φ , где s – расстояние, отсчитываемое от вершины конуса до точки M , а φ – окружная координата, как показано на рис. 3. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$ – орты введенной криволинейной системы, где \bar{n} – внешняя нормаль к поверхности конуса. Под действием силы, приложенной к молоточку, его рукоятка совершает некоторое перемещение. Пусть в принятой системе координат нормальная составляющая перемещения средней линии AB стержня (т.е. проекция перемещения на направление нормали \bar{n}) равна

$$w_{AB} = ks + d, \quad (1)$$

где k и d – некоторые константы. Данное перемещение, а также разность внешнего атмосферного давления и давления в полости среднего уха ($q^* \approx 20$ Па), вызовут деформирование упругой оболочки, моделирующей барабанную перепонку. Изучим напряженное состояние оболочки, которое будет смешанным и состоять из мембранных и изгибных усилий, имеющих один порядок. Для его описания может быть использована система уравнений технической теории тонких оболочек [4]:

$$\begin{aligned} -D\Delta^2 w + [k/(Rs) + \kappa_2]T_2 + \kappa_1 T_1 + 2\tau S + q^* &= 0, \\ (Eh)^{-1} \Delta^2 \Phi + k(Rs)^{-1} \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 - \tau^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, который в принятой криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta w = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial w}{\partial s} \right). \quad (3)$$

В (2) введены следующие обозначения: $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость оболочки, h – ее толщина, ν – коэффициент Пуассона, w, κ_i, τ – нормальный прогиб, изгибные деформации и кручение срединной поверхности оболочки соответственно, Φ – функция напряжений, связанная с мембранными усилиями T_1, T_2, S соотношениями

$$T_1 = \frac{1}{R^2 s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 s} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad T_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}, \quad S = -\frac{1}{R^2 s} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right). \quad (4)$$

Дополним уравнения (2), (4) соотношениями упругости [5]

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_2 = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad H = (1-\nu)D\tau \end{aligned} \quad (5)$$

где M_i, H – изгибающие и крутящий моменты, а ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) – тангенциальные деформации срединной поверхности. В свою очередь, изгибные и тангенциальные деформации $\kappa_i, \varepsilon_{ij}$, а также кручение τ выражаются через нормальное и тангенциальные перемещения w и u_i ($i = 1, 2$) по формулам:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Rs} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2 s} u_1 - \frac{w}{R_2},$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \gamma_1 \gamma_2, \quad \omega = \frac{s}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_2}{s} \right) + \frac{1}{Rs} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{Rs} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

Здесь ω - угол сдвига в касательной плоскости, а γ_1, γ_2 - углы поворота нормали \mathbf{n} вокруг ортов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 соответственно.

Уравнения (2), (4) - (6) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных перемещений w, u_1, u_2 . Дополним ее граничными условиями на краях $s = s_0, s = s_1$, а также на образующих $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$, соответствующих асимптотическим линиям Γ_1 и Γ_2 (см. рис.2 и 3).

На нижнем крае рассмотрим условия жесткой заделки

$$u_1 = u_2 = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1. \quad (7)$$

Перемещение (1) молоточка приведет к перемещению верхнего края оболочки, а также точек, лежащих на линиях Γ_i . Отсюда, получаем

$$\begin{aligned} u_1|_{s=s_0} &= -\frac{y_0}{\sqrt{1+\mu^2}} \cos \varphi - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} z_0 - \frac{s_0}{2(1+\mu^2)} + \\ &+ \frac{s_0 \cos \varphi (\cos \varphi - \sqrt{1+k^2} \sin \varphi - k\mu)}{\sqrt{1+k^2} (1+\mu^2)}, \\ u_2|_{s=s_0} &= y_0 \sin \varphi + \frac{s_0 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right), \\ w|_{s=s_0} &= \frac{z_0}{\sqrt{1+\mu^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} y_0 \cos \varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{1+\mu^2} + \frac{s_0 (k + \mu \cos \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{1+k^2} (1+\mu^2)}, \\ \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{s=s_0} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) \cos \varphi, \\ u_1|_{\Gamma_1} = -u_1|_{\Gamma_2} &= (s_1 - s) \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{tg} A \equiv F_1, \\ u_2|_{\Gamma_1} = u_2|_{\Gamma_2} &= (s_1 - s) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) \equiv F_2, \\ w|_{\Gamma_1} = u_3|_{\Gamma_2} &= \sqrt{\left[2(s_1 - s) \sin \frac{\beta}{2} \right]^2 - F_1^2 - F_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{B}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{C}{\operatorname{tg} \varphi} + B \right)^2}}, \\ B &= 2s_1 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \right), \quad C = s_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \mu = \operatorname{ctg} \gamma. \end{aligned}$$

Краевая задача (7), (8) для системы уравнений (2), (4)-(6) является достаточно сложной и может быть решена численно, либо с использованием метода возмущений после введения дополнительных предположений. В качестве одного из таких предположений может быть принята близость угла конусности γ к $\pi/2$, то есть ма-

лость параметра μ . Заметим, что при $\mu \rightarrow 0$ данная задача вырождается в более простую задачу о расчете НДС круглой пластинки, сопряженной со стержнем. Будет также считать, что перемещение молоточка под действием силы F является малым. Тогда нелинейные компоненты в соотношениях (6) для деформаций могут быть отброшены и поставленная задача решена в рамках линейной теории тонких оболочек. Искомое НДС оболочки, моделирующей барабанную перепонку, может быть представлено в виде суммы основного НДС, характеризуемого мембранными усилиями, простых краевых эффектов вблизи краев $s = s_i$ и обобщенного краевого эффекта в окрестности молоточка (асимптотических линий Γ_i на поверхности конуса). Дальнейшие исследования будут связаны с асимптотическим построением всех перечисленных составляющих НДС барабанной перепонки, которые впоследствии будут учтены при исследовании колебаний тимпанальной мембраны и всех составляющих элементов среднего уха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вульштейн, Х. Слухоулучшающие операции. – М: Медицина, 1972.- 423.
2. *Wada, H.* Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otolaryngology (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
3. Koike T. Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309-320.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы.–М.: Наука. Физматлит, 1995.–320 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек.- Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.

АНАЛИЗ ПОВРЕЖДЕННОСТИ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОПАСНЫМ ОБЪЕМОМ

Журавков М.А., Щербаков С.С.

Assessment of damage of active systems using the model of deformable rigid body with dangerous volume is considered. Definition of limiting criterion for determination of various dangerous volumes is presented. Formation of dangerous volumes under the contact of two deformable rigid bodies is studied.

Введение

Исследование поврежденности при взаимодействии элементов силовой системы в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1,2]. В рамках данной модели опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения достигают повреждающего уровня – нижней границы рассеивания предела выносливости.

Процедура расчета опасных объемов предполагает знание трехмерного напряженно-деформированного состояния элементов силовой системы, вызванного как локальным контактным так и объемным нагружением, а также предельного состояния данной системы

В силовой системе – в отличии, например, от изгибаемого вала – все шесть независимых компонент тензора напряжений являются ненулевыми. В общем случае предельное состояние (образование микротрещин) в некоторой точке силовой системы может быть обусловлено несколькими различными компонентами. Таким образом, предел выносливости для силовой системы определяется по каждой компоненте тензора напряжений как экстремальное значение ее распределения при действии предельной нагрузки [3 – 5].

Предельные тензор механического параметра и дельная потенциальная энергия деформации

В рамках трибофатики развивается [2] комплексный подход к определению предельного состояния силовых систем. Так, состояние силовой системы в некоторой точке может оцениваться как предельное при достижении (в том числе одновременном) некоторыми компонентами тензора напряжений или деформаций, а также предельной удельной потенциальной энергии деформации, своих предельных значений.

Рассмотрим тензор механического параметра φ_{ij} , конкретизациями которого являются тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} . В общем случае при действии на силовую систему предельной нагрузки F_{*lim} (обуславливающей, в общем случае, трехмерное НДС) для деформируемого твердого тела определим предельные значения для каждой независимой компоненты тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*lim)}$, $i, j = x, y, z$, каждого главного компонента $\varphi_i^{(\pm*lim)}$, $i = 1, 2, 3$ и интенсивности $\varphi_{int}^{(*lim)}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})} &= \text{extr}_{dV} [\varphi_{ij}(F_{*\text{lim}}, dV)], \\
\varphi_i^{(\pm*\text{lim})} &= \text{extr}_{dV} [\varphi_i(F_{*\text{lim}}, dV)], \\
\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} [\varphi_{\text{int}}(F_{*\text{lim}}, dV)]
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\text{extr}(y) = \begin{cases} \max(y), & \text{при } y \geq 0, \\ \min(y), & \text{при } y < 0, \end{cases}$

Аналогично для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения $\varphi_n^{(*\text{lim})}$ и $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$ тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})}$, а также предельное главное значение тензора $\varphi_1^{(*\text{lim})}$ и предельную интенсивность $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i} \left(\left| \varphi_{ii}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\
\varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i,j} \left(\left| \varphi_{ij}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\
\varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left(\left| \varphi_1(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор φ_{ij} в каждом элементарном объеме dV тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа тензора относительных повреждающих напряжений [2,3,6,7]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$g_{ij} = \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \quad g_i = \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \quad g_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, \tag{3}$$

где g_{ij} , g_i , g_{int} , вообще говоря, имеют вероятностную природу, поскольку в условиях прочности как действующие напряжения φ_{ij} , φ_i , φ_{int} , так и предельные значения $\varphi_k^{(*\text{lim})}$, $\varphi_i^{(*\text{lim})}$, $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ являются случайными величинами с соответствующими плотностями распределения.

Тензор g_{ij} разложим на шаровую g^S и девиаторную g_{ij}^D части

$$g^S = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}^D) = (g_{ij}) - g^S = \begin{pmatrix} g_{11} - g & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - g & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - g \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $g = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3\sigma_k^{(*\text{lim})}} = \frac{1}{3}(g_{11} + g_{22} + g_{33})$.

Рассмотрим также характеристику поврежденности основанную на удельной потенциальной энергии деформации

$$U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

которая в случае упругого деформирования имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \tag{6}$$

Для которой можно выделить две части отрывную и сдвиговую

$$U_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad U_{\tau} = \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Введем по аналогии с тензором φ_{ij} и g_{ij} следующие характеристики

$$U^{(*\text{lim})} = \max_{dV} [U(F_{*\text{lim}}, dV)] \quad (8)$$

$$U_k^{(*\text{lim})} = \max_{dV} [U_k(F_{*\text{lim}}, dV)], \quad k = \sigma, \tau,$$

$$g^U = U / U^{(*\text{lim})}, \quad (9)$$

$$g_k^U = U_k / U_k^{(*\text{lim})}, \quad k = \sigma, \tau,$$

Величины g^U , g_k^U , являются интегральной энергетической характеристикой повреждения твердого тела в элементарной объеме.

Опасные объемы в силовой системе

Критериальные условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (1)–(9) будут иметь вид

$$V_{ij} = \{dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad i, j = x, y, z, \quad m = \begin{cases} n, & \text{при } i = j, \\ \tau, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (10)$$

$$V_i = \{dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$V_{\text{int}} = \{dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\} \quad (12)$$

$$V_U = \{dV / U \geq U^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad (13)$$

$$V_{U_m} = \{dV / U_m \geq U_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad m = \sigma, \tau \quad (14)$$

$$V_{U_{\text{eff}}} = \{dV / U_{\Sigma}^{\text{eff}} \geq U_0, dV \subset V_k\}. \quad (15)$$

Поскольку применительно в силовой системе может исследоваться процесс ее повреждения при контактной усталости, то в выражениях (10)–(15) рабочий объем V_k представляет собой не весь объем деформируемого твердого тела, а лишь объем предельно допустимого износа [1, 2].

Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную и сложную форму, то их аналитическое определение, согласно формулам (10)–(15), может быть затруднено; в таких случаях их вычисляют методом Монте-Карло.

Графическая иллюстрация компонентных опасных объемов V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , их пересечений (совмещенных опасных объемов) $V_{xx} \cap V_{yy}$, $V_{yy} \cap V_{zz}$, $V_{xx} \cap V_{zz}$, $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$ и объединения $V_{xx} \cup V_{yy} \cup V_{zz}$ (тензорного опасного объема) представлена на рис. 1. Там же показан тензор $g_{ij}(dV)$ относительных повреждающих напряжений в соответствии с представлением (10). Видно, что при равновеликом значении компонент тензора $g_{ij}(dV)$ наиболее опасной зоной, где ожидается зарождение разрушения, является пересечение трех компонентных объемов $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$. В этой зоне тензор $g_{ij}(dV)$ имеет вид:

В зонах трех компонентных объемов (V_{xx} , V_{yy} , V_{zz}) разрушение скорее начнется там, где тензор $g_{ij}(dV)$ является наибольшим по величине. Вообще, рисунки типа рис. 1 позволяют проанализировать многообразные возможные особенности прогнозируемого повреждения. Они обнаруживаются, например, в зонах

пересечения (наложения) опасных объемов, обусловленных либо только нормальными, либо только касательными напряжениями, либо одновременным воздействием нормальных и касательных напряжений разных знаков. Таким образом, появляется возможность конкретного анализа роли процессов отрыва и сдвига в формировании комплексного повреждения.

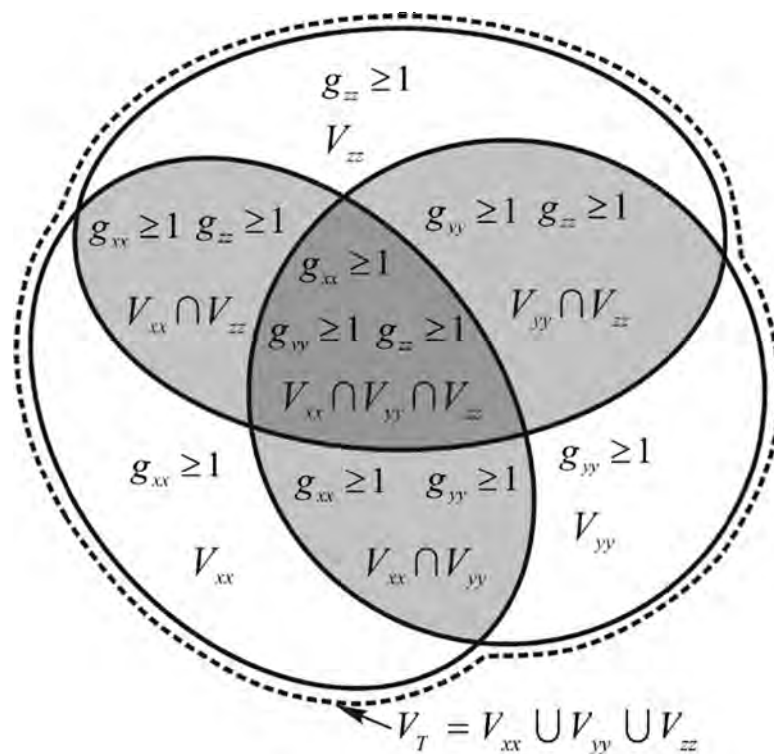


Рис. 1. Схема объединения (пунктирная линия) и пересечений (затемнено) опасных объемов, обусловленных нормальными напряжениями

Результаты расчетов

Рассмотрим формирование опасных объемов в условиях контактного взаимодействия в соответствии с (10). Определение опасных объемов выполним при следующих исходных данных: $\sigma_n^{(*\text{lim})} = 0,3p_0$, $\sigma_\tau^{(*\text{lim})} = 0,09p_0$, $f = 0,05$, $b/a = 0,813$ (a и b – большая и меньшая полуоси эллипса контакта соответственно). Результаты вычислений представлены на рис. 2. Из данного рисунка видно, что наибольшими по величине являются опасные объемы V_{zz} , V_{xz} и V_{yz} , соответствующие наибольшим напряжениям $\sigma_{zz}^{(n)}$, $\sigma_{xz}^{(n)}$ и $\sigma_{yz}^{(n)}$. Отметим, что, несмотря на небольшое значение коэффициента трения f , действие распределенных касательных усилий $q(x, y)$ приводит к изменению форм и величин опасных объемов, обусловленных действием нормальных усилий $p(x, y)$. Особенно заметна асимметрия объема V_{xz} (см. рис. 2) относительно плоскости $x = 0$.

Поскольку опасные объемы являются мерой поврежденности деформируемых тел, то, анализируя рис. 2, можно указать конкретные области (зоны), в которых возможно зарождение и развитие как поверхностных, так и внутренних трещин. Очевидно, что действие необратимых повреждений реализуется там, где соответствующие опасные объемы пересекаются (т. е. накладываются друг на друга) или совмещаются друг с другом. Условия взаимодействия опасных объемов (и,

следовательно, повреждений в них) так же многообразны (см. рис. 2), как и условия нагруженности силовых систем.

Анализ рис. 2 позволяет сделать следующие два принципиальных заключения. С одной стороны, процесс повреждаемости в общем случае является рассеянным, т. е. первичные трещины могут появиться в любой точке опасного объема. С другой стороны, процесс повреждаемости оказывается дискретным в том смысле, что существуют локальные области, в которых появление первичных трещин представляется наиболее вероятным (например, в совмещенных опасных объемах – пересечениях компонентных опасных объемов). По данному рисунку можно сделать более глубокий анализ повреждаемости как следствия возникновения, развития и взаимодействия опасных объемов.

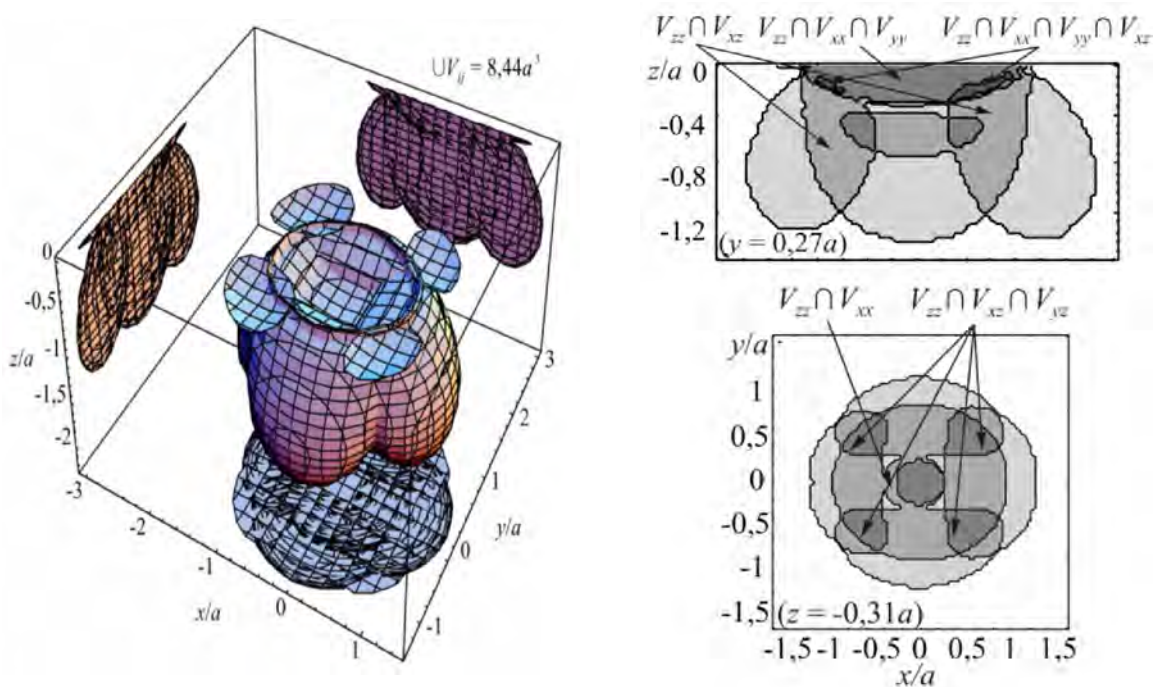


Рис. 2. Объединение опасных объемов и его сечения

По результатам численного расчета для $R_{11} = 0,005$ м, $R_{12} = 0,05$ м, $R_{21} = 0,005$ м, $R_{12} = 0,01$ м, $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$ Па построен график, представленный на рис. 3, из которого видно, что величина тензорного опасного объема $\bigcup_{i,j} V_{ij}$, $i, j = x, y, z$ возрастает с увеличением контактной нагрузки.

$$V_T, 10^{-14} \text{ м}^3 = \bigcup_{i,j} V_{ij}, \quad i,j = x, y, z$$

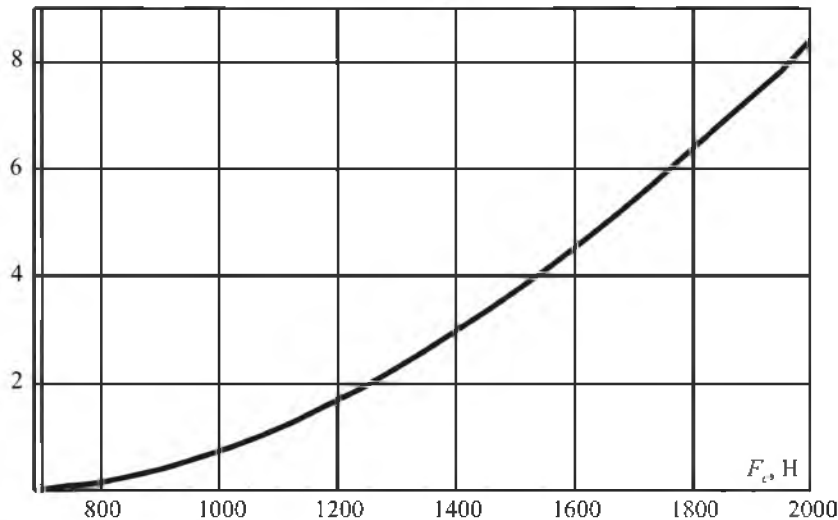


Рис. 3. Изменение величины тензорного опасного объема в зависимости от контактной нагрузки

В технических приложениях для анализа поврежденности обусловленной сложным трехмерным напряженным состоянием при контактном взаимодействии удобно использовать октаэдрический опасный объем V_{int} в качестве интегральной характеристики поврежденности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л.А. Основы трибофатиги / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; – Т. 2. – 234 с.]
2. Sosnovskiy, L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics)/ L.A. Sosnovskiy. – Springer, 2004. – P. 424.
3. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с
4. Сосновский, Л.А. Уравнения подобия усталостного разрушения деталей с опасным объемом и их экспериментальная проверка: Сообщения I и II / Л.А. Сосновский // Проблема прочности. – 1977. – № 4. – С. 40–80.
5. Сосновский, Л.А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Минск: Наука и техника, 1987. – 288 с.
6. Журавков, М.А. Расчет опасных объемов при контактном нагружении. / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. – № 1. – С. 117–122.
7. Журавков, М.А. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы ролик / кольцо / М.А. Журавков, С.С. Щербаков // тр. V Междунар. симпозиума по трибофатиге (ISTF 2005), Иркутск, Россия, 3–7 октября 2005 г. / Иркут. гос. ун-т; отв. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т путей сообщения, 2005. – Т. 1. – С. 375–390.

ВЫПУЧИВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ОБЛУЧЕНИЯ НЕЙТРОННЫМ ПОТОКОМ

Куликов И.С., Шпургалова М.Ю.

Анализ современной научной литературы, посвященной исследованию проблем устойчивости неравномерно нагретых сферических оболочек в условиях ползучести и облучения показал, что данная задача, применительно к сферическим оболочкам в условиях облучения ранее не ставилась и не решалась.

Среди работ в этом направлении следует выделить следующие результаты научных исследований:

Xirochakis P.C, Jones Normax, Norton-Bailey, Md. Wahhaj Uddin, Misra J.C., Kar S.V., Samanta S.C. и многие другие.

В последнее время при решении задач прочности и устойчивости оболочек большое распространение получил метод конечных элементов. Однако, несмотря на это, в большинстве работ рассматривались в основном либо цилиндрические, либо конические оболочки. Очень мало работ посвящено вопросам прочности и устойчивости сферических оболочек.

Новизна поставленной задачи заключается в том, что в работе предполагается рассмотрение устойчивости неравномерно нагретых сферических оболочек в условиях ползучести и облучения.

Рассмотрим нагруженную равномерным внешним давлением p замкнутую сферическую оболочку (рис.1)

В этом случае усилия N_θ, N_φ перерезывающие силы Q и изгибающие моменты M_θ, M_φ будут функциями только угла θ .

Обозначим через r_c – радиус средней поверхности оболочки, $2h$ – толщину оболочки, w – перемещение точек оболочки по радиусу, u – перемещение точек по касательной к меридиану в направлении угла θ .

В этом случае будем иметь следующую систему уравнений равновесия [1]:

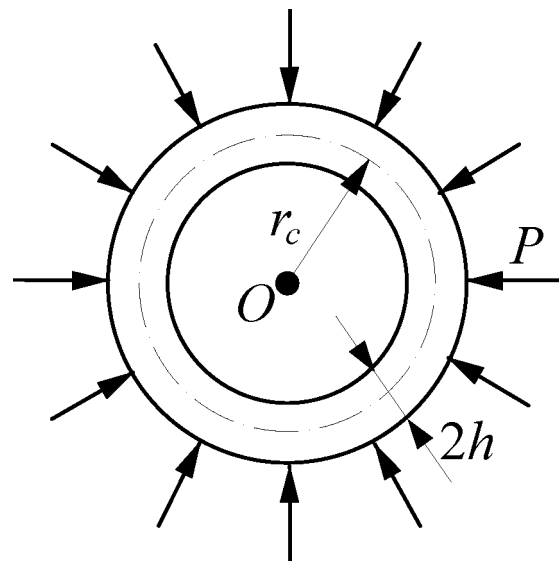


Рис. 1

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\theta} + Qctg\theta - (N_\theta + N_\varphi) + Pr_c &= 0 \\ \frac{dN_\theta}{d\theta} + (N_\theta - N_\varphi)ctg\theta + Q &= 0 \\ \frac{dM_\theta}{d\theta} + (M_\theta - M_\varphi)ctg\theta + Qr_c &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Для волокна оболочки, лежащего на расстоянии z от срединной поверхности ($-h \leq z \leq h$), получим следующие выражения для деформаций:

$$E_{\theta} = \frac{w}{r_c} + \frac{1}{r_c} \frac{du}{d\theta} - \frac{z}{r_c^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) + E_{\theta}^H \quad (2)$$

$$E_{\varphi} = \frac{w}{r_c} + \frac{u}{r_c} \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{r_c^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} \operatorname{ctg}\theta + w \right) + E_{\varphi}^H$$

Здесь $E_{\theta}^H, E_{\varphi}^H$ – неупругие деформации, возникающие в оболочке в процессе деформирования.

$$\begin{aligned} E_{\theta}^H &= E_{\theta}^T + E_{\theta}^S + E_{\theta}^C \\ E_{\varphi}^H &= E_{\varphi}^T + E_{\varphi}^S + E_{\varphi}^C \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_{\theta}^T, E_{\varphi}^T$ – деформации термического расширения, $E_{\theta}^S, E_{\varphi}^S$ – деформации радиационного распухания, $E_{\theta}^C, E_{\varphi}^C$ – деформации тепловой и радиационной ползучести.

$$E_{\theta}^T = E_{\varphi}^T = \alpha T(r, \theta) \quad (4)$$

где $T(r, \theta)$ – температурное поле в оболочке.

$$E_{\theta}^S = E_{\varphi}^S = \frac{1}{3} S[T(r, \theta), \Phi t] \quad (5)$$

где S – функция радиационного распухания материала оболочки, Φ – нейтронный поток, t – время.

Зная на каждом временном шаге значения напряжений σ_{θ} , σ_{φ} в оболочке можно пошагово определять возникающие деформации ползучести следующим образом [2]:

Для временного шага $t_n = t_{n-1} + \Delta_n t$ ($n = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} E_{\theta n}^C &= E_{\theta n-1}^C + \Delta_n E_{\theta}^C \\ E_{\varphi n}^C &= E_{\varphi n-1}^C + \Delta_n E_{\varphi}^C \\ \Delta_n E_{\theta}^C &= \dot{E}_{\theta n}^C \Delta_n t \\ \Delta_n E_{\varphi}^C &= \dot{E}_{\varphi n}^C \Delta_n t \end{aligned} \quad (6)$$

Зная закон ползучести материала оболочки с учетом влияния облучения нейтронным потоком (радиационная ползучесть) $\dot{E}_u^C = f(\sigma_u, T, \Phi, t)$, можно в первом приближении принять скорость ползучести

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\theta n}^{C(1)} &= \dot{E}_{\theta n-1}^C; \quad \dot{E}_{\varphi n}^{C(1)} = \dot{E}_{\varphi n-1}^C; \\ \dot{E}_{\theta n-1}^C &= \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_{un-1}^C}{\sigma_{un-1}} (2\sigma_{\theta n-1} - \sigma_{\varphi n-1}) \\ \dot{E}_{\varphi n-1}^C &= \frac{1}{2} \frac{\dot{E}_{un-1}^C}{\sigma_{un-1}} (2\sigma_{\varphi n-1} - \sigma_{\theta n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\sigma_u = \sqrt{\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\theta} \sigma_{\varphi}}$ – интенсивность напряжений в оболочке.

Во втором и последующих приближениях можно принять:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\theta n}^{C(2)} &= \frac{1}{2}(\dot{E}_{\theta n-1}^C - \dot{E}_{\theta n}^C) \\ \dot{E}_{\varphi n}^{C(2)} &= \frac{1}{2}(\dot{E}_{\varphi n-1}^C - \dot{E}_{\varphi n}^C),\end{aligned}\quad (8)$$

где под $\dot{E}_{\theta n}^C$ и $\dot{E}_{\varphi n}^C$ понимаются скорости деформаций ползучести, полученные на основе новых значений напряжений, соответствующих скоростям ползучести $\dot{E}_{\theta n-1}^C$ и $\dot{E}_{\varphi n-1}^C$.

Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока во всех точках не будут выполнены условия:

$$\begin{aligned}|\dot{E}_{\theta n}^{C(P-1)} - \dot{E}_{\theta n}^{C(P)}| &< \varepsilon, \\ |\dot{E}_{\varphi n}^{C(P-1)} - \dot{E}_{\varphi n}^{C(P)}| &< \varepsilon,\end{aligned}\quad (9)$$

где p – приближение, ε – заданная точность.

Из третьего уравнения равновесия (1) получим

$$Q = \frac{1}{r_c} \left[\frac{dM_\theta}{d\theta} + (M_\theta - M_\varphi) \operatorname{ctg}\theta \right].$$

Выразив $N_\theta, N_\varphi, Q, M_\theta, M_\varphi$ через перемещение u , прогиб w и неупругие деформации E_θ^H, E_φ^H , получим систему дифференциальных уравнений для u и w :

$$\begin{aligned}&\frac{d^3 w}{d\theta^3} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d^2 w}{d\theta^2} - 3\mu^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \left[3(1+\nu)\mu^2 - 1 + (1-\nu)\operatorname{ctg}^2\theta + \frac{\nu}{\sin^2\theta} \right] \frac{dw}{d\theta} - \\ &- 3\mu^2 \operatorname{ctg}\theta \frac{du}{d\theta} + \left[3\mu^2(1-\nu)\operatorname{ctg}^2\theta + 3\mu^2 \frac{\nu}{\sin^2\theta} \right] u + \frac{3}{2}\mu^3 \operatorname{ctg}\theta (N_\theta^H - N_\varphi^H) + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} \frac{d\mu_\theta^H}{d\theta} + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} (M_\theta^H - M_\varphi^H) \operatorname{ctg}\theta = 0. \\ &\frac{d^4 w}{d\theta^4} + (3-\nu)\operatorname{ctg}\theta \frac{d^3 w}{d\theta^3} + \left[1 + \frac{2\nu}{\sin^2\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta} \right] \frac{d^2 w}{d\theta^2} + \\ &+ \left[(2-3\nu) \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta} + (\nu-1)\operatorname{ctg}^3\theta + (1+\nu)\operatorname{ctg}\theta \right] \frac{dw}{d\theta} + (1+\nu)3\mu^2 \frac{du}{d\theta} + 6(1+\nu)\mu^2 w + \\ &+ 3(1+\nu)\mu^2 u + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} \frac{d^2 M_\theta^H}{d\theta^2} + 3 \frac{\mu^2}{h} \operatorname{ctg}\theta \frac{dM_\theta^H}{d\theta} - \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} \operatorname{ctg}\theta \frac{dM_\varphi^H}{d\theta} - \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} M_\theta^H + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{h} M_\varphi^H - \frac{3}{2} \mu^3 (N_\theta^H - N_\varphi^H) - \frac{3}{2} \mu^3 \frac{pr_c(1-\nu^2)}{E} = 0,\end{aligned}\quad (10)$$

где $\mu = \frac{r_c^2}{h^2}$, E – модуль упругости материала оболочки, ν – коэффициент Пуассона.

Граничные условия для решения системы (10) можно принять следующими:

$$u = \frac{dw}{d\theta} = \frac{d^3 w}{d\theta^3} = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \theta_0, \quad (11)$$

где выбор θ_0 зависит от закона распределения температуры в оболочке.

В уравнениях (10) величины $N_{\theta}^n, N_{\varphi}^n, M_{\theta}^n, M_{\varphi}^n$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\theta}^n &= \int_{-h}^h (E_{\theta}^n + \nu E_{\varphi}^n) dz, \\ N_{\varphi}^n &= \int_{-h}^h (E_{\varphi}^n + \nu E_{\theta}^n) dz, \\ M_{\theta}^n &= \int_{-h}^h (E_{\theta}^n + \nu E_{\varphi}^n) z dz, \\ M_{\varphi}^n &= \int_{-h}^h (E_{\varphi}^n + \nu E_{\theta}^n) z dz \end{aligned} \quad (12)$$

При постановке данной задачи исследуется ползучесть основного состояния, которая описывается уравнениями (10). Поэтому данная задача – есть задача выпучивания сферической оболочки, которая состоит в определении критического времени, соответствующему сколь угодно большой скорости роста прогиба w . Критическая скорость роста прогиба или критическое значение прогиба w может быть определено на основании испытаний сферических оболочек на выпучивание в упругой области (определение критического внешнего давления). В дальнейшем значение скорости прогиба или самого прогиба могут быть приняты за критические как соответствующие критическому давлению, но достигаемые в процессе ползучести с течением времени. При этом могут быть учтены дополнительные факторы, способные повлиять на величину прогиба и критическое время соответственно, а именно: неравномерный нагрев и неравномерное радиальное распухание материала оболочки, вызванные облучением нейтронным потоком. Поскольку скорость роста прогиба вызвана главным образом ползучестью ввиду нелинейной связи между напряжениями и скоростями деформации ползучести, то точность определения w зависит от точности определения скоростей деформаций ползучести, которые в свою очередь зависят от точности численного решения системы в общем случае дифференциальных уравнений (10).

В то же время решение этой системы нелинейных уравнений может быть сведено к последовательному решению системы линейных дифференциальных уравнений путём разбиения процесса деформирования на достаточно малые временные этапы. Более того, для получения значений скоростей деформаций ползучести, близких к точным, с помощью соотношений (7) – (9) необходимо на каждом временном шаге решать систему уравнений (10) p раз. Для уменьшения числа итераций можно взять достаточно малый временной шаг или запрограммировать автоматический выбор шага. Система (10) может быть решена одним из известных численных методов, например, методом конечных разностей или методом переменных направлений.

Для тестировки численного решения могут быть использованы данные, полученные в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Куликов И.С., Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. Минск, «Навука і тэхніка», 1990, 144с.
2. Куликов И.С., Тверковкин Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. Минск, «Навука і тэхніка», 104с.
3. Jones Normax, Xirochakis P.C. The creep buckling of shells. Creep in structure, Heedelberg: Springer, 1981, p.308-379.

ФУНКЦИИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Сосновский Л.А., Шевченко Д.Н.

Is carried out the analysis of mine of information about the typical distributions. Criteria are produced, according to which are proposed to using the variants of the distribution functions of the most been used typical of continuous random variables.

Введение

В практике инженерных и научных исследований, при анализе закономерностей технологических и экономических процессов некоторые их количественные показатели формально описывают случайными величинами (наработка до отказа, время выполнения технологической операции, ошибки измерений и другие). Исчерпывающей характеристикой случайных величин является закон распределения, информация о котором позволяет прогнозировать возможные значения случайной величины, определять её числовые характеристики.

Отыскание закона распределения случайной величины на практике состоит в подборе одного из существующих типовых законов распределения, которое наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. С целью выбора наиболее адекватной модели распределения случайной величины следует оперировать большим количеством типовых законов распределения вероятностей, каковых в настоящее время известно более ста.

Распределения случайных величин ξ и η называются однотипными, если существуют постоянные a и $b \neq 0$ такие, что распределения вероятностей величин ξ и $b(\eta+a)$ совпадают [6]. Однако в литературе и нормативных документах по теории вероятностей и ее приложениям (математической статистике, теории надежности, метрологии, связи и др.) отсутствует унификация многих типовых распределений случайных величин. В различных источниках однотипные распределения могут отличаться параметрами, их количеством и даже видом функции распределения. Это зачастую приводит к разночтениям, нестыковкам и, как следствие, ошибкам и дополнительным временным затратам на изучение, анализ и применение информации. Вредит данная ситуация и учебному процессу, требуя от студентов дополнительной усидчивости, а от преподавателя – дополнительных пояснений. Особенно актуальна данная проблема при использовании компьютерных пакетов математического моделирования и статистического анализа данных. Реализованные в них варианты типовых распределений случайных величин зачастую невозможно редактировать, что ограничивает применение некоторого программного обеспечения.

Целью данной работы является:

1) анализ источников информации (литературы, нормативных документов и программного обеспечения) с целью поиска вариантов функций типовых распределений случайных величин;

2) выработка критериев, в соответствии с которыми среди множества вариантов функций некоторого типового распределения будет выбран один;

3) рекомендация к использованию в учебно-методической и научной работе выбранных вариантов функций типовых распределений случайных величин.

Анализ информации. Критерии ранжирования источников информации

Все источники информации, используемые для анализа вариантов функций типовых распределений случайных величин, можно разделить на несколько групп: специальная и справочная литература по теории вероятностей и математической статистике; справочная литература по математике и математическим методам; литература по теории надежности, теории связи и другим наукам, широко использующим распределения случайных величин; пакеты компьютерной математики; пакеты статистического анализа данных. Всего было изучено 45 источников информации.

Изучив и обобщив информацию о типовых распределениях случайных величин, можно прийти к следующим выводам о причинах разнообразия вариантов функций распределения:

1) наибольшее разнообразие характерно для распределений, широко используемых в теории надежности (Вейбулла, логнормального, гамма и др.). Причина такого разнообразия состоит, видимо, в наличии физического смысла некоторых параметров распределений. Поэтому они могут отличаться от параметров, принятых в литературе по теории вероятностей;

2) в англоязычных источниках информации (пакетах компьютерной математики и статистического анализа данных) типовые распределения достаточно унифицированы в сравнении с литературными источниками на русском языке. При этом тенденции к унификации распределений в новых изданиях на русском языке не наблюдается.

Очевидно, что решение о выборе некоторого варианта функции распределения из множества не может приниматься простым большинством голосов. Здесь следует учитывать, по крайней мере, два факта:

1) степень распространенности (популярности) источника информации;

2) невозможность изменения встроенных функций типовых распределений в компьютерных пакетах анализа данных и моделирования.

Поэтому, для выбора единого варианта функции распределения из множества, предлагаются следующие критерии, ранжированные по значимости:

1) реализация данного варианта функции в пакетах статистического анализа данных и моделирования, используемых в учебном процессе [41, 43];

2) в распространенных пакетах статистического анализа данных [42, 44–46];

3) в распространенных пакетах компьютерной математики [37–40];

4) в специальной и справочной литературе по распределениям случайных величин [5, 6, 11, 14, 16–18, 20, 21, 25, 29, 31, 33, 35, 36];

5) в литературе, используемой в учебном процессе [28, 30];

6) в большинстве других литературных источников.

В соответствии с предложенными критериями, представим рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений, классифицированные по области возможных значений (таблицы 1–4).

Таблица 1

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывных случайных величин, областью значений которых является вся числовая ось

Распределение	Функция плотности распределения	Параметры	Источники с аналогичной функцией распределения	
			и параметрами	но другими именами параметров
1	2	3	4	5
t -Стьюдента (рис. 1, а)	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	ν – число степеней свободы	14, 15, 24, 28, 31	6, 18, 30, 32
Z-Фишера (рис. 2)	$f(x) = \frac{2m_1^{\frac{m_1}{2}} m_2^{\frac{m_2}{2}} \Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) \exp(-m_1 x)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right) (m_1 e^{2x} + m_2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}$	m_1, m_2 – степени свободы	6	14, 15
Гумбеля (экстремальных, максимальных значений, тип I, рис. 3)	$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta} - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)$	α – мода; β – масштаб	43	30, 31, 37, 44–46
Гумбеля (экстремальных, минимальных значений, тип I, рис. 4)	$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta} - \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)$	α – мода; β – масштаб	6, 43	4, 30, 44–46
Двойное экспоненциальное (экстремальных значений, тип I, рис. 5)	$f(x) = \alpha\beta \exp(-\alpha x - \beta \exp(-\alpha x))$	α – масштаб; β – форма		8
Джонсона несвязанное (рис. 6)	$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha_1 + \alpha_2 \ln\left(\frac{x-\gamma}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right)}{\alpha_2^{-1}\sqrt{(x-\gamma)^2 + \beta^2} \sqrt{2\pi}}$	α_1, α_2 – форма; γ – положение; β – масштаб	13	
Коши (рис. 7, а)	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$	μ – медиана; λ – масштаб	6, 43	18, 28, 30, 32, 33, 37, 38, 44–46
Лапласа (двустороннее экспоненциальное, рис. 7,	$f(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha x-\beta)$	α – масштаб; β – положение	6, 33, 43	41

б)				
Логистическое (рис. 8)	$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\beta}\right)}{\beta \left(1 + \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\beta}\right)\right)^2}$	β – масштаб; λ – положение	41	37–39, 43–46
Мойяла (рис. 1, б)	$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{2\sigma} - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	μ – положение; σ – масштаб	37	
Нормальное (рис. 9)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ – положение; σ – форма	12, 14, 15, 24, 31, 32	5, 6, 8, 26, 27, 30
Экспоненциальное степенное (рис. 10)	$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{ x-\mu }{\phi}\right)^{1+\beta}\right)}{\phi \cdot 2^{\left(\frac{1+\beta}{2}+1\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}+1\right)}$	μ – медиана, ϕ – масштаб, β – форма	43	37

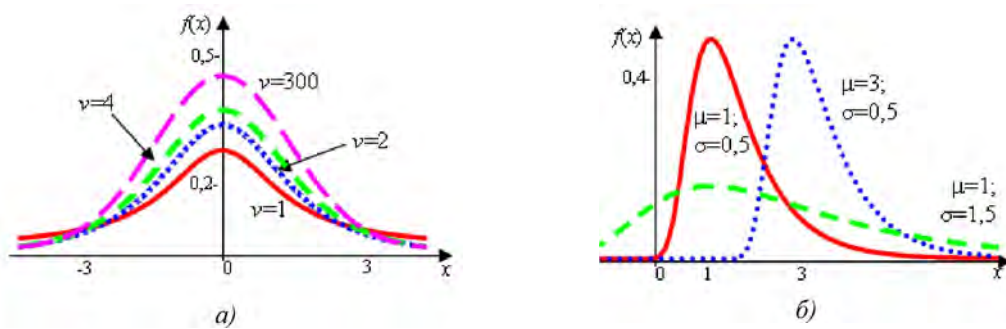


Рис. 1. Графики функции плотности: а) t -распределения Стьюдента; б) распределения Мойяла с различными значениями параметров

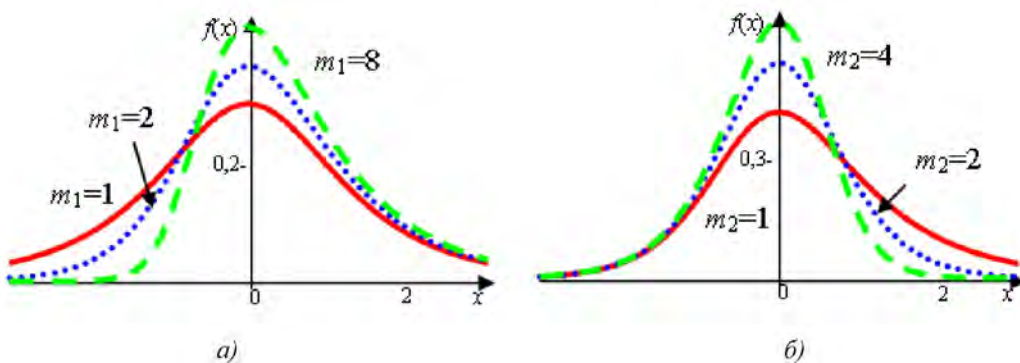


Рис. 2. Графики Z-распределения Фишера с различными значениями параметров: а) $m_2=1$; б) $m_1=1$

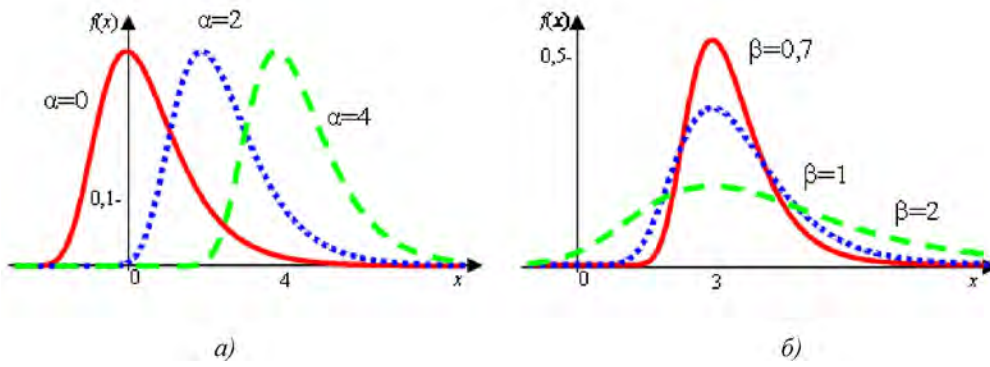


Рис. 3. Распределение Гумбеля (максимальных значений): а) $\beta=1$; б) $\alpha=3$

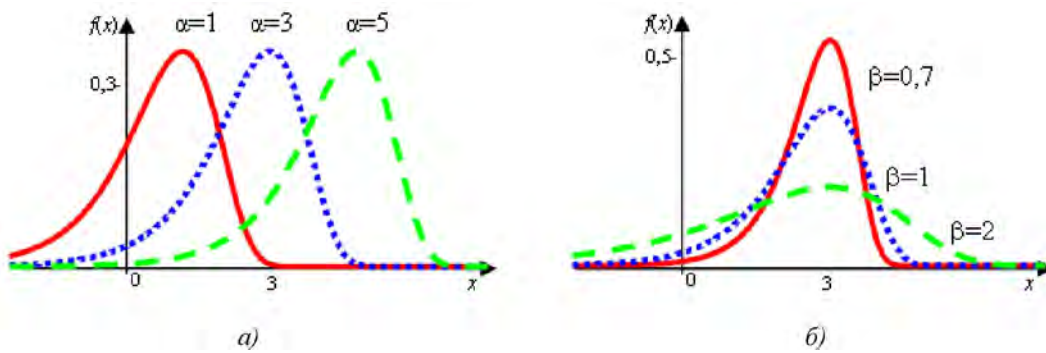


Рис. 4. Распределение Гумбеля (минимальных значений): а) $\beta=1$; б) $\alpha=3$

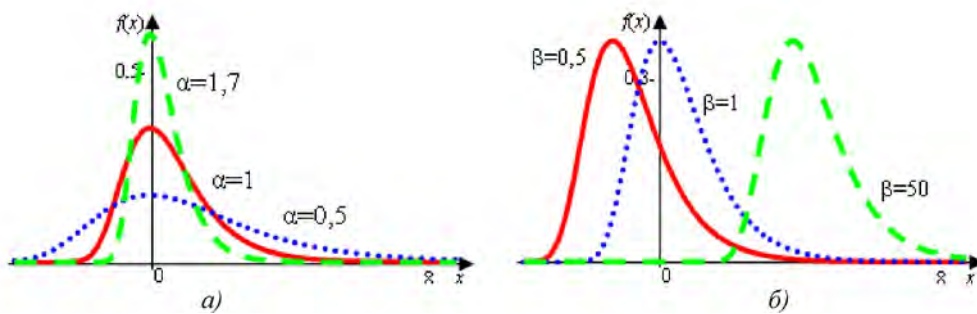


Рис. 5. Двойное экспоненциальное распределение: а) $\beta=1$; б) $\alpha=3$

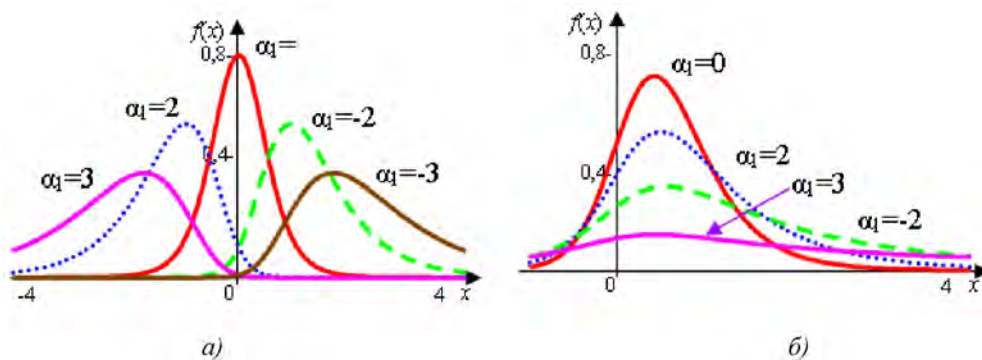


Рис. 6. Несвязанное распределение Джонсона: а) $\gamma=0, \beta=1, \alpha_2=2$; б) $\gamma=0, \beta=1, \alpha_1=-1$

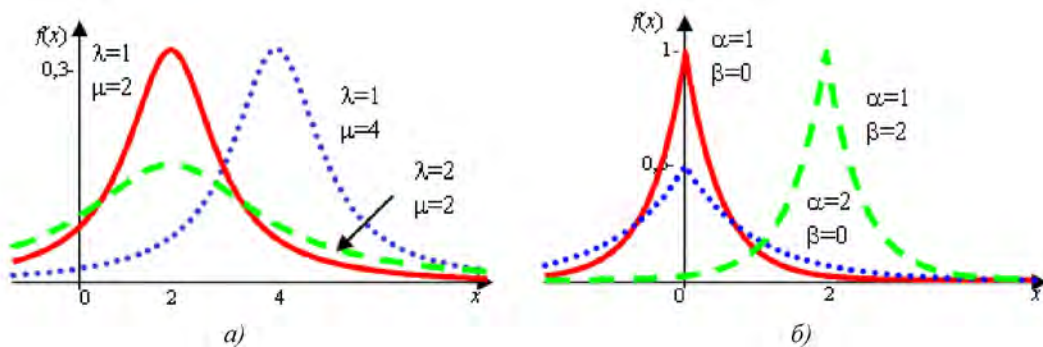


Рис. 7. Распределение а) Коши; б) Лапласа для различных значений параметров

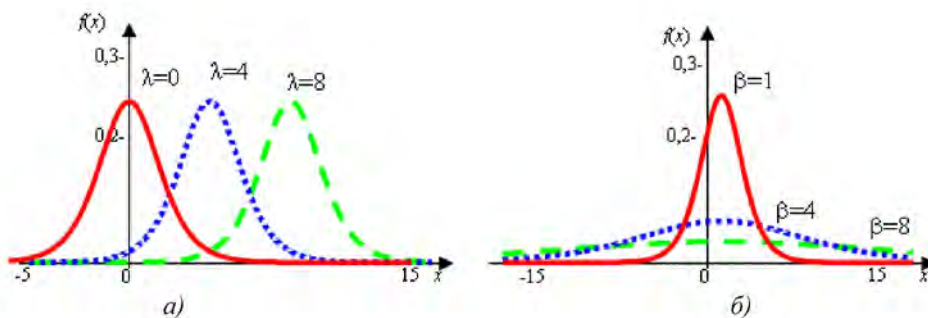


Рис. 8. Логистическое распределение с различными значениями параметров: а) $\beta=1$; б) $\lambda=1$

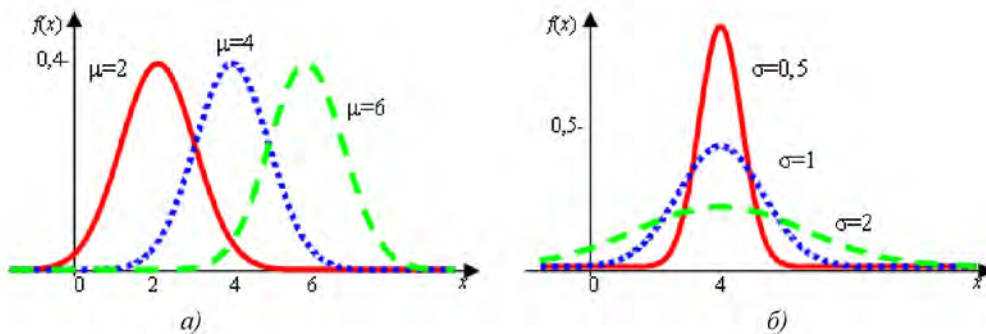


Рис. 9. Нормальное распределение с различными значениями параметров: а) $\sigma=1$; б) $\mu=1$

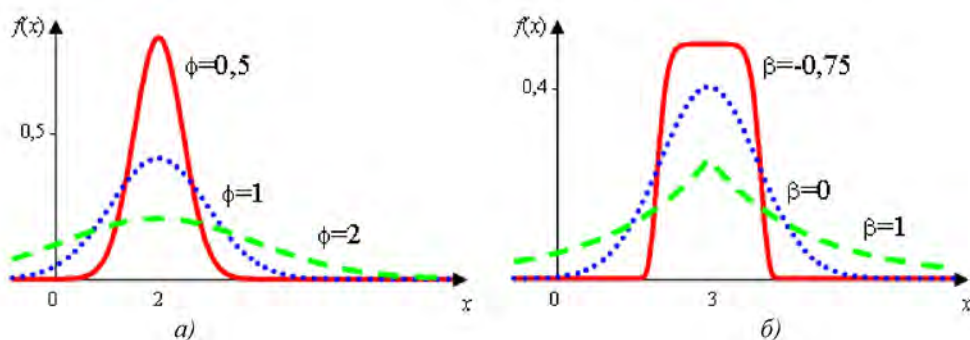


Рис. 10. Экспоненциальное степенное распределение: а) $\mu=2, \beta=0$; б) $\mu=3, \phi=1$

Таблица 2

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывных случайных величин, областью значений которых является числовая полуось

Распределение	Функция плотности распределения	Параметры	Источники с аналогичной функцией распределения	
			и параметрами	но другими именами параметров
1	2	3	4	5
α (альфа, рис. 11)	$f(x) = \begin{cases} \frac{c \cdot \beta}{t^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha t - \beta)^2}{2 t^2}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ $\tilde{n} = \left(\frac{1}{2} + \Phi(\alpha)\right)^{-1}.$	α – форма, β – масштаб	9	3
Γ (гамма, рис. 11)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб	13, 26, 40, 41	31, 44–46
χ (хи, рис. 13, а)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	n – число степеней свободы	6, 38	
χ^2 (хи-квадрат, рис. 13, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} (x)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	v – число степеней свободы	7, 24, 28, 31, 43–46	5, 6, 8, 13–17, 30, 39, 40
F -Фишера-Снедекора (рис. 14, а)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \frac{x^{\frac{v_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{v_1}{v_2} x\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	v_1, v_2 – число степеней свободы	5, 6, 14, 15, 24, 28, 31, 39, 40, 43	8, 32, 44–46
T^2 -Хотеллинга (рис. 15)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x^{\frac{k}{2}-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) n^{\frac{k}{2}}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$	n, k – число степеней свободы	6	

Берра (рис. 16)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^{\beta+1}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α – форма, β – масштаб	6	
Бирнбаума-Саундерса (рис. 17)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{x}{\theta}} + \sqrt{\frac{\theta}{x}}}{2\beta x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{x}}\right)^2}{2\beta^2}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	β – форма; θ – масштаб	43	
Вальда (инверсное Гаусса, рис. 18)	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	μ – масштаб; λ – форма	37	31
Вейбулла-Гнеденко (экстремальных значений, тип III, рис. 19)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб	1, 11, 13, 16, 26, 34, 40, 41, 43	8, 30, 36, 44–46
Гиперэкспоненциальное (рис. 20)	$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \alpha_k \lambda_k \exp(-\lambda_k x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	α_i – форма; λ_i – масштаб	18	
Инверсное Вейбулла (рис. 21)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{-\beta} \beta}{(x-\lambda)^{\beta+1}} \exp\left(\frac{-1}{(\alpha(x-\lambda))^\beta}\right), & x \geq \lambda; \\ 0, & x < \lambda. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб; λ сдвиг	41	
Лог-логистическое (вариант [43], рис. 22)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(z)}{\beta x (1+z)^2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad z = \frac{\ln(x) - \lambda}{\beta}.$	β – форма; λ – масштаб	43	
Лог-логистическое (вариант [13], рис. 23)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)^{-2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб	13	
Логнормальное (рис. 24)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	μ – положение; σ – форма	4, 12, 13, 16, 21, 37, 39–41, 43–46	6, 8, 23, 24, 26, 27, 30, 36
Максвелла (рис. 14, б)	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	σ – масштаб	6	37, 43

Нормальное сложное (рис. 25)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \cosh\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2+\mu^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	μ – сдвиг, σ – масштаб	43	
Нормальное, усеченное слева (рис. 26)	$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > x_0; \\ 0, & x \leq x_0. \end{cases}$ $c = \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right)\right).$	x_0 – точка усечения, μ – положение, σ – разброс		19, 22, 28, 30, 36
Парето (рис. 27, а)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x > x_0; \\ 0, & x \leq x_0. \end{cases}$	α – масштаб, x_0 – мин. значение	6, 28	37, 38, 41, 43
Пирсона, тип V (рис. 28)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x)}{\beta^{-\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб	13, 41	
Пирсона, тип VI (рис. 29)	$f(x) = \begin{cases} \frac{(x/\beta)^{\alpha_1-1}}{\beta \cdot B(\alpha_1, \alpha_2)(1+x/\beta)^{\alpha_1-\alpha_2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$	α_1, α_2 – форма; β – масштаб	13, 41	
Рэлея (рис. 27, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	β – масштаб	44–46	6, 30
Фреше (экстремальных значений, тип II, рис. 30, рис. 31)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	α – форма; β – масштаб		31
Экспоненциальное (показательное, рис. 32, а)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	λ – масштаб	1, 6, 8, 11, 14, 21–24, 26–28, 30, 36, 40, 41, 43–46	39
Экстремальных значений модифицированное (рис. 32, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\exp(x)-1}{\lambda} + x\right), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	λ – форма	4	
Эрланга (рис. 33)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$	α – форма; λ – масштаб	43	

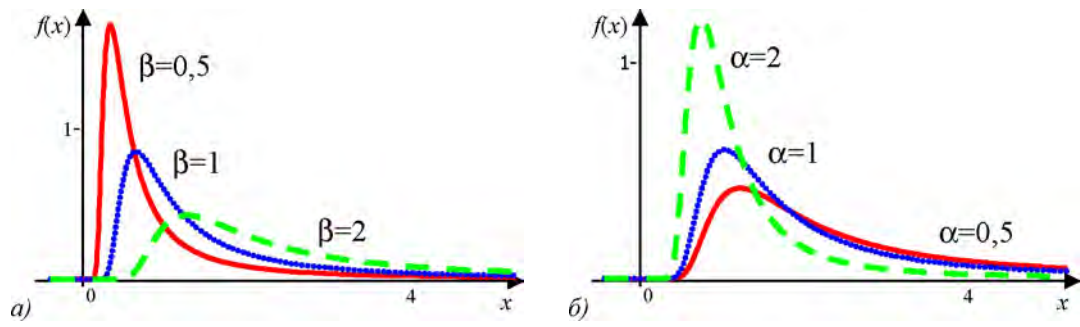


Рис. 11. Графики α -распределения с различными значениями параметров: а) $\alpha=0,5$; б) $\beta=2$

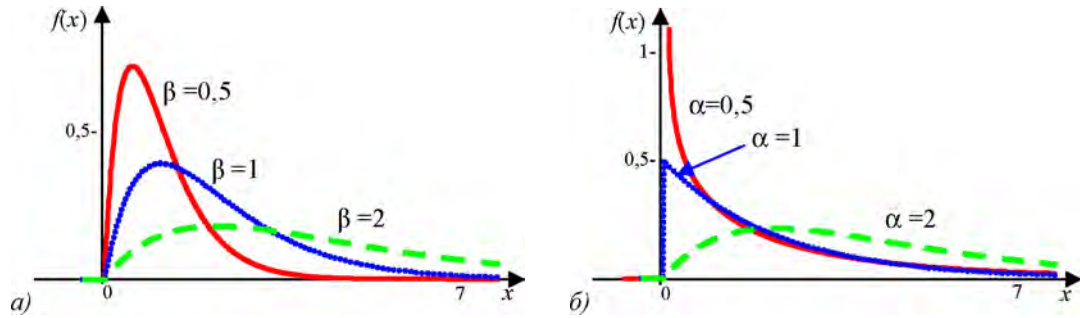


Рис. 12. Графики Γ -распределения с различными значениями параметров: а) $\alpha=2$; б) $\beta=2$

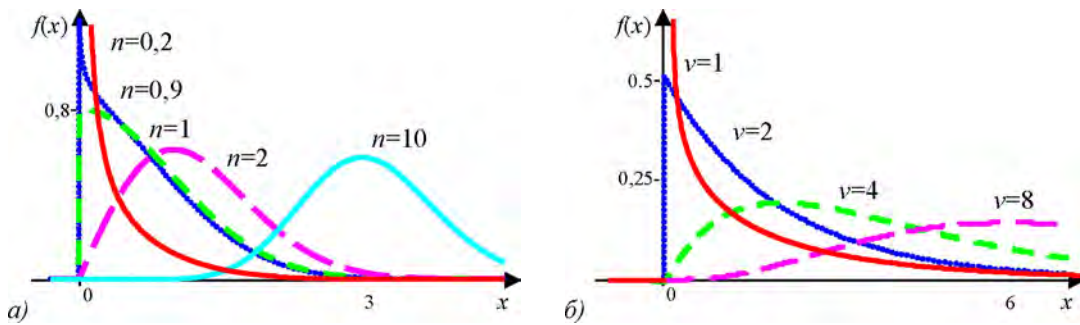


Рис. 13. Графики а) χ^2 -распределения; б) χ^2 -распределения с различными значениями параметра

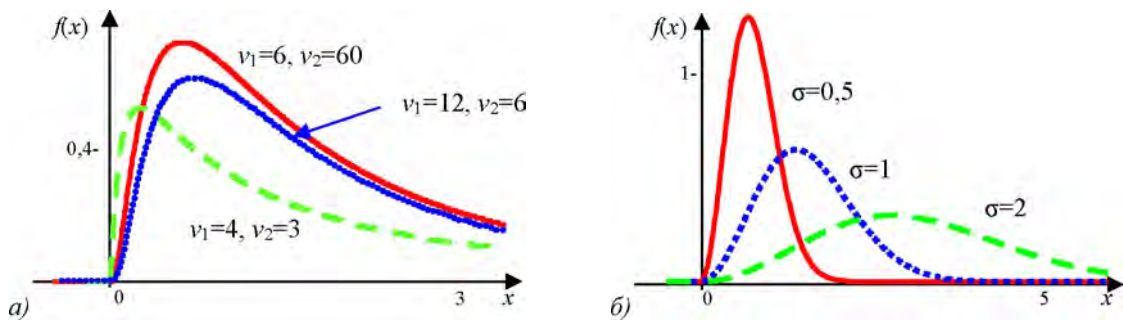


Рис. 14. Графики а) F -распределения Фишера; б) Максвелла с различными значениями параметров

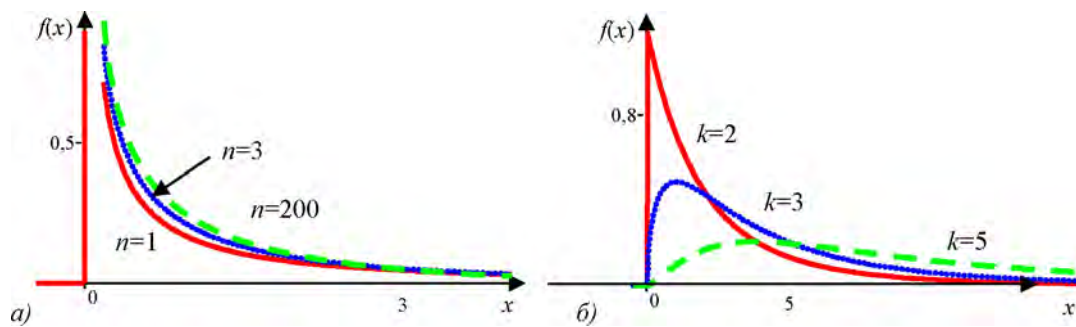


Рис. 15. Графики T^2 -распределения Хотеллинга с различными значениями параметров:
а) $k = 1$; б) $n = 1$

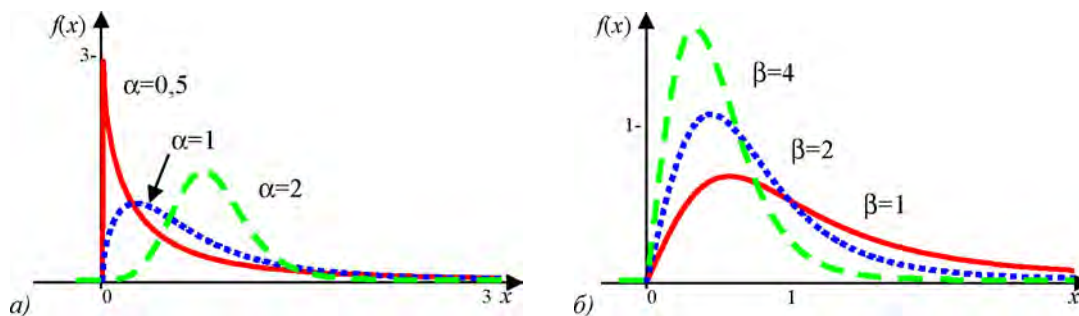


Рис. 16. Распределение Берра: а) $\beta=1$; б) $\alpha=2$

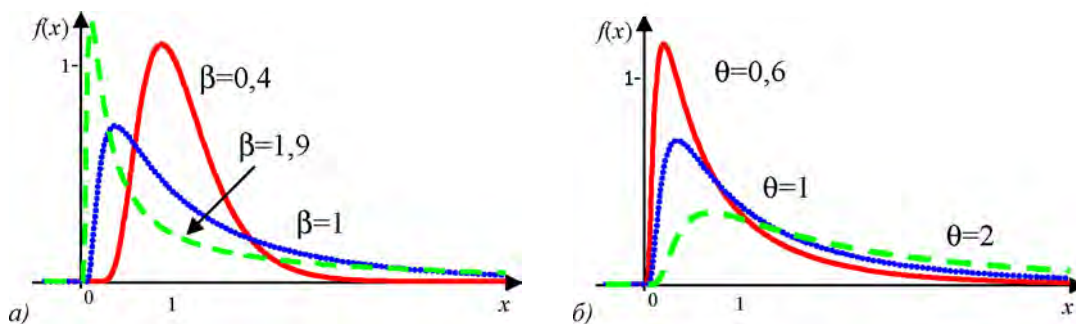


Рис. 17. Распределение Бирнбаума-Саундерса: а) $\theta=1$; б) $\beta=1$

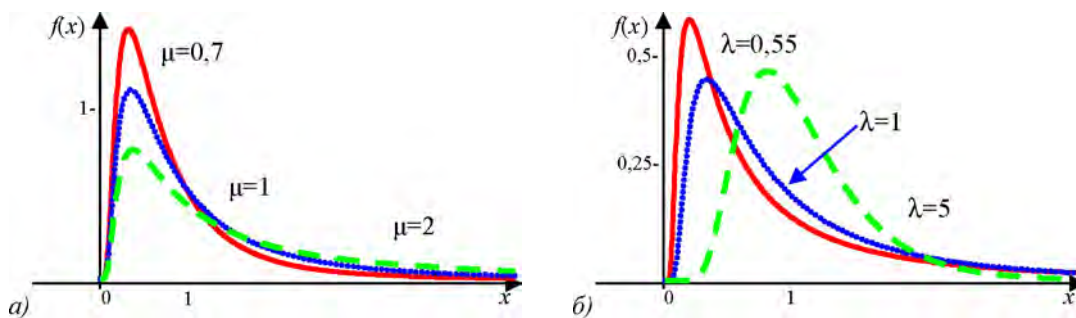


Рис. 18. Обратное гауссовское распределение (распределение Вальда): а) $\lambda=1$; б) $\mu=1$

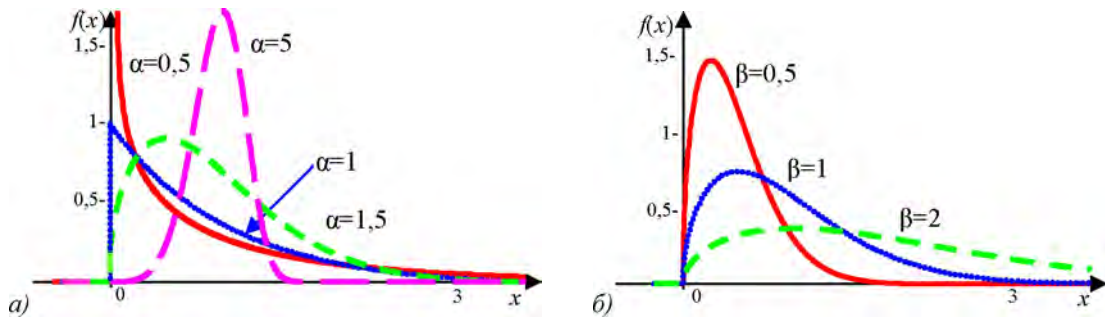


Рис. 19. Распределение Вейбулла-Гнеденко: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1,5$

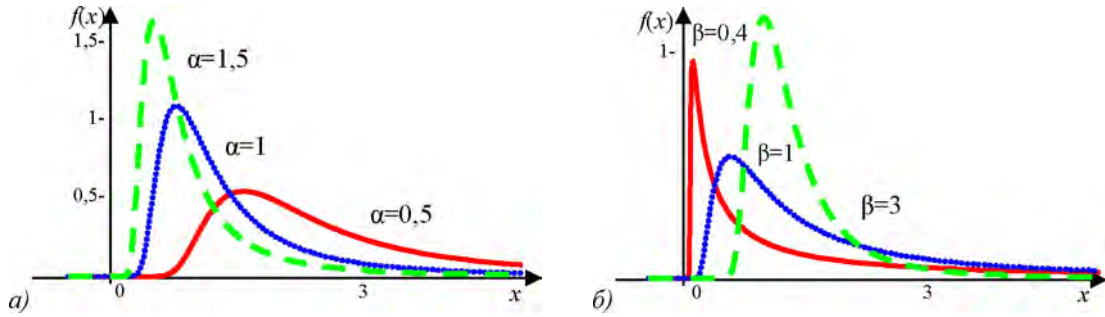


Рис. 20. Гиперэкспоненциальное распределение: а) $\beta=2$; $\lambda=0$; б) $\alpha=1$; $\lambda=0$

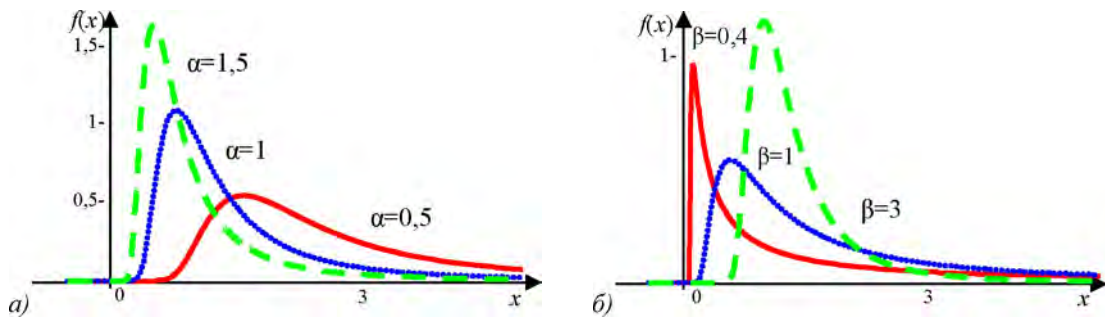


Рис. 21. Инверсное распределение Вейбулла: а) $\beta=2$; $\lambda=0$; б) $\alpha=1$; $\lambda=0$

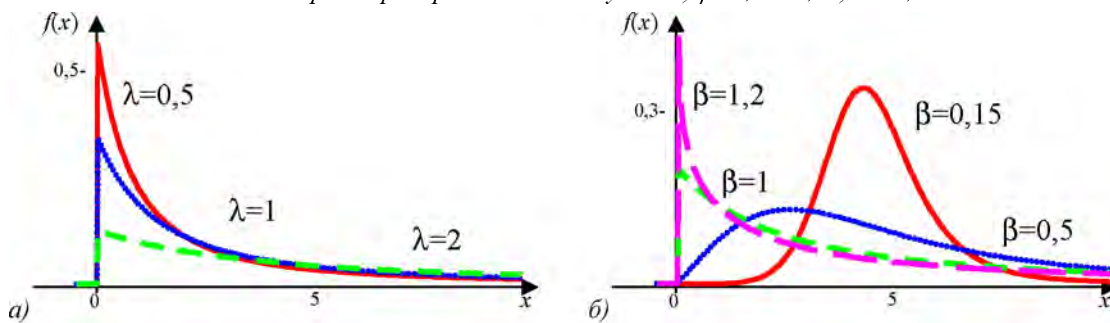


Рис. 22. Лог-логистическое распределение (вариант [43]): а) $\beta=1$; б) $\lambda=1,5$

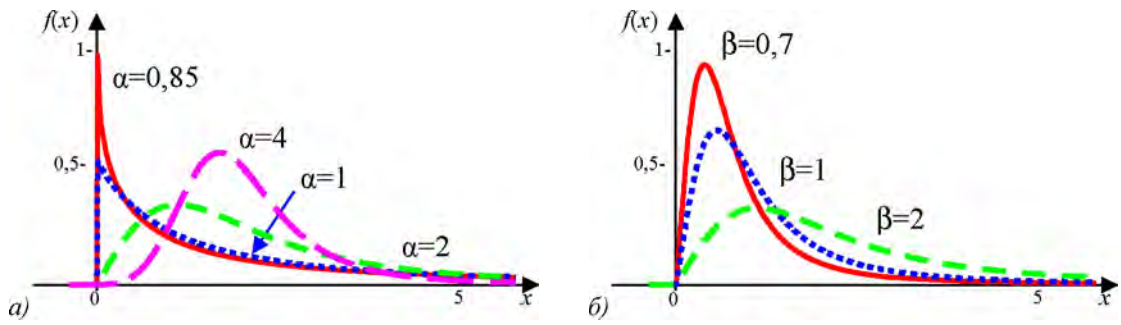


Рис. 23. Лог-логистическое распределение (вариант [13]): а) $\beta=2$; б) $\alpha=2$

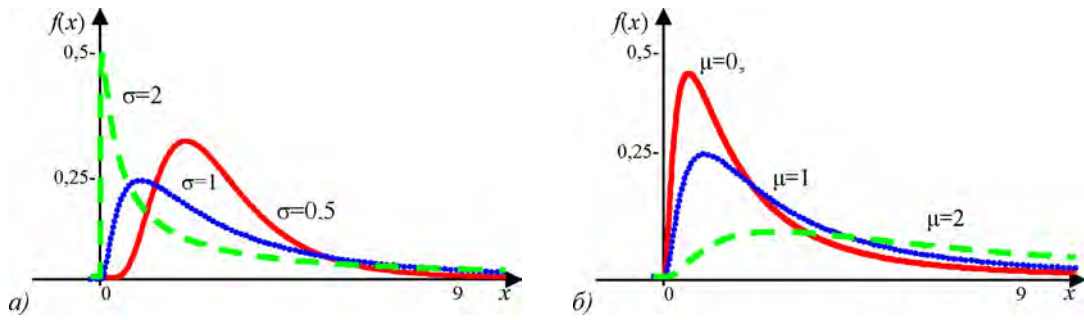


Рис. 24. Логнормальное распределение: а) $\mu=1$; б) $\sigma=1$

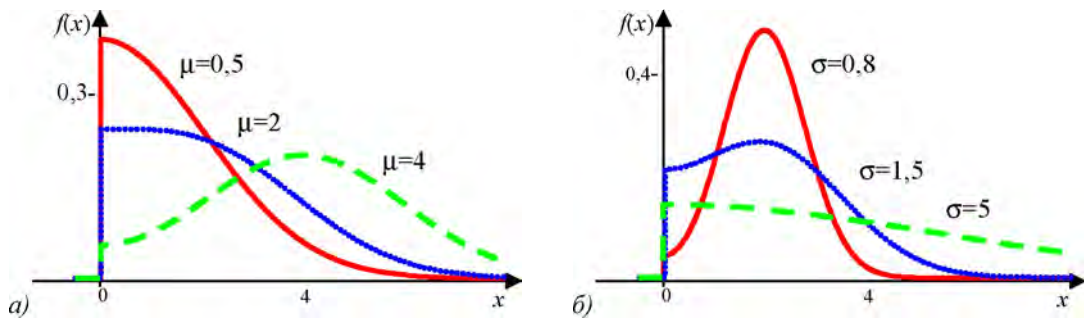


Рис. 25. Нормальное сложное распределение: а) $\sigma=2$; б) $\mu=2$

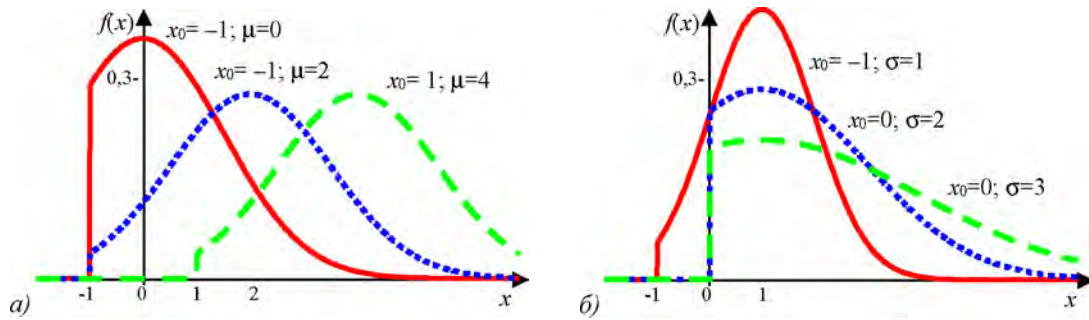


Рис. 26. Нормальное распределение, усеченное слева в точке x_0 : а) $\sigma=1,5$; б) $\mu=1$

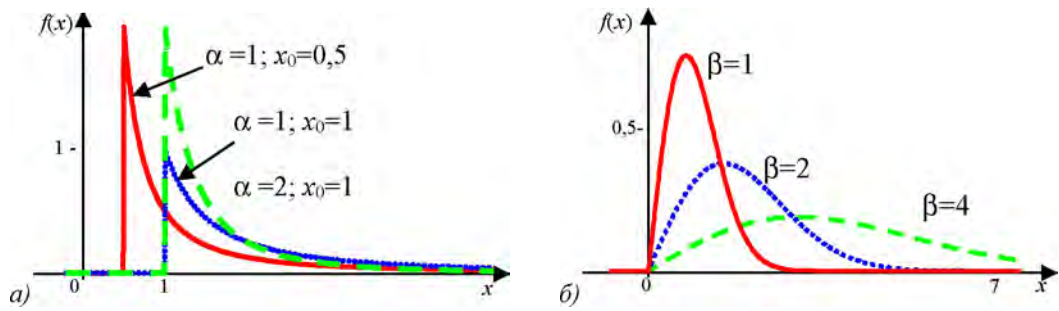


Рис. 27. Распределения а) Парето; б) Рэлея с различными значениями параметров

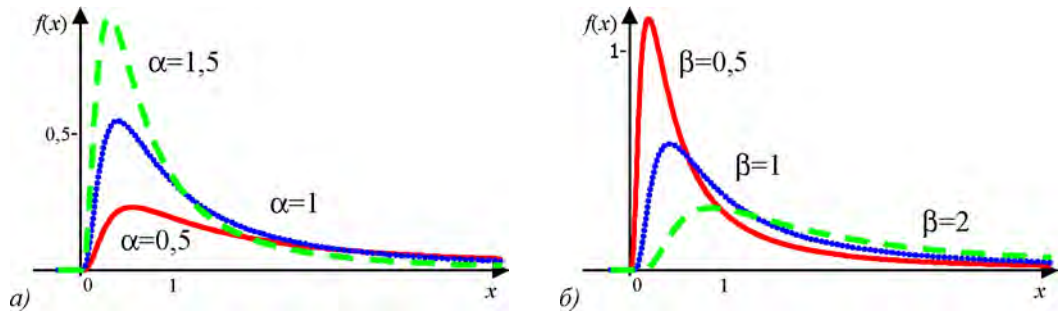


Рис. 28. Распределение Пирсона типа V с различными значениями параметров: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1$

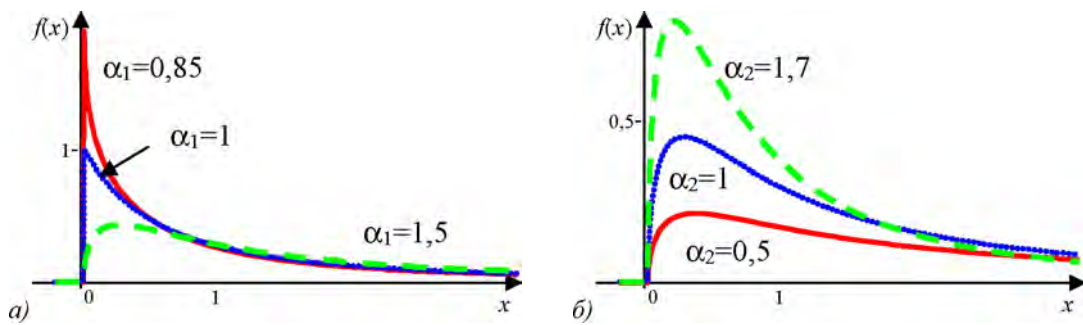


Рис. 29. Распределение Пирсона типа VI: а) $\alpha_2=1$; $\beta=1$; б) $\alpha_1=1,5$; $\beta=1$

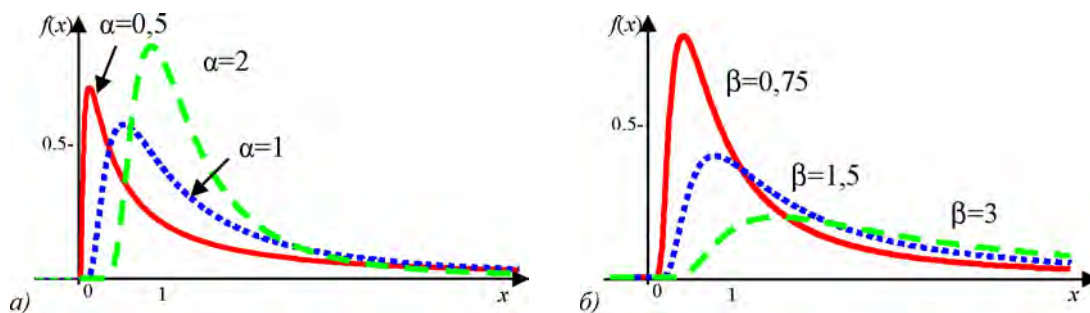


Рис. 30. Распределение Фреше с различными значениями параметров: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1$

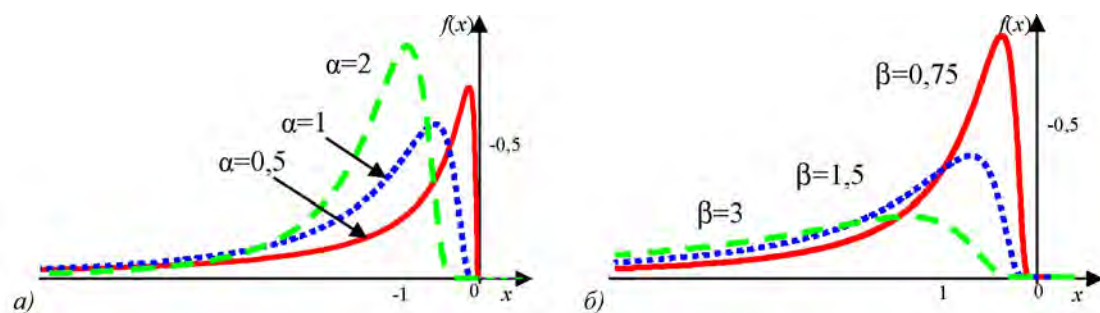


Рис. 31. Линейное преобразование распределения Фреше с коэффициентом $b=-1$: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1$

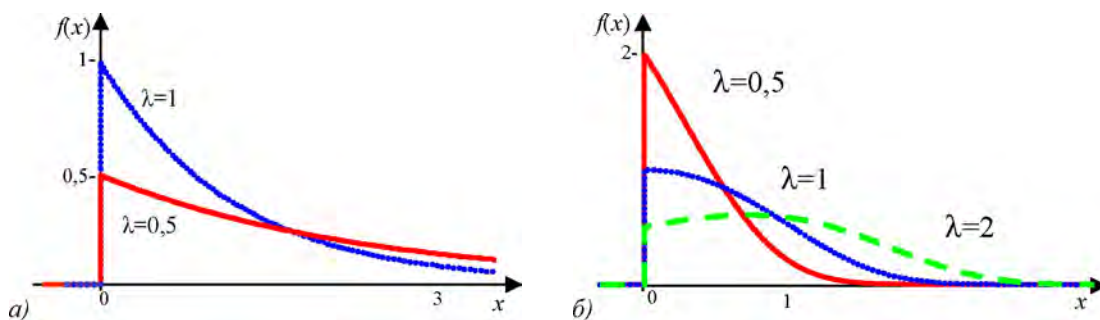


Рис. 32. Графики а) экспоненциального распределения; б) модифицированного распределения экстремальных значений с различными значениями параметра

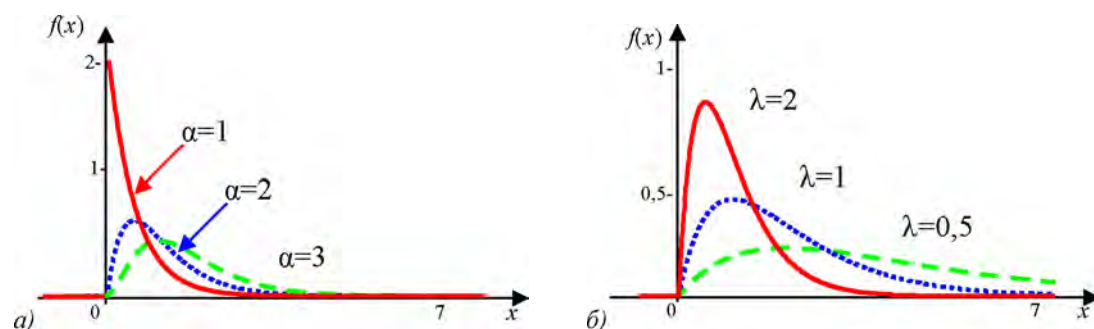


Рис. 33. Графики распределения Эрланга с различными значениями параметров: а) $\lambda=2$; б) $\alpha=2$

Таблица 3

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывных случайных величин, областью значений которых является отрезок или интервал конечной длины

Распределение	Функция плотности распределения	Параметры	Источники с аналогичной функцией распределения	
			и параметрами	но другими именами параметров
1	2	3	4	5
В (бета, рис. 34)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}}{B(\nu, \omega)}, & x \in (0; 1); \\ 0, & x \notin (0; 1). \end{cases}$	ν, ω – форма	28, 35, 44–46	5, 6, 8, 12–14, 23, 30, 32, 39–41, 43

L- Сосновского (рис. 35)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\gamma[1-(1-x)\eta]^{\gamma-1}}{(1-x)^{1-\eta}}, & x \in [0; 1]; \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$	η, γ – форма	30	
Арксинуса обобщенное (рис. 36, а)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi} x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}, & x \in (0; 1); \\ 0, & x \notin (0; 1). \end{cases}$	α – фор- ма	6	
Вон Мизеса (рис. 37)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(b \cdot \cos(x-a))}{2\pi \cdot BesselI(0, b)}, & x \in [0; 2\pi] \\ 0, & x \notin [0; 2\pi] \end{cases}$	a – мода, b – фор- ма	37	
Джонсона связанное (рис. 38)	$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha_1 + \alpha_2 \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^2\right)}{\alpha_2^{-1}(b-a)^{-1}(x-a)(b-x)\sqrt{2\pi}}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	α_1, α_2 – форма; a – по- ложение; $(b-a)$ – масштаб	13	
Равномерно е (рис. 36, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	a – мин., b – макс. значение	6-8, 11-13, 16, 21- 26, 28, 39, 41, 43-46	30
Степенное (рис. 39, а)	$f(x) = \begin{cases} \frac{c \cdot x^{c-1}}{b^c}, & x \in [0; b]; \\ 0, & x \notin [0; b] \end{cases}$	b – макс. значе- ние, c – форма	37	
Трапецеида льное (рис. 39, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b+d-a-c)(c-a)}, & x \in [a, c]; \\ \frac{2}{(b+d-a-c)}, & x \in (c, d]; \\ \frac{2(b-x)}{(b+d-a-c)(b-d)}, & x \in (d, b]; \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	a – мин., b – макс. значе- ние; c, d – коорд. верхн. основа- ния тра- пеции		
Трапеции прямоуголь- ной (рис. 40, а)	$f(x) = \begin{cases} a+2x(1-a), & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$	a – вы- сота ос- нования слева.	13	
Треугольное (Симпсона, рис. 40, б)	$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & x \in [a, c]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & x \in (c, b] \end{cases}$	a – мин., b – макс., c – наиболее вероят- ное зна- чение	13, 43	

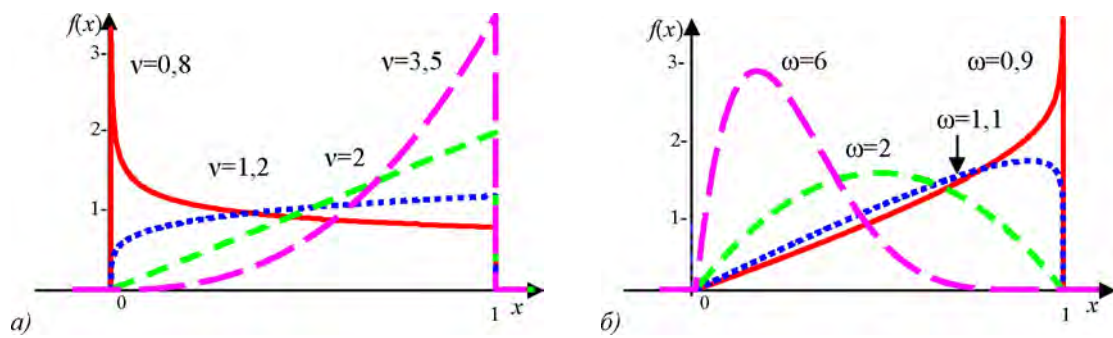


Рис. 34. Графики V -распределения с различными значениями параметров: а) $\omega = 1$; б) $v = 2$

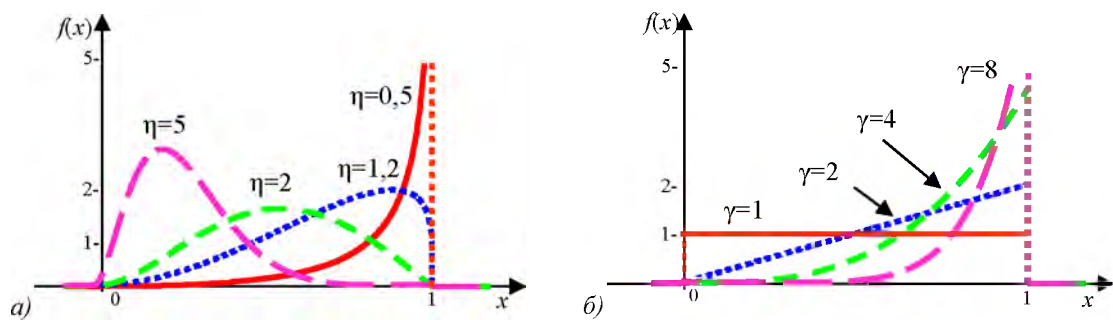


Рис. 35. Графики L -распределения Сосновского с различными значениями параметров: а) $\gamma=3$; б) $\eta=1$

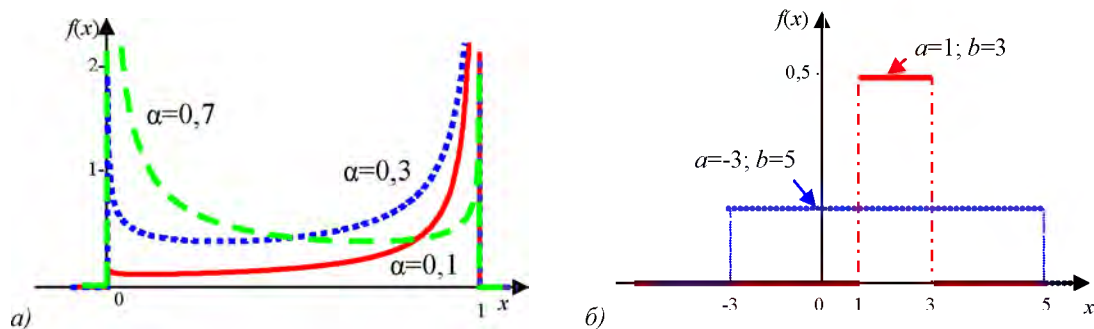


Рис. 36. Графики а) арксинуса обобщенного распределения; б) равномерного распределения

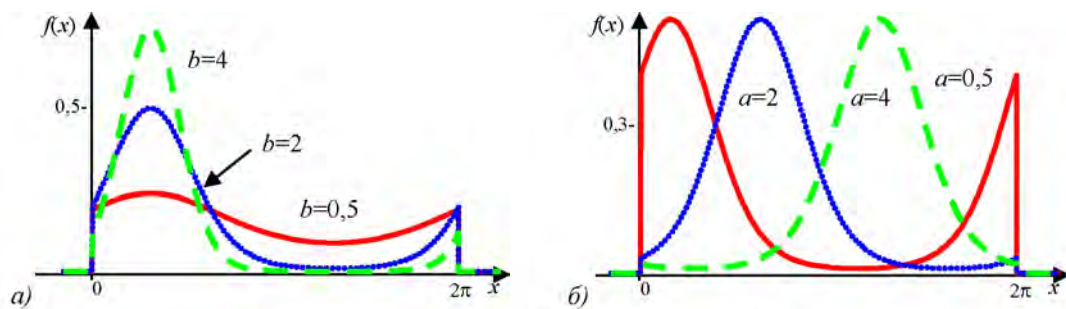


Рис. 37. Графики распределения Вон-Мизеса с различными значениями параметров: а) $a=1$; б) $b=2$

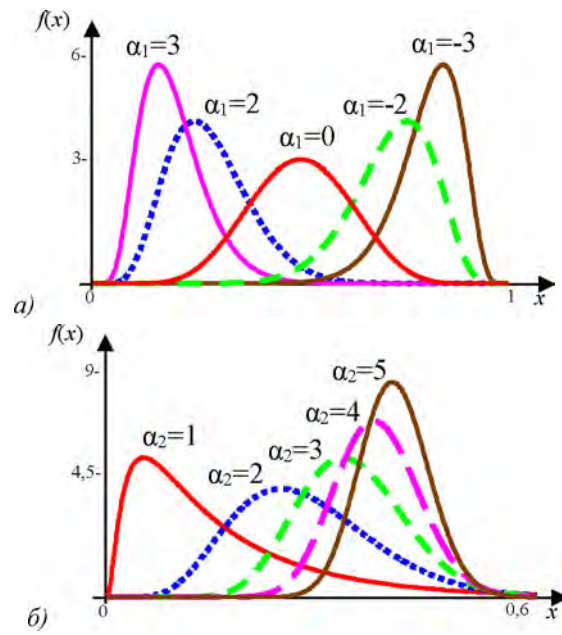


Рис. 38. Графики связанного распределения Джонсона: а) $a = 0, b = 1, \alpha_2=2$; б) $a = 0, b = 1, \alpha_1=2$

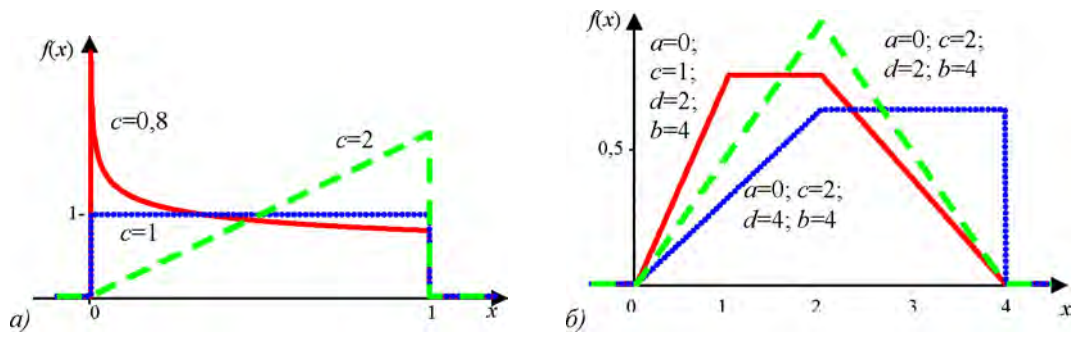


Рис. 39. Графики а) степенного распределения (при $b=1$); б) трапецидального распределения

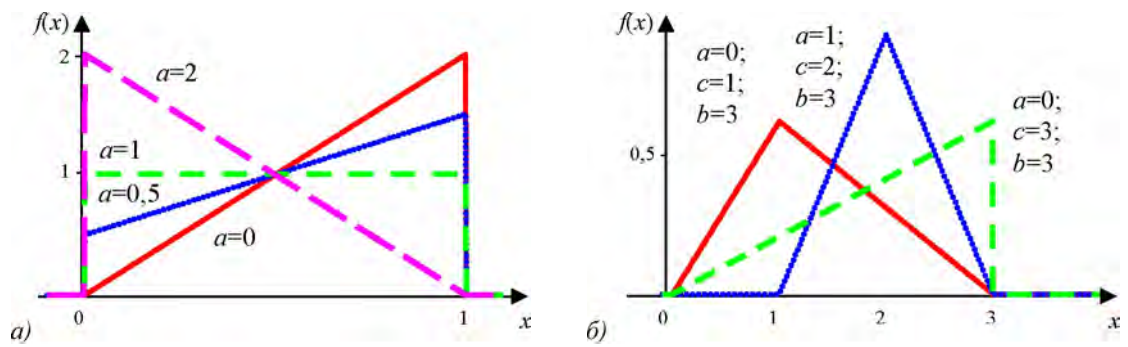


Рис. 40. Графики а) распределения прямоугольной трапеции; б) треугольного распределения

Таблица 4

Рекомендуемые варианты вероятностей значений $P(x)$
некоторых типовых распределений дискретных случайных величин

Распределение	Вероятности значений дискретных случайных величин	Параметры	Источники с аналогичной функцией $P(x)$	
			и параметры	но другими именами параметров
1	2	3	4	5
Бернулли (рис. 41, а)	$P(\xi = x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0; \\ p, & x = 1. \end{cases}$	p – вероятность события	13, 37, 38, 43	
Биномиальное (рис. 42)	$P(\xi = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x},$ $x = 0, 1, 2, \dots, n.$	n – количество испытаний Бернулли; p – вероятность успеха	4, 5, 8, 14, 36, 38, 43–45	13
Бореля-Таннера (рис. 41, б)	$P(\xi = x) = \frac{k}{(x - k)!} x^{x-k-1} e^{-\alpha x} \alpha^{x-k},$ $x = k, k + 1, k + 2, \dots$	α – форма; k – мин. значение	6	18, 25
Вырожденное (рис. 43, а)	$P(\xi = \alpha) = 1.$	α – значение величины	6	
Геометрическое (рис. 43, б)	$P(\xi = x) = p(1 - p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$	p – вероятность успеха	4, 6, 37, 43	
Гипергеометрическое (рис. 44)	$P(\xi = x) = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n},$ $x = \max\{0, n - M\}, 1, 2, \dots, \min\{M, n\}.$	N – объем ген. Совок упности, M – количество отмеченных элементов, n – объем выборки	6, 8, 23, 31	14, 28, 32, 37, 38, 43
Дискретное равномерное (рис. 45, а)	$P(\xi = x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a + 1}, & x \in [a, b], \quad x \in Z; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$	a – минимальное, b – максимальное значение	37, 43	
Логарифмическое (рис. 45, б)	$P(x) = -\frac{q^x}{x \cdot \ln(1 - q)}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$	q – вероятность события	6, 14	38
Отрицательное биномиальное (Паскаля, рис. 46)	$P(\xi = x) = C_{r+x-1}^x p^r (1 - p)^x,$ $x = 0, 1, 2, \dots$	r – количество успехов; p – вероятность	6	4, 13, 16, 28, 31, 37–39, 43

Отрицательное гипергеометрическое (рис. 47)	$P(\xi = x) = \frac{C_{x+m-1}^x \cdot C_{N-m-x}^{M-m}}{C_N^M},$ $x = 0, 1, 2, \dots, N - M.$	успеха N – объем ген. совок упности, M – число отмеченных элементов, m – требуемое число отмеченных элементов	5, 6	
Пойа (рис. 49)	$P(\xi = x) = \frac{C_{(b/c)+x-1}^x \cdot C_{(r/c)+n-x-1}^{n-x}}{C_{((b+r)/c)+n-1}^n},$ $x = 0, 1, 2, \dots, n.$	b – количество «черных», r – «красных», n – извлекаемых шаров, c – возвращаемых вместе с выбранным того же цвета	6, 33	
Пуассона (рис. 48)	$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$	λ – математическое ожидание	4, 5, 8, 14, 28, 33	31, 36, 43

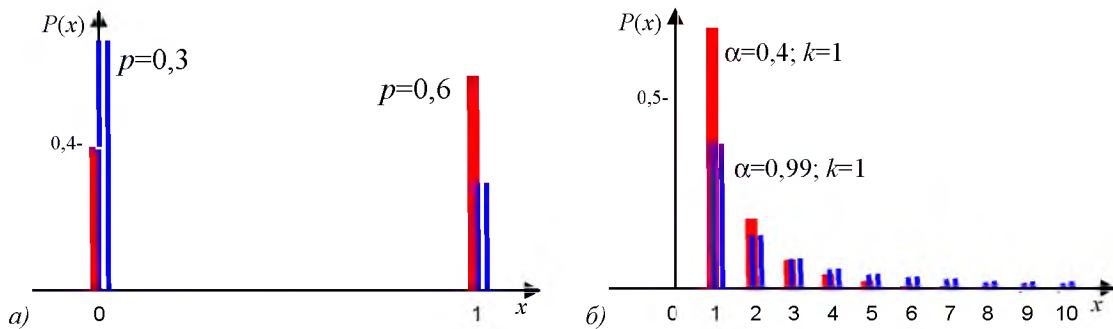


Рис. 41. Столбцовые диаграммы распределения а) Бернулли; б) Бореля-Таннера

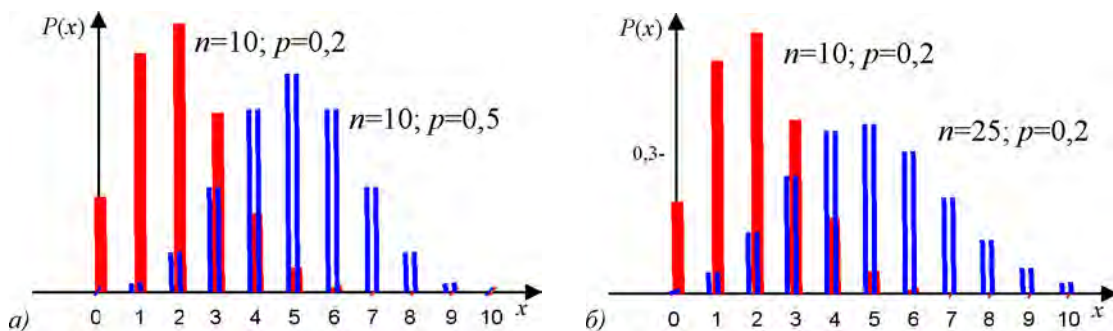


Рис. 42. Столбцовые диаграммы биномиального распределения для различных значений параметров

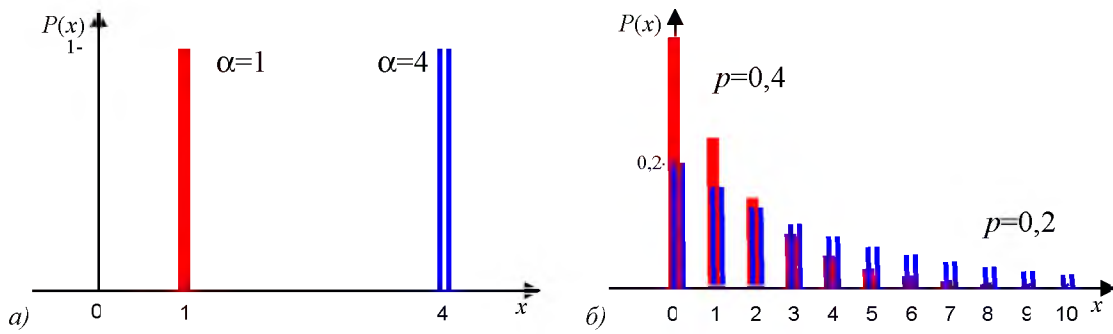


Рис. 43. Столбцовые диаграммы: а) вырожденного; б) геометрического распределения

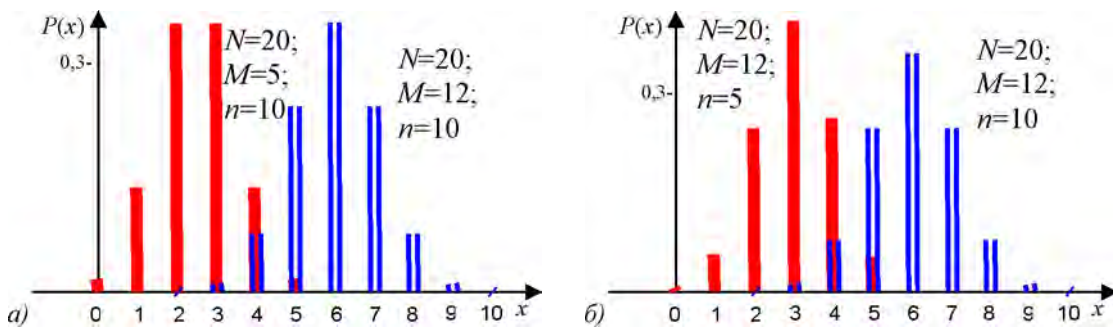


Рис. 44. Столбцовые диаграммы гипергеометрического распределения

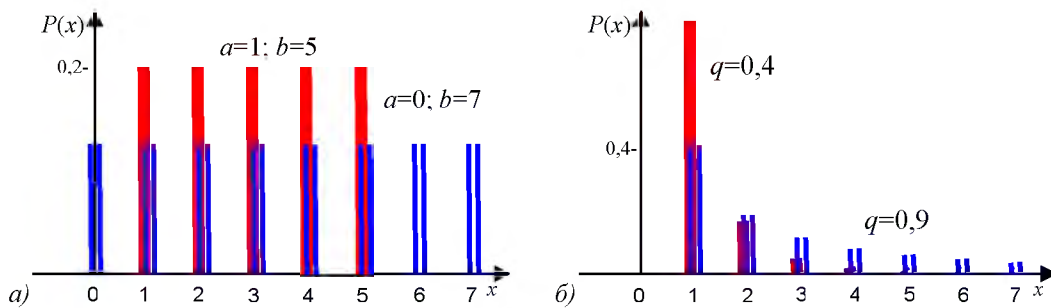


Рис. 45. Столбцовые диаграммы а) дискретного равномерного; б) логарифмического распределения

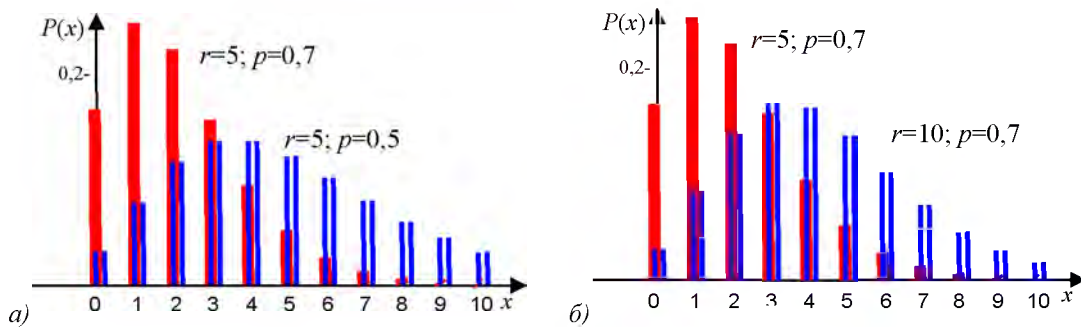


Рис. 46. Столбцовые диаграммы отрицательного биномиального распределения (Паскаля)

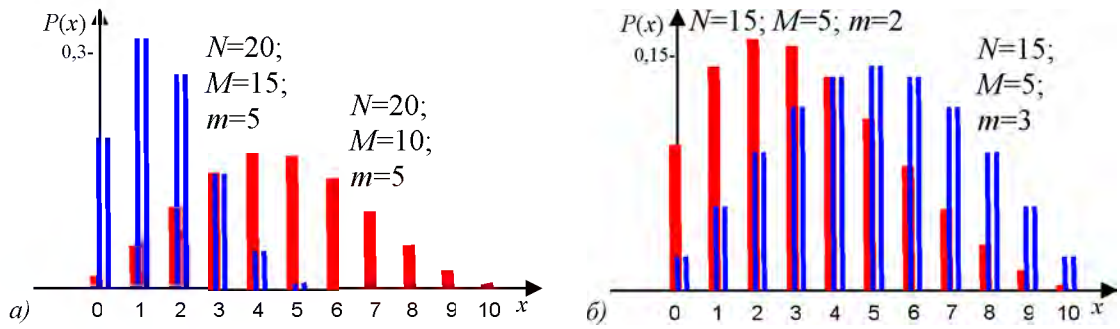


Рис. 47. Столбцовые диаграммы отрицательного гипергеометрического распределения

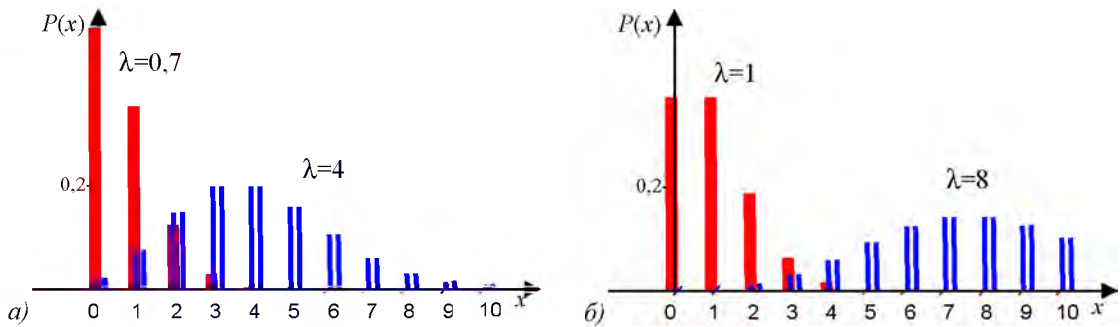


Рис. 48. Столбцовые диаграммы распределения Пуассона для различных значений параметра

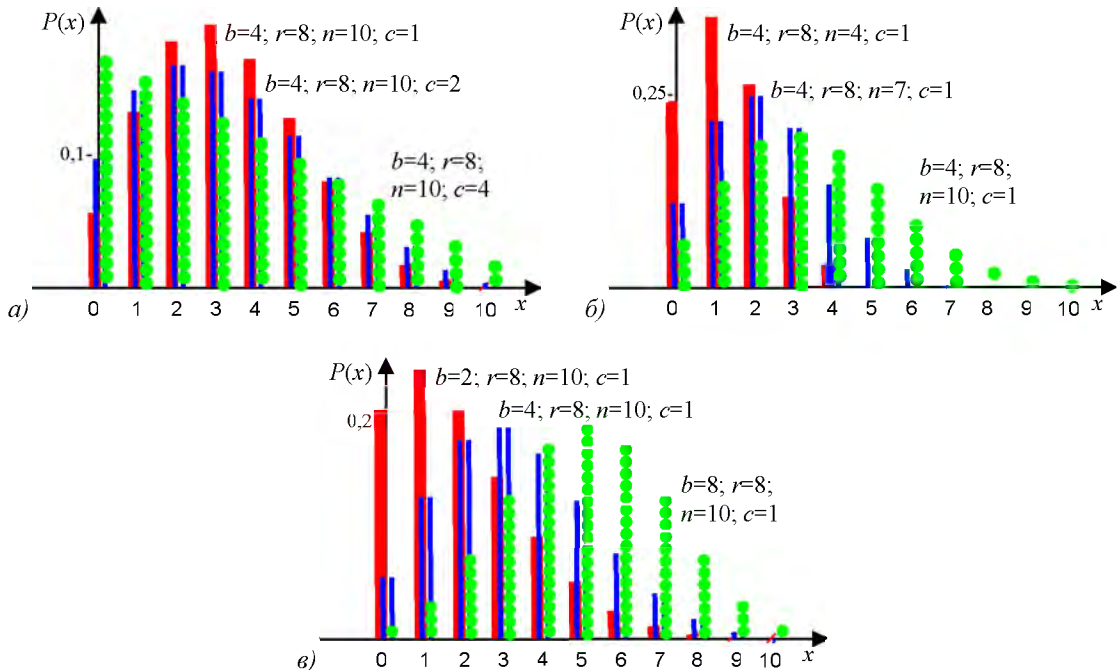


Рис. 49. Столбцовые диаграммы распределения Пуассона для различных значений параметров

Возможности линейного преобразования случайных величин

Применение к случайной величине ξ линейного преобразования $b(\xi-a)$ позволяет сместить функцию ее распределения и характеристики положения (минимальное и максимальное значение, математическое ожидание, моду, квантили) на

a единиц вправо. При этом параметр b определяет масштаб линейного преобразования и влияет на характеристики рассеяния.

Параметры линейного преобразования a и b зачастую являются исторически сложившимися параметрами распределения случайной величины. Так параметры нормального распределения μ и σ – суть параметры линейного преобразования стандартной нормальной случайной величины (см. рис. 9). Также известны, например, вариант 4-х параметрического В-распределения, где помимо традиционных параметров формы (ν и ω) используются параметры линейного преобразования, изменяющие интервал возможных значений случайной величины [40, 41, 43].

При отрицательных значениях параметра b функция плотности распределения величины $b(\xi-a)$ является зеркальным отображением функции плотности распределения величины $|b|(\xi-a)$ относительно прямой $x=a$. Полученные таким преобразованием величины часто имеют новые свойства в сравнении с исходными величинами. Это демонстрируют, например, два варианта распределения Гумбеля – предельного распределения экстремальных значений типа I для максимальных и минимальных значений соответственно (см. рис. 3, 4). Применяя линейное преобразование $b(\xi-a)$ при $b<0$ к случайной величине, подчиняющейся, например, распределению Вейбулла или Фреше (см. рис. 30) можно изменить область ее возможных значений на полуинтервал с верхней границей (см. рис. 31).

Заключение

В работе представлен обширный справочный материал по типовым распределениям случайных величин. Обоснованы критерии, в соответствии с которыми среди множества вариантов функции некоторого распределения предлагается один, рекомендуемый к дальнейшему использованию в научной и учебно-методической работе. Важно, что основным критерием является реализация выбранного варианта функции распределения в пакетах статистического анализа данных и моделирования, используемых в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. / А.М. Андронов, Е.А. Копытов, Л.Я. Гринглаз. СПб.: Питер, 2004. 461 с.
2. Аффифи, А. Статистический анализ: подход с использованием ЭВМ. / А. Аффифи, С. Эйзен. М.: Мир, 1982. 486 с.
3. Байхельт, Ф. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. / Ф. Байхельт, П. Франкен. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
4. Барлоу, Р., Прошан Ф. Математическая теория надёжности. Пер. с англ., под ред. Б.В. Гнеденко. / Р. Барлоу, Ф. Прошан. М.: Советское радио, 1969. 488 с.
5. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики. / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. М.: Наука, 1983. 416 с.
6. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. Репр. изд. 912 с.
7. Герасимович, А.И. Математическая статистика. / А.И. Герасимович. Мн.: Вышэйшая школа, 1983. 275 с.
8. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надёжности. / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. 523 с.

9. ГОСТ 27.005–97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. Мн.: Госстандарт, 2005. 15 с.
10. Ефремова, Н.Ю. Оценка неопределенности в измерениях: Практическое пособие. / Н.Ю. Ефремова. Мн.: БелГИМ, 2003. 50 с.
11. Каазик, Ю.Я. Математический словарь. / Ю.Я. Каазик. Таллинн: Валгус, 1985. 296 с.
12. Капур, К. Надежность и проектирование систем. / К. Капур, Л. Ламберсон. М.: Мир, 1980. 606 с.
13. Кельтон, В. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. / В. Кельтон, А. Лоу. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа ВHV, 2004. 847 с.
14. Кендалл, М. Теория распределений. / М. Кендалл, А. Стюарт. М.: Наука, 1966. 587 с.
15. Кендалл, М. Статистические выводы и связи. / М. Кендалл, А. Стюарт. М.: Наука, 1973.
16. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. М.: Физматлит, 2006. 813 с.
17. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970. 720 с.
18. Королюк, В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
19. Крамер, Г. Математические методы статистики. / Г. Крамер. М.: Мир, 1975. 648 с.
20. Ликеш, И. Основные таблицы математической статистики. / И. Ликеш, И. Ляго. М.: Финансы и статистика, 1985. 356 с.
21. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М.Виноградов. М.: Сов. энциклопедия. В 5-ти томах, 1977.
22. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10т. Т.2: Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б.В.Гнеденко. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
23. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10т. Т.5: Проектный анализ надежности / Под ред. В.И. Патрушева и А.И. Рембезы. М.: Машиностроение, 1988. 316 с.
24. Орлов, А.И. Прикладная статистика: учебник / А.И. Орлов. М.: Издательство «Экзамен», 2006. 671 с.
25. Оуэн, Д.Б. Сборник статистических таблиц. / Д.Б. Оуэн. М.: ВЦ АН СССР, 1973. 586 с.
26. Половко, А.М. Основы теории надежности. / А.М. Половко, С.В. Гуров. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
27. Решетов, Д.Н. Надежность машин. / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. М. Высш. шк., 1988. 238 с.
28. Серегина, В.С. Решение инженерных задач методами математической статистики: Учеб. пособие для студентов всех спец. / В.С. Серегина. Гомель, БелГУТ, 1994. 107 с.
29. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика, 1989, 1990.
30. Сосновский, Л.А. Элементы теории вероятностей, математической статистики и теории надежности: Учеб. пособие. / Л.А. Сосновский. Гомель, БелГУТ, 1994. 146 с.

31. СТБ ГОСТ Р 50779.10–2001 (ИСО 3534.1–93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. Мн.: Госстандарт, 2001. 44 с.
32. Уилкс, С. Математическая статистика. / С. Уилкс. М.: Наука, 1967. 632 с.
33. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1, Т. 2: Пер. с англ. / В. Феллер. М.: Мир, 1984. 528 с.
34. Харин, Ю.С. Практикум на ЭВМ по математической статистике. / Ю.С. Харин, М.Д. Степанова. Мн.: "Университетское", 1987. 304 с.
35. Хастингс, Н. Справочник по статистическим распределениям. / Н. Хастингс, Дж. Пикок. М.: Финансы и статистика, 1987. 95 с.
36. Шор, Я.Б. Таблицы для анализа и контроля надежности. / Я.Б. Шор, Ф.И. Кузьмин. Советское радио, 1968. 288 с.
37. MapleSoft, Waterloo Maple Inc. (2005). Maple 10. Maple Help.
38. Mathematica, Wolfram Research Inc. (2005). Mathematica 5.2. Mathematica Help.
39. MathSoft, Inc. (2000). Mathcad 2001 Professional. Mathcad Help.
40. Microsoft, Inc. (2000). Microsoft Excel 2000. Справка по Microsoft Excel 2000.
41. Minuteman Software. (2001). GPSS World. Reference manual.
42. SPSS, Inc. (2004). SPSS V.13. Help.
43. StatPoint, Inc. (2005). STATGRAPHICS Centurion XV. Help System.
44. StatSoft, Inc. (2001). Statistica V.6. STATISTICA Electronic Manual.
45. StatSoft, Inc. (2001). Электронный учебник по промышленной статистике. Москва, StatSoft. WEB:
http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЗМА ПРИВОДА ЛЕСОПИЛЬНОЙ РАМЫ

Гмырак А.С., Матулевич А.И., Вихренко В.С.

The log frame with a new type of drive mechanism and plane motion of the saw frame is considered. The analytical expressions for kinematic characteristics are deduced. The dynamic forces on the log frame basement are calculated and compared for two types of log frames. It is shown that the new type of log frames is characterized by reduced dynamical forces. Calculations were performed within MathCAD program package.

На современном этапе развития рациональное использование энергетических ресурсов играет важную роль в лесопилении. Необходимым является минимизация энергетических затрат на получение готовой продукции, что может быть достигнуто внедрением новых технологий в производственный процесс, требующих в большинстве случаев частичной модернизации или полной замены лесопильного оборудования.

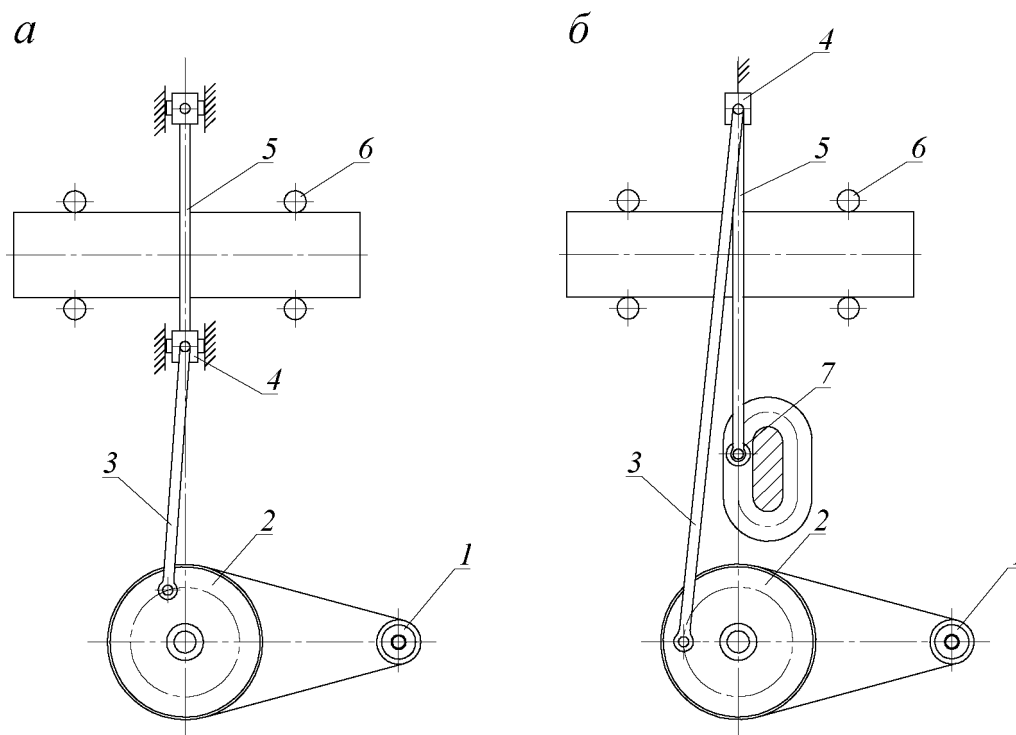


Рис 1. Кинематические схемы лесопильных рам: а) с центральным КПМ и возвратно-поступательным движением пильной рамки; б) с центральным КПМ и усложненной кинематикой пильной рамки. 1 – двигатель, 2 – кривошип, совмещенный с маховиком, 3 – шатун, 4 – ползун, 5 – пильная рамка, 6 – подающие вальцы, 7 – направляющий ролик.

В лесопилении наиболее широкое применение находят ленточнопильные станки, круглопильные комплексы проходного типа с плавающими пилами, лесопильные рамы (ЛПР). Все они характеризуются примерно одинаковыми удельными производственными затратами на кубометр полученных пиломатериалов. Однако в больших производственных масштабах наиболее эффективным остается использование ЛПР ввиду их высокой технологичности и ремонтпригодности.

ЛПР широко применяются в лесоперерабатывающих комплексах как на территории Республики Беларусь, так и за ее пределами. Наибольшее распространение получили ЛПР с центральным кривошипно-ползунным механизмом (КПМ) и поступательным движением пильной рамки (рис 1, а). Это, в первую очередь, связано с простотой конструкции и относительно небольшими затратами на их производство. Однако при работе ЛПР проявляются такие неблагоприятные эффекты, как большие динамические нагрузки на опорные и соединительные узлы, сильная вибрация, давление бревна на пилы на холостом ходу при непрерывной подаче, что приводит к сокращению ресурса работы и уменьшению производительности лесопильных рам. В связи с этим разработаны и внедрены в производство ЛПР с усложненной кинематикой пильной рамки [1] (рис. 1, б), в которых, кроме того, использованы прогрессивные материалы (в частности, антифрикционные и легкие сплавы). В результате достигается уменьшение динамической нагруженности ЛПР, уровня вибраций и воздействия на окружающие объекты. Однако инженерам удалось не в достаточной мере устранить большие нагрузки на опорные и соединительные узлы, сильную вибрацию и высокую металлоемкость конструкции. Эти эффекты накладывают ряд ограничений на ресурс работы и производительность лесопильных рам, снижая тем самым их конкурентоспособность.

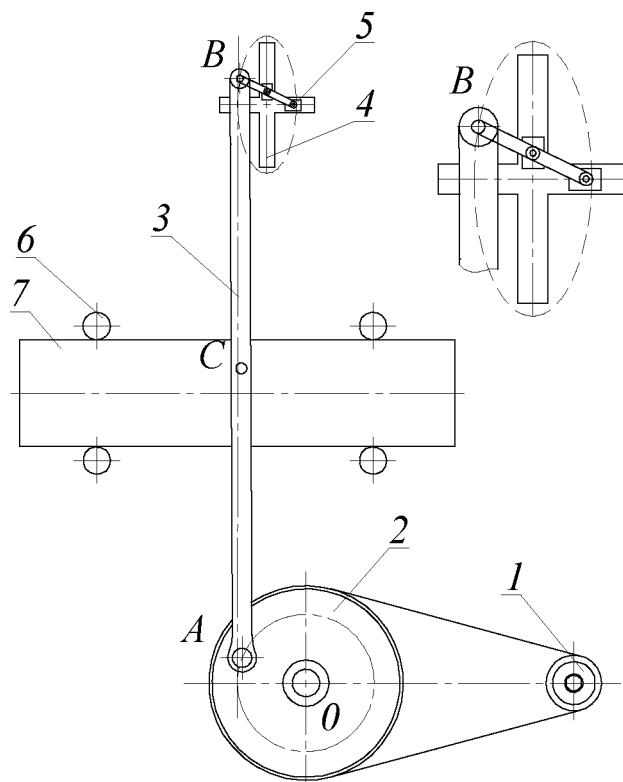


Рис 2. Кинематическая схема разработанного механизма лесопильной рамы: 1 – двигатель, 2 – шкив, совмещенный с маховиком, 3 – пильная рамка, 4 – направляющая эллипсографа, 5 – ползун эллипсографа, 6 – подающие вальцы, 7 – пиломатериал.

Исследования, проведенные в [2], показали, что для минимизации неблагоприятных эффектов необходимо заменить траекторию подвески пильной рамки на безударную - эллипсовидную, и отказаться от поступательного движения пильной рамки. На основании этого разработан новый тип движущего механизма пильной рамки с использованием эллипсографа в верхней подвеске и шкива, совмещенного с маховиком, в качестве нижней подвески (рис 2).

Для анализа эффективности применения разработанной кинематической схемы привода пильной рамки используем математическое моделирование процессов с применением программно-вычислительных модулей. Оно позволяет в кратчайшие сроки реализовать готовую математическую модель в программном модуле, выполнить ее обработку и сделать соответствующие выводы. С ее помощью можно реализовать не только математические расчеты, но и выполнить анимирование реально действующего механизма, что важно при проверке правильности составленной математической модели. Все это позволит сократить до минимума затраты на проектирование и разработку оптимальных режимов работы лесопильной рамы.

Математическую модель построим на основании принципа Даламбера, в соответствии с которым сумма активных сил, реакций связей и сил инерции, а также

сумма моментов указанных сил относительно произвольной точки (рассматривается плоская постановка задачи) равны нулю:

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{R}_i + \sum_{i=1}^n \Phi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k M(\mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^m M(\mathbf{R}_i) + \sum_{i=1}^n M(\Phi_i) = 0,$$

где Φ_i - силы инерции Даламбера, \mathbf{R}_i - реакции основания \mathbf{F}_i - активные силы.

Отметим, что пильная рамка 3 на рисунке 3 совершает плоскопараллельное движение и, помимо сил инерции, приложенных в центрах масс звеньев, необходимо также учесть моменты сил инерции относительно их центров масс

$$M_i^O = -J_i \ddot{\phi}_i,$$

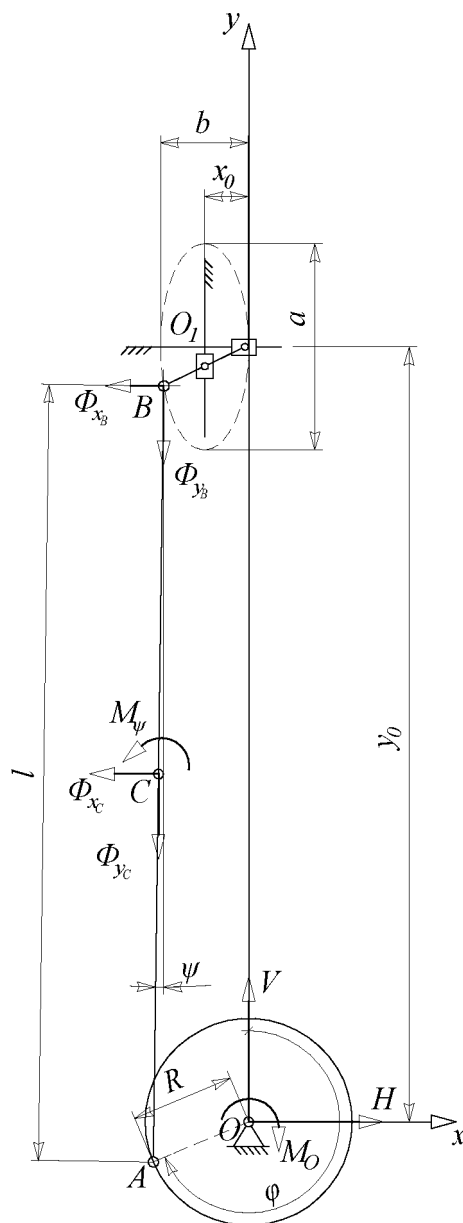


Рис 3. Схема распределения сил инерции в лесопильной раме

где J_i - центральный момент инерции соответствующего звена, $\ddot{\phi}_i$ - угловое ускорение звена.

Реакции основания ЛПР приведем к точке O , находящейся на оси вращения маховика, причем будем полагать, что центр масс последнего находится на оси вращения. Найдем горизонтальную (H) и вертикальную (V) реакции, и реактивный

момент (M_o). Именно они определяют величину воздействия ЛПР на основание в процессе её работы.

Силы инерции удобно представить их составляющими вдоль осей координат, определяемыми согласно выражениям

$$\Phi_{x_i} = m_i \ddot{x}_i, \Phi_{y_i} = m_i \ddot{y}_i,$$

где m_i, x_i, y_i - масса и координаты центра масс i -го звена. Знак минус учтен направлениями сил инерции на рисунке.

Моменты сил инерции определяются по формулам

$$M_o(\Phi_{x_i}) = y_i \Phi_{x_i}, M_o(\Phi_{y_i}) = -x_i \Phi_{y_i}.$$

Решая уравнения принципа Даламбера относительно искомых реакций и реактивного момента, получим:

$$V(t) = m_2 \ddot{y}_A + m_3 \ddot{y}_C + m_4 \ddot{y}_B, \quad (1)$$

$$H(t) = m_2 \ddot{x}_A + m_3 \ddot{x}_C + m_4 \ddot{x}_B, \quad (2)$$

$$M_o(t) = m_2 \ddot{x}_A y_A - m_2 \ddot{y}_A x_A + m_3 \ddot{x}_C y_C - m_3 \ddot{y}_C x_C + m_4 \ddot{x}_B y_B - m_4 \ddot{y}_B x_B + M_{\psi}. \quad (3)$$

где $x_A = R \sin \phi$, $x_B = x_A + l \sin \psi$, $x_C = x_A + \frac{l}{2} \sin \psi$, $y_A = R \cos \phi$, $y_B = y_A + l \cos \psi$,

$$y_C = y_A + \frac{l}{2} \cos \psi, \quad M_{\psi} = -m_3 l^2 \ddot{\psi} / 12. \quad \psi = \arctan \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Здесь m_i – масса i -го звена, R – радиус кривошипа, l – длина пильной рамки, ψ – угол наклона пильной рамки к вертикальной оси, ϕ – угол поворота маховика.

Для нахождения координат точек B и C через угол поворота кривошипа ϕ используем уравнение, определяющее положение точки B – уравнение эллипса

$$\frac{(y_B - y_{O_1})^2}{a^2} + \frac{(x_B - x_{O_1})^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

где x_{O_1} и y_{O_1} – координаты центра эллипса (точка O_1), a и b – полуоси эллипса.

Полагая, что $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$, полученные выражения дифференцируем дважды по времени согласно правилу

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\phi} \dot{\phi}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z}{d\phi^2} \dot{\phi}^2, \quad (5)$$

и подставляем результаты дифференцирования в уравнения реакций (1), (2) и реактивного момента (3).

Уравнения (1) – (3) характеризуют динамическое воздействие лесопильной рамы на основание, и позволяют оценить эффективность использования разработанной кинематической схемы (рис. 2) на основании сравнения с динамикой лесопильной рамы классического типа (рис 1, а), расчеты которой детально изложены в [3].

Результаты вычисления реакций лесопильной рамы нового и классического типа, как функций угла поворота при единичной угловой скорости маховика представлены на рисунке 4. Все величины на рисунках даны в единицах системы СИ. Геометрические характеристики и массы звеньев ЛПР двух типов приняты равными: это позволяет сопоставить влияние кинематических особенностей ЛПР на их динамические характеристики.

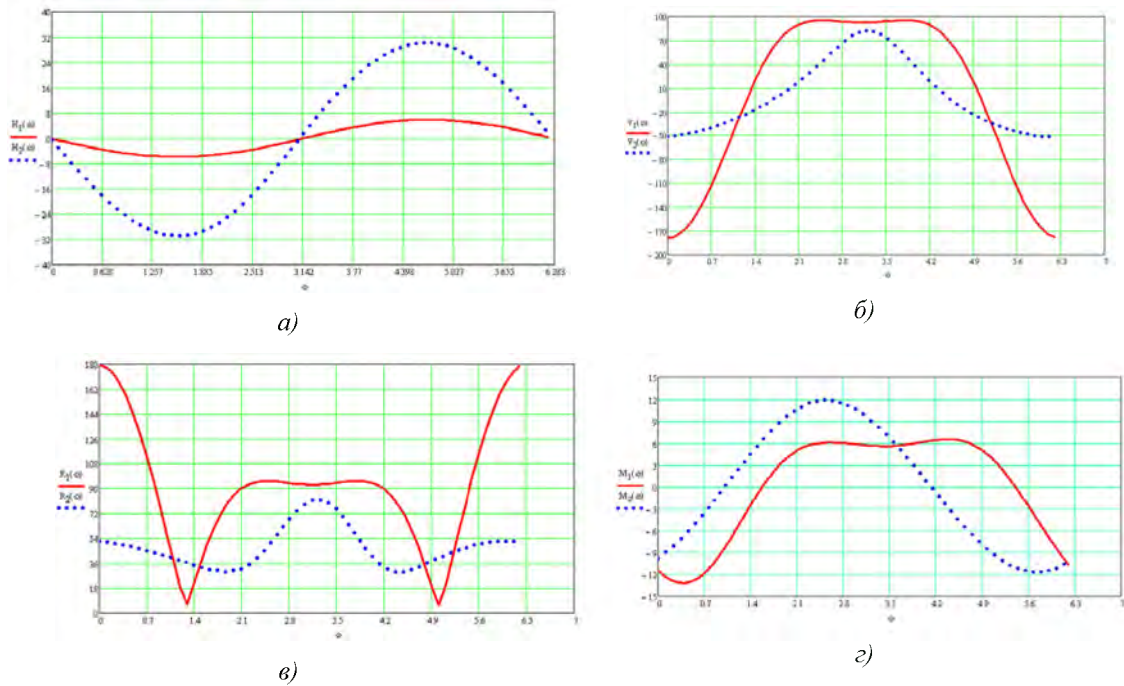


Рис 4. Графики зависимости реакций и реактивного момента от угла поворота ϕ :
 H_1, H_2 и V_1, V_2 – горизонтальная и вертикальная реакции ЛПР классического и нового типа; R_1, R_2 и M_1, M_2 – результирующая реакция и реактивный момент, соответственно

Анализ графиков показывает, что горизонтальная составляющая разработанной ЛПР (рис 4, а) существенно больше таковой для рамы классического типа но она сравнительно не велика. Что касается вертикальной составляющей (рис 4, б), то она составляет в среднем 60% от таковой для рамы классического типа. Момент сил инерции (рис. 4, г) изменяется по синусоидальному закону, и сопоставим по величине с моментом для рамы классического типа. Суммарная реакция (рис. 4, в) классической ЛПР превышает аналогичные реакции для нового типа ЛПР в 1,5-2 раза.

Основным показателем воздействия на основание является импульс результирующей реакции (рис. 5), который определяется, как

$$P_i = \sqrt{\left(\int H_i(\phi)d\phi\right)^2 + \left(\int V_i(\phi)d\phi\right)^2}.$$

Таким образом, конструкция ЛПР с предложенной кинематической схемой разгружена в среднем в 1,5-2 раза по сравнению с классической ЛПР, с точки зрения воздействия на основание и элементы конструкции. Это обусловлено, в основном, практически полной ликвидацией динамических воздействий на удвоенной частоте 2ω , свойственных ЛПР классического типа. Снижение динамических реакций оказывает положительный эффект с точки зрения снижения энергоемкости, так как уменьшается работа по преодолению сил сопротивления. Это позволяет применить менее мощный двигатель для привода механизма пиления лесопильной рамы.

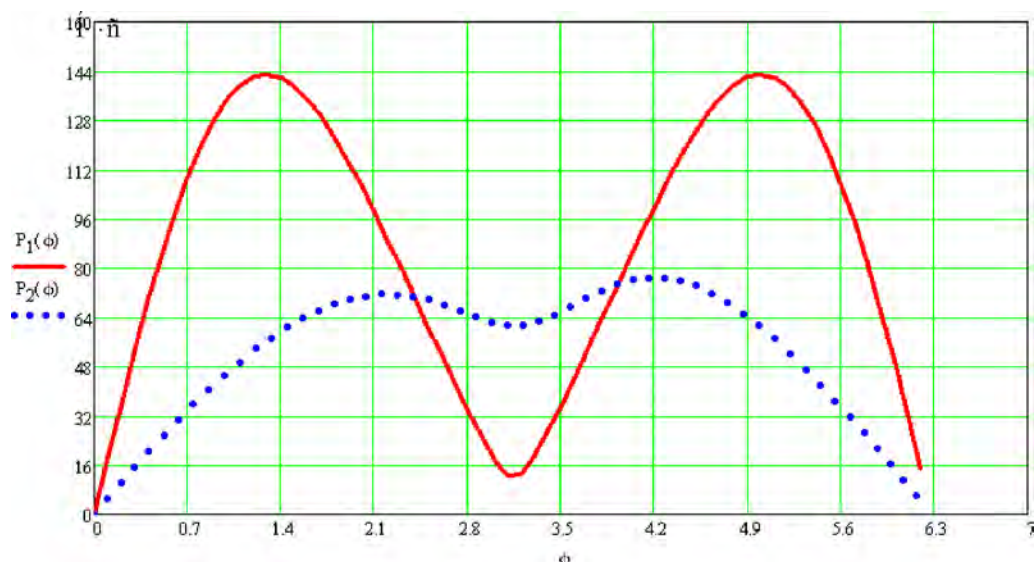


Рис 5. Графики зависимости импульсов от угла поворота ϕ :
 P_1 - импульс ЛПП классического типа; P_2 - импульс разрабатываемой ЛПП нового типа

Разработанная математическая модель лесопильной рамы и возможность использования профессионального пакета MathCAD обеспечивает возможность исследования различных режимов работы этого механизма, а также позволяет моделировать его различные варианты и вносить изменения в имеющуюся конструкцию, что в дальнейшем может существенно сократить финансовые, материальные и временные затраты при проектировании модернизированных вариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://www.wood.ru>, <http://www.nszavod.ru>.
2. Гмырак, А. С., Вихренко В.С. Сравнительный анализ динамических реакций основания двух типов лесопильных рам / Теоретическая и прикладная механика – Вып. 23. 2008 г.
3. Агапов А.И. Динамика процесса пиления древесины на лесопильных рамах. – Горький: ГГУ, 1999 г.
4. Амалицкий В.В. Деревообрабатывающие станки и инструменты.– М.: Академия, 2007.
5. Дьяконов В.М. Специальный справочник по MathCAD. – СПб: Петербург, 2006.

**ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕКРУГОВОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО
НАГРУЖЕНИЯ**

Ботогова М.Г.

The lowest spectrum of free vibrations of non-circular cylindrical shell subjected to the axial static loads is investigated. The vibration is supposed to be localized near the certain generatrix, called the weakest. The frequencies and mode shapes for vibrations have been found by using the asymptotic expansions.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим вязкоупругую некруговую цилиндрическую оболочку длиной L и толщиной h . Введем на срединной поверхности оболочки ортогональную систему координат s, ϕ , связанную с главными линиями кривизны, так чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $R^2(ds^2 + d\phi^2)$. Здесь R – характерный размер срединной поверхности, s – продольная координата ($0 \leq s \leq l = L/R$), ϕ – координата на направляющей ($0 \leq \phi < 2\pi$). При этом радиус кривизны оболочки $R_2(\phi) = \frac{R}{k(\phi)}$. Материал оболочки – линейно-вязкоупругий с мгновенным модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν .

Будем рассматривать случай, когда оболочка испытывает однородную осевую нагрузку $T_1^* = \mu Eh T_1$. В качестве исходных уравнений используем полубезмоментные уравнения теории оболочек, записанные в безразмерном виде с учетом вязкости материала оболочки [1-2, 4]:

$$\begin{aligned} \mu^4 \Delta^2 \left[W - \int_{-\infty}^t K(t-\tau, T) W(\tau) d\tau \right] - \mu^2 k(\phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \mu^2 T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \\ \mu^4 \Delta^2 \Phi + k(\phi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[W - \int_{-\infty}^t K(t-\tau, T) W(\tau) d\tau \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Delta = \partial^2 / \partial s^2 + \partial^2 / \partial \phi^2, \quad \mu^4 = h^2 / [12R^2(1-\nu^2)], \quad W = \mu^2 R^{-1} W^*, \quad \Phi = \Phi^* / (\mu^2 Eh), \quad t = \frac{t^*}{t_c},$$

$$t_c = \frac{R^2 \rho}{\mu^2 E}.$$

Здесь W^*, Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжения, ρ – плотность материала, μ – естественный малый параметр, $K(t-\tau)$ – ядро скорости релаксации материала оболочки, t^* – время. На краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = 0, l. \quad (1.2)$$

§2. Метод решения.

Представим решение уравнений (1.1) в виде:

$$W = w(s, \phi, \mu) \exp(i\Omega t), \quad \Phi = f(s, \phi, \mu) \exp(i\Omega t), \quad \Omega = \omega + i\alpha, \quad (2.1)$$

где $\omega > 0$ – искомая частота, $\alpha > 0$ – число, характеризующее скорость затухания колебаний.

Подставляя (2.1) в (1.1) и замечая, что

$\int_{-\infty}^t K(t-\tau)e^{i\Omega\tau}d\tau = e^{i\Omega t}C$, где $C = \int_0^{+\infty} K(\theta)e^{i\Omega\theta}d\theta$, получим следующую систему уравнений:

$$(1-C)\mu^4\Delta^2w - \mu^2k(\phi)\frac{\partial^2f}{\partial s^2} + \mu^2T_1\frac{\partial^2w}{\partial s^2} - \Omega^2w = 0, \quad (2.2)$$

$$\mu^4\Delta^2f + k(\phi)(1-C)\frac{\partial^2w}{\partial s^2} = 0.$$

Начальные условия (1.2) позволяют искать решения w, f следующим образом:

$$w = w_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_ms), \quad f = f_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_ms), \quad (2.3)$$

где $p_m = \mu m\pi R/L$, m – натуральное число. Тогда задача (2.2) переписывается в виде:

$$(1-C)\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}w_m - 2\mu^2k(\phi)(1-C)p_m^2\frac{\partial^2w_m}{\partial\phi^2} + p_m^4(1-C)w_m +$$

$$+ p_m^2k(\phi)f_m - p_m^2T_1w_m - \Omega^2w_m = 0$$

$$\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}f_m - 2\mu^2p_m^2\frac{\partial^2f_m}{\partial\phi^2} + p_m^4f_m - p_m^2k(\phi)(1-C)w_m = 0.$$

В дальнейшем индекс m опускается.

Принимая во внимание зависимость радиуса кривизны оболочки от ϕ , мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую $\phi = \phi_0$, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний [3-4,6-8]. Решение системы уравнений (2.4), затухающее при удалении от «наиболее слабой образующей» может быть представлено в виде ВКБ-функций [3, 6-8]:

$$w(\phi, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{k/2} w_k(\xi) \exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\} \quad (2.5)$$

$$f(\phi, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{k/2} f_k(\xi) \exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\},$$

где $\xi = \mu^{-1/2}(\phi - \phi_0)$, w_k, f_k – полиномы по ξ , q – вещественное число, определяющее изменчивость в направлении ϕ , параметр b характеризует скорость уменьшения глубины вмятины при удалении от «наиболее слабой» образующей.

Искомую комплексную частоту Ω и функцию $k(\phi)$ представим в виде рядов:

$$\Omega = \Omega_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \dots, \quad (2.6)$$

$$k(\phi) = k(\phi_0) + \mu^{1/2}k'(\phi_0)\xi + \frac{1}{2}\mu k''(\phi_0)\xi^2 + \dots$$

Учитывая (2.6), получаем

$$C = C_0 + \mu\Omega_1C_1, \text{ где } C_0 = \int_0^{+\infty} K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta, \quad C_1 = -i \int_0^{+\infty} \theta K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta.$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.4), предварительно исключив функцию f , и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения $w_k(\xi)$, которая может быть записана в виде

$$\sum_{j=0}^n L_j w_{n-j} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

где $L_0 y \equiv p^2 k^2(\phi_0)(1 - C_0)(z + z^{-1})y - T_1 p^2 y - \Omega_0^2 y$,

а L_j ($j \geq 1$) – операторы, которые выражаются через L_0 и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Из условия существования ненулевого решения уравнения (2.7) при $n = 0$ следует два соотношения :

$$\frac{2\alpha_0 \omega_0}{A_0} = (z + z^{-1})p^2 k(\phi_0), \quad (2.8)$$

$$\frac{\omega_0^2 - \alpha_0^2}{1 - B_0} + \frac{T_1 p^2}{1 - B_0} = \frac{2\alpha_0 \omega_0}{A_0}, \quad (2.9)$$

где $z = \frac{(q^2 + p^2)^2}{p^2 k(\phi_0)}$, $A_0 = -\text{Im}C_0$, $B_0 = \text{Re}C_0$. В силу (2.8), (2.9) ω_0 , α_0 – функции, зависящие от ϕ_0 , q .

Рассмотрим уравнение (2.7) при $n = 1$.

Учитывая, что $w(\xi) = A_m \xi^m + A_{m-1} \xi^{m-1} + \dots + A_0$ – полином по ξ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получаем, что $\frac{\partial L_0}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial L_0}{\partial q} = 0$, т.е.

«наиболее слабая» образующая определяется из условия

$$k'(\phi_0^0) = 0; \quad (2.10)$$

а $q^0 = 0$ ($p > \sqrt{k(\phi_0^0)}$) или же

$$q = p(\sqrt{k(\phi_0^0)} - p) \quad (p < \sqrt{k(\phi_0^0)}) \quad (2.11)$$

Положим для удобства $k(\phi_0^0) = 1$.

Из формулы (2.9) при $B_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, получим выражение, определяющее наименьшую собственную частоту колебаний упругой оболочки с учетом однородного осевого усилия [4].

Таким образом, минимальная частота и соответствующий ей параметр α , который характеризует скорость затухания колебаний достигается либо при $z = 1$ ($q^0 = p(1 - p)$ $p < 1$) и определяются из уравнений

$$\text{А) } \frac{2\alpha_0 \omega_0}{A_0} = 2p^2 \quad \frac{\omega_0^2 - \alpha_0^2}{1 - B_0} + \frac{T_1 p^2}{1 - B_0} = 2p^2 \quad (2.12)$$

либо при $q^0 = 0$ ($p > 1$) и определяются из уравнений :

$$\text{Б) } \frac{2\alpha_0 \omega_0}{A_0} = p^4 + 1 \quad \frac{\omega_0^2 - \alpha_0^2}{1 - B_0} + \frac{T_1 p^2}{1 - B_0} = p^4 + 1 \quad (2.13)$$

Каждый из этих случаев имеет место при определенных соотношениях между параметрами оболочки.

§3. Нахождение поправок к собственным частотам колебаний. Из условия существования решения уравнения (2.7) в виде полинома

$$w_0(\xi) = A_m \xi^m + A_{m-1} \xi^{m-1} + \dots + A_0$$

находим число

$$b = i \left[\operatorname{Re} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi_0^2} / \operatorname{Re} \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \right]^{1/2} \Bigg|_{\substack{q=q^0 \\ \phi=\phi_0^0}},$$

а также поправку $\mu\Omega_1$ к комплексной частоте колебаний

$$\Omega_{1n} = \frac{i(n+1/2)b \frac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}}{N} \Bigg|_{\substack{q=q^0 \\ \phi_0=\phi_0^0}},$$

n – целое число.

В случае

$$\text{А) } p < 1, \quad b^2 = \frac{-k''(\phi_0^0)p^2}{16q^{0^2}}.$$

Поскольку $\operatorname{Im} b > 0$, то необходимо, чтобы $k''(\phi_0^0) > 0$. Соответствующие поправки к частоте и определяются по формулам

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \operatorname{Re} \left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2} \left(\frac{2n+1}{2} \right)}{\Omega_0 + C_1(p^4 - p^3 + p^2)} \right], \\ \alpha_1 &= \operatorname{Im} \left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2} \left(\frac{2n+1}{2} \right)}{\Omega_0 + C_1(p^4 - p^3 + p^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{В случае Б) } p > 1, \quad b^2 = \frac{-k''(\phi_0^0)p^2}{2(p^4 - 1)},$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2} \sqrt{p^4 - 1} \left(\frac{2n+1}{2} \right)}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4 + 1))} \right], \\ \alpha_1 &= \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2} \sqrt{p^4 - 1} \left(\frac{2n+1}{2} \right)}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4 + 1))} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При значениях p близких к единице, построенные ВКБ-решения становятся непригодными, поскольку при $p=1$ $b \rightarrow \infty$ и слагаемое $\mu^2\Omega_2$, которое в (8) не вписано, также обращается в бесконечность [7].

§4. Колебания вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого нагружения

Исследуется круговая цилиндрическая оболочка, радиус кривизны которой постоянен и равен единице.

Будем рассматривать случай, когда оболочка испытывает неоднородную осевую нагрузку $T_1^*(\phi) = EhT_1(\phi)$. В качестве исходных уравнений используем уравнения (1.1). На краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания (1.2). Решения уравнений ищется в виде (2.5).

Поскольку осевая нагрузка неоднородная и зависит от ϕ , мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую $\phi = \phi_0$, вблизи которой

локализуются собственные формы колебаний. Эта образующая находится из условий:

$$T_1'(\phi_0^0) = 0; \quad T_1''(\phi_0^0) < 0. \quad (4.1)$$

Поправки к частоте ω и декременту затухания α в первом приближении для случая $p < 1$

$$\omega_1 = \text{Re} \left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)^{1/2} |T_1''(\phi_0^0)|^{1/2}}{\Omega_0 m_p + C_1(p^4 - p^3 + p^2)} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \right], \quad (4.2)$$

$$\alpha_1 = \text{Im} \left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)^{1/2} |T_1''(\phi_0^0)|^{1/2}}{\Omega_0 m_p + C_1(p^4 - p^3 + p^2)} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \right],$$

а для случая $p > 1$

$$\omega_1 = \text{Re} \left[\frac{2\sqrt{2}(1-C_0)^{1/2} |T_1''(\phi_0^0)|^{1/2} \sqrt{p^4 - 1}}{p(2\Omega_0 m_p + C_1(p^4 + 1))} \right], \quad (4.3)$$

$$\alpha_1 = \text{Im} \left[\frac{2\sqrt{2}(1-C_0)^{1/2} |T_1''(\phi_0^0)|^{1/2} \sqrt{p^4 - 1}}{p(2\Omega_0 m_p + C_1(p^4 + 1))} \right].$$

При значениях p близких к единице построенные ВКБ-решения становятся непригодными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГТТИ, 1956. - 573с.
2. Матяш В. И. Колебания изотопных упруго-вязких оболочек // Механика полимеров. - 1971. - №1. - С.157-163.
3. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. // Прикладная механика. - 1992. - т.28, №1. - С. 50-55.
4. Михасев Г.И. К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек // Вестник Витебского гос. у-та. - 1997. - №1(3). - С. 61-66.
5. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. - С.416
6. Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. математ. и механика. 1983. т. 47. № 5. с. 815-822.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. - С. 320.
8. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием однородного осевого нагружения. // Прикладная механика. - 1999. - т.28, №1. - С. 50-55

КВАНТОВЫЙ БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ НАНОСЕНСОР: ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ

Колешко В.М., Гулай А.В., Гулай В.А., Ульянов В.Б.

Выполнено аналитическое моделирование чувствительных к микроудару сенсорных наноструктур типа металл-диэлектрик-металл (МДМ) на основе сверхтонких диэлектрических пленок. Определены параметры баллистического квантового МДМ-наносенсора для орбитального контроля высокоскоростных техногенных и метеороидных микрочастиц. Разработан генетический алгоритм оптимизации и определено поле решений в пространстве оптимизируемых параметров модели квантового наносенсора при воздействии космических микрочастиц. Функция оптимальности представляет собой зависимость выходных характеристик наносенсора от физико-механических параметров высокоскоростной микрочастицы и конструктивно-технологических параметров сенсорной наноструктуры.

В исследовании и разработке орбитальных сенсорных микросистем, физическое экспериментирование с которыми в космических или приближенных к ним условиях затруднительно, особый интерес представляют методы аналитического моделирования. Для оптимизации конструктивно-технологических параметров орбитальных наносенсоров, а также для моделирования зависимости сенсорных сигналов от характеристик внешнего воздействия используются оптимизационные алгоритмы. Одним из эффективных алгоритмов, позволяющих оптимизировать параметры сенсорных систем космического применения, является генетический алгоритм. За счет комбинации переборного и градиентного методов оптимизации и воплощения особенностей нечеткой логики генетический алгоритм дает возможность получить субоптимальное решение за приемлемое время. Функция оптимальности описывает модель наносенсора с налагаемыми ограничениями, не позволяющими генетическому алгоритму выводить параметры модели из заданного диапазона величин.

Процесс создания генетического алгоритма включает в себя следующие стадии: разработка аналитической модели наносенсора, определяющей зависимость выходных характеристик от конструктивно-технологических параметров наносенсора и воздействующих на него внешних факторов; моделирование и анализ работы наносенсора в условиях внешнего воздействия различного характера (скорость, плотность, диаметр микрочастицы) и конструктивных особенностей чувствительного элемента; разработка функции оптимизации на основе полученной модели для использования ее при создании генетического алгоритма; оптимизация параметров чувствительного элемента баллистического наносенсора для получения приемлемых свойств контроля высокоскоростных микрочастиц; анализ полученных результатов моделирования и оптимизации баллистического наносенсора при контроле высокоскоростных космических микрочастиц.

Создание генетического алгоритма выполняется на основе сформулированных требований к объекту и средствам разработки:

- баллистический наносенсор – возможность контроля метеороидных и техногенных микрочастиц с параметрами: масса – 10^{-9} – 10^{-13} кг; скорость – 1–50 км/с; размеры – менее 10^{-5} – 10^{-6} м; возможность функционирования в космических условиях: невесомость, вакуум, колебания температуры в широком диапазоне; миниатюрное исполнение с использованием групповых технологий микроэлектроники;

- аналитическая модель – определение зависимости выходных характеристик наносенсора от его конструктивно-технологических параметров; определение влияния воздействующих внешних факторов на выходные параметры наносенсора;

○ алгоритм моделирования – возможность выполнения следующих оптимизационных процедур: оптимизация выходных электрических параметров наносенсора; оптимизация конструктивно-технологических характеристик наносенсора; варьирование задаваемых исходных параметров в достаточно широких пределах; задание пределов оптимизации параметров наносенсора; нахождение субоптимального решения за относительно короткий промежуток времени; вывод результатов оптимизации в графической и текстовой форме.

Для проведения расчетов выбран пакет MATLAB и GEATbx (The Genetic and Evolutionary Algorithm Toolbox for Matlab), возможности которого в достаточной степени соответствуют целям нашего исследования.

Физические основы и технические решения квантового МДМ-наносенсора для контроля микрочастиц

Для контроля высокоскоростных космических микрочастиц, имеющих массу 10^{-8} – 10^{-12} кг и скорость $(1-5) \cdot 10^4$ км/с, предложено использовать квантовую сенсорную микросистему, активным элементом которой является туннельная МДМ-наноструктура [1–3]. Туннельнотонкая диэлектрическая пленка МДМ-наноструктуры имеет толщину порядка 2–10 нм, и ее проводимость существенно возрастает при ударе микрочастицы [4]. На поверхность МДМ-наноструктуры наносится улавливающий полимерный слой, в котором при воздействии высокоскоростной космической микрочастицы образуется тепловой канал от точки удара до МДМ-наноструктуры (рис. 1). В конструкции МДМ-наносенсора используются тонкопленочные элементы, выполненные на основе редкоземельных соединений: оксидов, фторидов, силицидов, а также материалов, обладающих высокотемпературной сверхпроводимостью [5].

Попадание высокоскоростной космической микрочастицы в улавливающий полимерный слой возбуждает ударную волну, которая при достижении тыльной стороны данного слоя вызывает повышение электропроводности диэлектрика МДМ-наноструктуры. Повышение электропроводности ударно сжатой диэлектрической пленки связывают с изменением ее электрофизических свойств за счет ионизации, происходящей при высоких давлениях, возникающих на фронте ударной волны. Прохождение ударной волны через полимерный слой приводит к повышению его температуры, что в свою очередь влияет на токоперенос через туннельнотонкий диэлектрик МДМ-наноструктуры. Изменение плотности туннельного тока при повышении температуры характерно для температурно-зависимых механизмов проводимости сверхтонких диэлектрических пленок.

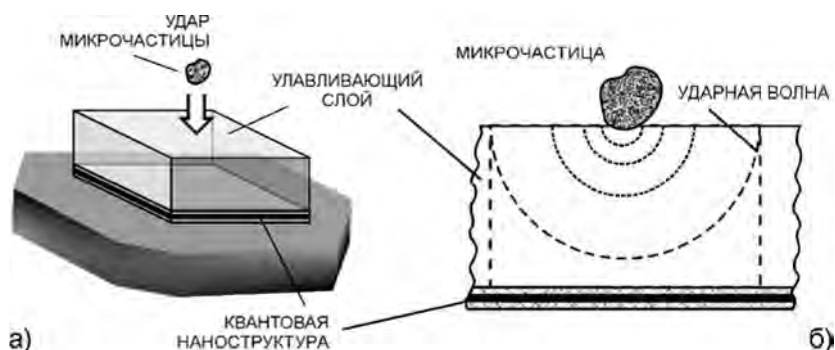


Рис. 1. Конструктивное решение баллистического наносенсора (а) и модель воздействия космической микрочастицы (б).

Таким образом, для анализа работы баллистического квантового наносенсора возможно использование аналитических моделей, описывающих ударное воздей-

ствии на диэлектрик, а также эффекты токопереноса в тонких диэлектрических пленках. При использовании указанных моделей делается ряд допущений, качественно не изменяющих характер физических процессов, происходящих в туннельной МДМ-наноструктуре при воздействии микрочастицы. Так, распределение параметров ударной волны и свойств материалов наносенсора в канале ее распространения предполагается однородным. При рассмотрении процесса распространения ударной волны в сенсорной системе учитывается только материал ловушки микрочастиц — полимерного слоя, при этом пренебрегаем параметрами МДМ-наноструктуры. Кроме этого предполагается, что проводимость металлических электродов квантовой наноструктуры много больше проводимости диэлектрической пленки и поэтому не оказывает влияния на изменение параметров наносенсора в момент удара микрочастицы. Такие упрощения вполне допустимы при следующих конструктивно-технологических параметрах МДМ-наноструктуры: толщина полимерного слоя — $\sim 2\text{--}20$ мкм, диэлектрика МДМ-наноструктуры — $\sim 2\text{--}10$ нм, металлических электродов — ~ 100 нм.

Следует отметить, что для МДМ-наноструктур вышеуказанное условие о соотношении значений проводимости металлических электродов и диэлектрической пленки может в некоторых случаях не выполняться. Данная ситуация наблюдается, например, при значительном возрастании проводимости диэлектрического слоя и снижении проводимости металлической пленки вследствие уменьшения их толщин с целью микроминиатюризации сенсорной системы. Для достижения технологической инвариантности создания квантового наносенсора в таком случае предложено при формировании электродов использовать материалы, обладающие высокотемпературной сверхпроводимостью [6]. Это обеспечивает достижение инвариантности параметров МДМ-наноструктуры относительно изменения проводимости тонкой диэлектрической пленки как при варьировании технологических факторов в процессе получения наносенсора, так и при изменении его характеристик в момент удара космической микрочастицы.

Проводимость G ударно сжатой МДМ-наноструктуры, зависящая от удельной электропроводности сверхтонкой диэлектрической пленки, определяется выражением:

$$G_g = G_0 \Phi(E_M) \Rightarrow G_0 \Phi[\exp(-\Delta E/k_B T)], \quad (1)$$

где G_0 — проводимость наноструктуры без учета механического воздействия удара микрочастицы; $\Phi(E_M)$ — функция от механической энергии E_M микрочастицы в момент удара; ΔE — энергия активации токопереноса в МДМ-наноструктуре за счет механического воздействия при ударе микрочастицы; k_B — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура, зависящая от энергии воздействия микрочастицы. Величина проводимости G_0 обусловлена механизмами токопереноса в сверхтонком диэлектрике, которые могут быть как термически активируемыми ($\Delta G(T) \neq 0$), так и независимыми от температуры ($\Delta G(T) = 0$). Термически активируемый перенос заряда возрастает при увеличении температуры диэлектрика вследствие удара микрочастицы. Рост проводимости наноструктуры за счет увеличения токопереноса при повышении температуры в момент удара определяется путем введения следующей логической последовательности:

$$G_0 \Rightarrow J_0(T) = J_0^0 + \Delta J_0(T) \Rightarrow G_0^0 + \Delta G(T). \quad (2)$$

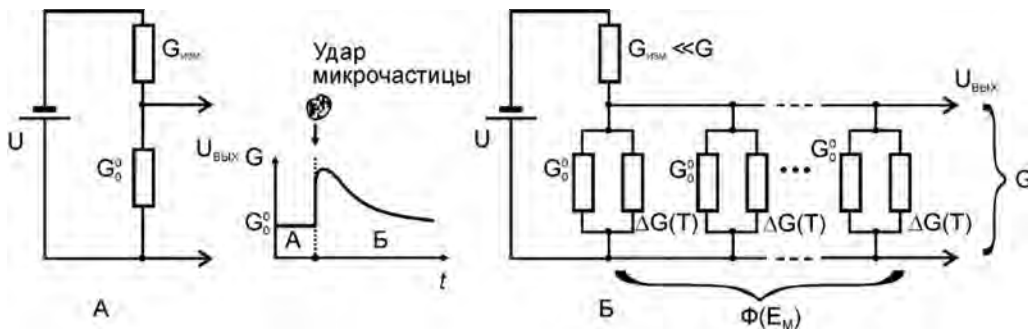


Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема квантовой МДМ-наноструктуры до удара (а) и при воздействии (б) космической микрочастицы.

Суммарный эффект от обоих физических факторов, оказывающих влияние на проводимость туннельной МДМ-наноструктуры (за счет ионизации при высоких давлениях на фронте ударной волны и за счет увеличения токопереноса при повышении температуры) получит следующее выражение:

$$G_g = \{G_0^0 + \Delta G(T)\} \Phi[\exp(-\Delta E/k_B T)]. \quad (3)$$

Влияние моделируемых физических явлений, наблюдающихся в МДМ-наноструктуре в момент воздействия высокоскоростной микрочастицы, на электрические параметры наноструктуры поясняется с помощью ее эквивалентной электрической схемы, отражающей зависимости (1–3) и представленной на рис. 2. Изложенное представление о физических эффектах в МДМ-наноструктуре, сопровождающих удар космической микрочастицы, положено в основу аналитического моделирования и оптимизации параметров квантового наносенсора.

Моделирование процесса воздействия космических микрочастиц на квантовую сенсорную МДМ-наноструктуры

Влияние космической микрочастицы на сенсорную МДМ-наноструктуру определяется на основании алгоритма моделирования высокоскоростного механического воздействия микрочастицы на диэлектрик [7]. Температура T во фронте ударной волны рассчитывается с учетом ее связи с внутренней энергией, запасенной в объеме канала распространения ударной волны за время действия микрочастицы на сенсорную систему. Путем определения закона движения фронта ударной волны и ее скорости, а также промежутка времени от момента удара до прихода ее к тыльной поверхности улавливающего слоя, рассчитывается закон охлаждения полимерного слоя. Проводимость МДМ-наноструктуры в момент воздействия микрочастицы складывается из проводимостей образовавшегося теплового канала и остальной части МДМ-контакта.

С учетом указанных факторов проводимость сенсорной МДМ-наноструктуры как функция параметров улавливающего слоя и контролируемой микрочастицы определяется системой следующих аналитических выражений:

$$G_g = G_0[1 + B(A - 1)], \quad (4)$$

$$\Delta G = G_g - G_0 = G_0 B(A - 1), \quad (5)$$

$$A = \{\exp[-\Delta E/k_B(T_0 + EN^{-1})]\}/\exp(-\Delta E/k_B T_0), \quad (6)$$

$$B = \pi D t (D t + 2L) / S_g, \quad)$$

где D – скорость ударной волны; T_0 – температура до удара микрочастицы; E – энергия в канале распространения ударной волны; N – параметр, определяемый температурой во фронте ударной волны; L – толщина полимерного улавливающего слоя; S_g – площадь МДМ-наноструктуры; t – время.

Проводимость G_0 ударно сжатой МДМ-наноструктуры, определяемая протекающим через нее током, обусловлена механизмами токопереноса в туннельнотонком диэлектрике. В соответствии со схемой измерения параметров сенсорной МДМ-наноструктуры (рис. 1) взаимосвязь между проводимостью G_0 и током J_0 имеет следующий вид:

$$G_0 = J_0 G_{изм} / (U G_{изм} - J_0), \quad (8)$$

где U — напряжение питания; $G_{изм}$ — проводимость измерительной цепи. Наибольший интерес представляют термически активируемые механизмы токопереноса в сверхтонкой диэлектрической пленке МДМ-наноструктуры. Значение тока через тонкую диэлектрическую пленку МДМ-наноструктуры определяется с использованием выражений, характеризующих, например, процесс эмиссии по механизму Шоттки-Ричардсона:

$$j_0 = R T \exp(-\phi_0 / k_B T) \exp(\beta_S \sqrt{U/d} / k_B T), \quad (9)$$

где R — постоянная Ричардсона; ϕ_0 — высота энергетического барьера; β_S — коэффициент Шоттки.

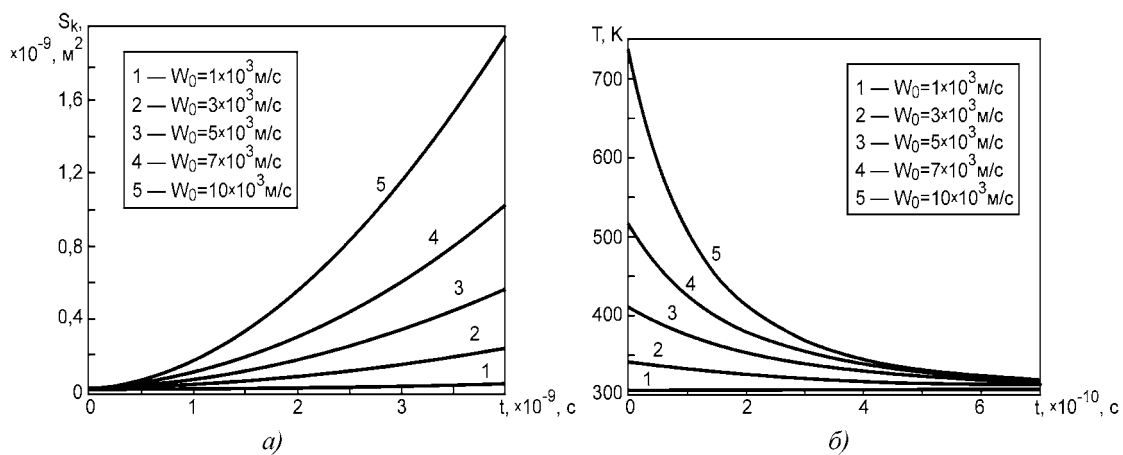


Рис. 3. Изменение площади (а) и температуры (б) нагрева МДМ-наноструктуры после удара микрочастицы.

На основе предложенной модели выполнен расчет зависимости параметров квантового наносенсора (в частности, его проводимости) от времени после удара, от параметров микрочастицы (скорости, плотности, радиуса), от конструктивно-технологических параметров наноструктуры (плотности и толщины полимерного слоя, толщины диэлектрической пленки), от параметров сенсорного интерфейса (напряжения питания, измерительного сопротивления). В расчетах приняты следующие основные исходные данные: толщина тонкой диэлектрической пленки МДМ-наноструктуры равна 10 нм, диаметр космической микрочастицы составляет 1 мкм, ее скорость лежит в пределах $(1-10) \cdot 10^3$ м/с. Изменение площади канала ударной волны, температуры в данном канале и тока через МДМ-наноструктуру при разной скорости микрочастицы, а также изменение проводимости наноструктуры при различной толщине улавливающего слоя показано на рис. 3, 4.

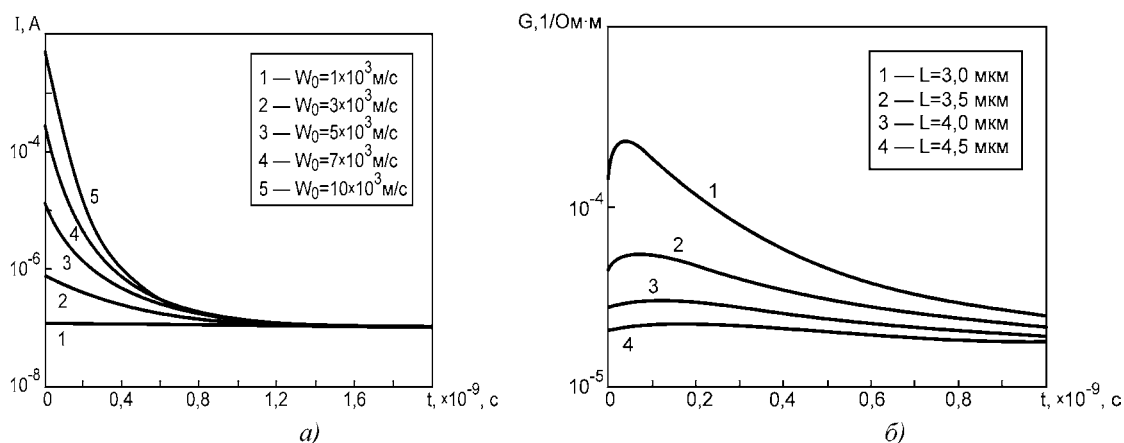


Рис. 4. Изменение тока через МДМ-наноструктуру (а) и ее проводимости (б) после удара микрочастицы.

Площадь канала распространения ударной волны после воздействия микрочастицы плавно возрастает и за $4 \cdot 10^{-9}$ с увеличивается от 0 до $2 \cdot 10^{-9}$ м². Наблюдается также плавный спад температуры со временем, причем изменение ее происходит более резко в первые $0,2 \cdot 10^{-9}$ с. Изменение тока через МДМ-наноструктуру повторяет ход временной зависимости температуры в канале ударной волны. Проводимость МДМ-наноструктуры после удара микрочастицы сначала несколько увеличивается, изменение проводимости ΔG достигает максимальной величины ΔG_{\max} , а затем происходит плавное снижение данного параметра. С уменьшением толщины улавливающего полимерного слоя от 4,5 до 3,0 мкм наблюдается рост изменения проводимости ΔG и, следовательно, ΔG_{\max} .

Следует отметить, что зависимость проводимости МДМ-наноструктуры от таких ее конструктивно-технологических параметров как толщина диэлектрического слоя, плотность материала мишени и его толщина имеют следующий характер. Увеличение d , L , ρ_m до некоторых критических значений приводит к резкому спаду G , а при дальнейшем возрастании указанных параметров происходит более медленное уменьшение проводимости. Такие критические значения параметров МДМ-наноструктуры равны: $d \sim 3-4$ нм; $L \sim 3-4$ мкм; $\rho_m \sim (1,5-2,0) \cdot 10^3$ кг/м³. С ростом радиуса, плотности и скорости микрочастицы проводимость сенсорной МДМ-наноструктуры плавно увеличивается. Например, при увеличении радиуса микрочастицы от $1 \cdot 10^{-7}$ до $5 \cdot 10^{-7}$ м проводимость МДМ-наноструктуры возрастает от $1 \cdot 10^{-5}$ до $2 \cdot 10^{-4}$ 1/Ом.

Разработка генетического алгоритма оптимизации конструктивно-технологических параметров МДМ-наносенсора

Решение оптимизационной задачи с использованием генетического алгоритма включает, как правило, несколько последовательных шагов: классификация проблемы и определение функции оптимизации; предварительное исследование поведения оптимизируемой системы; выбор подхода к оптимизации на основе результатов исследования; запуск алгоритма и осуществление процедуры оптимизации. Реализация указанных стадий в случае оптимизации параметров квантового наносенсора высокоскоростных космических микрочастиц выполнялась следующим образом.

Функция оптимизации определяется с учетом требований формата выбранной среды разработки (MATLAB, GEATbx), а также ограничений, накладываемых на параметры модели квантового наносенсора. Ограничения параметров наносенсора описываются в функции оптимизации в качестве набора верхних и нижних границ значений данных параметров. Процедура разработки функции оптимизации включает в себя несколько этапов: описание проблемы в М-файле на языке MATLAB; опре-

деление числа и границ переменных; определение ограничивающих функций; выбор критериев оптимальности; выбор целевых значений для критериев оптимизации; написание функции оптимизации проблемы; выбор операторов и параметров работы эволюционного алгоритма.

В данном случае стоит задача оптимизации конструктивно-технологических параметров наносенсора, сочетание которых наилучшим образом будет влиять на его отклик в виде изменения проводимости. Предложенная модель квантового наносенсора описана на языке программирования MATLAB, что позволяет провести расчеты и выполнить моделирование поведения наносенсора с использованием встроенных в MATLAB средств вычислений и визуализации. Модель описана в виде функции, принимающей в качестве входных параметров как конструктивно-технологические параметры МДМ-наноструктуры, так и параметры микрочастицы и сенсорного интерфейса. При выполнении функции формируется набор выходных значений, характеризующих отклик моделируемой системы.

Оптимизации подлежат следующие параметры: толщина диэлектрической пленки; удельная проводимость диэлектрика; его относительная диэлектрическая проницаемость; толщина полимерного слоя (мишени); плотность материала слоя-мишени; проводимость измерительной цепи; напряжение питания. При этом параметры МДМ-наносенсора, не подлежащие оптимизации, рассматриваются фиксированными. Причем возможна как оптимизация всех вышеперечисленных параметров одновременно, так и отдельных переменных из приведенного перечня, в этом случае незадействованные параметры также фиксируются.

В качестве критерия оптимизации принята максимизация величины ΔG ($\Delta G = G_g - G_0$) с одновременной максимизацией длительности импульса роста проводимости на уровне $0,7\Delta G$. Это позволяет в процессе оптимизации учесть, что системе обработки информации на выходе моделируемого квантового наносенсора необходимо определенное время для анализа выходного сигнала. Задача при этом становится многокритериальной, а для многокритериальной оптимизации можно установить дополнительные «мягкие» целевые значения критериев оптимизации. Решения, лежащие ближе к таким значениям, являются более предпочтительными при их отборе.

Функция оптимизации квантового наносенсора, написанная на языке MATLAB, предназначена для выполнения в тулбоксе GEATbx, являющемся универсальной реализацией генетического алгоритма. Сделан выбор следующих параметров работы генетического алгоритма: количество субпопуляций – 5; количество индивидуумов (для каждой субпопуляции) – 50, 30, 20, 20, 10; точность мутации (для вещественных чисел) – 24; визуализация проведения оптимизации многокритериальной задачи – каждые 10 популяций; визуализация промежуточных решений – каждые 10 популяций; вывод текстовой информации – каждые 5 популяций; тип завершения алгоритма – максимальное количество популяций + время оптимизации.

Особенностью использованного тулбокса GEATbx является то, он позволяет в процессе оптимизации выводить решение задачи в графической форме. Отслеживание результата в графической форме дает возможность контролировать процесс оптимизации в режиме реального времени, а также получить наглядное представление о решении оптимизационной задачи. Кроме того, GEATbx в графической форме выводит дополнительную информацию о процессе проведения оптимизации и работе генетического алгоритма, что отмечается как достоинство данной реализации используемого алгоритма.

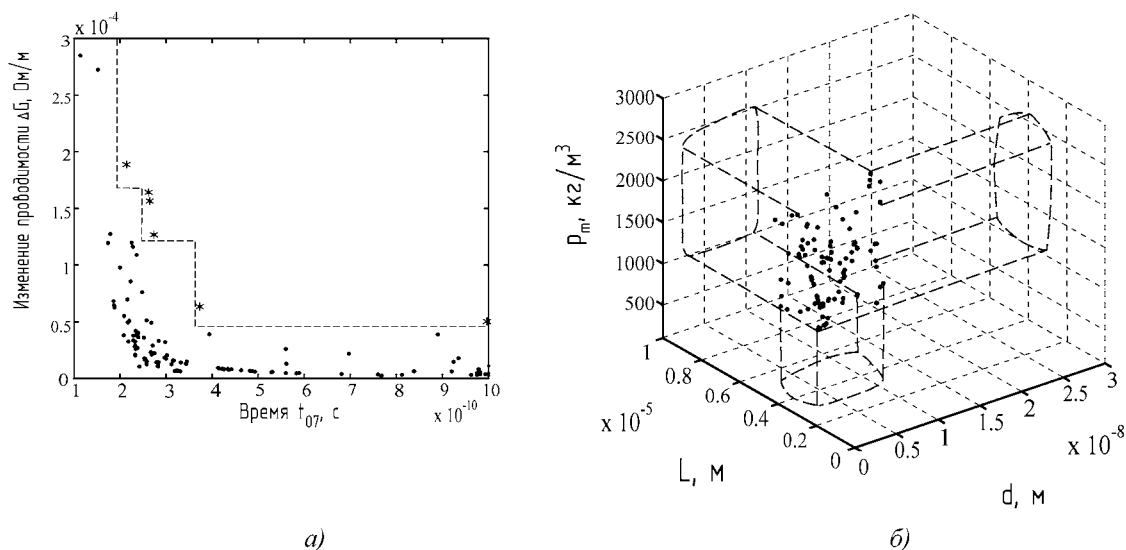


Рис. 5. Фронт решений в поле критериев оптимизации (а) и объем решений в пространстве оптимизируемых параметров модели квантового наносенсора (б).

В качестве результата выполнения задачи на рисунке 5,а представлен Парето-оптимальный фронт в поле критериев оптимизации, то есть множество недоминирующих альтернативных решений. Точками отмечены решения, распределенные по Парето-оптимальному фронту, они являются доминирующими по отношению к остальным значениям, лежащим вне фронта Парето (отмечены звездочкой). На рисунке 5,б показан объем решений в пространстве оптимизируемых параметров модели квантового МДМ-наносенсора (толщина диэлектрической пленки, толщина полимерной мишени, плотность материала мишени). Поскольку задача оптимизации является многокритериальной, не существует одно наилучшее ее решение, напротив, можно выделить набор доминирующих решений задачи. Поле решений задачи оптимизации сконцентрировано в области значений оптимизируемых конструктивно-технологических параметров, при которых модель сенсорной наносистемы на выходе дает сигнал, максимально удовлетворяющий установленным критериям оптимизации.

Заключение.

Выполнено аналитическое моделирование чувствительных к микроудару сенсорных наноструктур типа металл–диэлектрик–металл на основе сверхтонких диэлектрических пленок. Определены параметры баллистического квантового МДМ-наносенсора для орбитального контроля высокоскоростных техногенных и метеороидных микрочастиц. Установлены зависимости отклика квантового наносенсора от времени после удара, механических параметров микрочастицы, конструктивных особенностей наноструктуры, параметров сенсорного интерфейса. Разработан генетический алгоритм оптимизации и определен объем решений в пространстве оптимизируемых параметров модели квантового наносенсора при воздействии космических микрочастиц. Полученная функция оптимальности представляет собой зависимость выходных характеристик наносенсора от физико-механических параметров высокоскоростной микрочастицы и конструктивно-технологических параметров сенсорной наноструктуры. Разработанная конструкция баллистического квантового наносенсора положена в основу создания распределенных орбитальных сенсорных систем для многомерного (многопараметрового) контроля космических факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А., Ульянов В. Б. Сенсорный контроль космических микрочастиц: моделирование квантового наносенсора / В. М. Колешко [и др.] // Четвертый Белорусский Космический Конгресс, 27–29 октября 2009 г., Минск: Материалы конгресса. — Минск, 2009. — С. 78–83.
2. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Квантовый наносенсор для контроля космических микрочастиц / В. М. Колешко [и др.] // 19-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2009). Севастополь, 14–18 сентября 2009 г.: материалы конференции. — Севастополь: Вебер, 2009. — С. 631–632.
3. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Баллистические наносенсоры на туннельном эффекте / В. М. Колешко [и др.] // Наноструктурные материалы–2008: Беларусь-Россия-Украина (НАНО-2008): Первая международная научная конференция, Минск, 22–25 апреля 2008 г.: Материалы конференции. — Минск, 2008. — С. 601–602.
4. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Туннельные МДМ-наносенсоры: стратегии и технологии моделирования / В. М. Колешко [и др.] // Нано- и микросистемная техника. — 2007. — № 9. — С. 46–52.
5. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А. Наносенсоры на основе сверхтонких пленок редкоземельных соединений / В. М. Колешко [и др.] // Нанотехника. — 2009. — № 1. — С. 45–48.
6. Колешко В. М., Гулай А. В., Гулай В. А., Польшкова Е. В. Моделирование инвариантных микро-нанотехнологий сенсорики / В. М. Колешко [и др.] // Межведомственный сборник научных статей «Машиностроение». — БНТУ, Минск. — 2009. — Вып. 24, т. 2. — С. 223–228.
7. Семкин Н. Д., Воронов К. Е. Проводимость ударно сжатых МДМ структур на основе полиметилметакрилата // ЖТФ. — 1998. — Т. 68. — № 8 — С. 63–66.

STRAIN FLUCTUATIONAL THEORY OF ELASTIC CONSTANTS OF NEMATIC ELASTOMERS

Nemtsov V.B., Kamluk A.N., Shirko A.V.

In this communication some aspects of strain fluctuation theory of linear elasticity of nematic elastomers are represented

For description of the elastic properties of elastomers the stress ensemble is used. The distribution function for this ensemble is obtained by means of the method of maximum informational entropy. At first we introduce the microscopic field of displacements [1] as

$$\hat{u}_i(x) = \sum_{v=1}^N u_i^v \delta(x - x^v) \quad (1)$$

and then we construct the microscopic tensor of deformation (for simplicity we consider the linear case)

$$\hat{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

Mean value of this tensor is

$$\langle \hat{\epsilon}_{ik} \rangle = n \epsilon_{ik}, \quad (3)$$

where

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

is macroscopic tensor of deformation, n is the particle number density.

Quasiequilibrium distribution function defined as

$$\rho_q = \exp \left[\Phi - \int dx \beta(x, t) (\hat{H}(x) - E_{ik} \hat{\epsilon}_{ik}) \right] \quad (5)$$

$E_{ik} = \tau_{ik}^0 \beta n^{-1}$, τ_{ik}^0 is the stress tensor, $\beta = kT$, k is Boltzmann constant.

The expression type (5) may be applied for the nonlinear measure of deformation [2–5].

In linear approximation we have

$$\rho_q = \rho_0 \left[1 - \int d\bar{x}' (\hat{H}(\bar{x}') - \langle \hat{H} \rangle_0) (\beta - \beta_0) + \int E_{ik}(x') \hat{\epsilon}_{ik}(x') dx' \right] \quad (6)$$

Using this distribution function we obtain

$$\langle \hat{\epsilon}_{ij} \rangle = \int E_{kl}(x') \langle \hat{\epsilon}_{ij}(x) \hat{\epsilon}_{kl}(x') \rangle dx' \quad (7)$$

or in the local approximation

$$n \epsilon_{ij} = E_{kl} \int \langle \hat{\epsilon}_{ij}(x) \hat{\epsilon}_{kl}(x') \rangle dx', \quad (8)$$

where $\int \langle \hat{\epsilon}_{ij}(x) \hat{\epsilon}_{kl}(x') \rangle dx'$ is correlation function of the strains fluctuation.

Therefore

$$\epsilon_{ij} = B_{ijkl}(x) \tau_{kl}^0(x), \quad (9)$$

where

$$B_{ijkl} = \beta n^{-2} \int \langle \hat{\epsilon}_{ij}(x) \hat{\epsilon}_{kl}(x') \rangle dx' \quad (10)$$

is the tensor of the isothermal elastic compliances.

The tensor of the elastic module K_{ijkl} connected with the tensor of compliances the next relation

$$B_{ijmn} K_{mnkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (11)$$

It is very important that the tensor of compliances defined by the correlation function of the strain fluctuations.

Now we consider the simple case of the isotropic medium. Then we have

$$\epsilon_{12}(x) = \mu^{-1} \tau_{12}, \quad (12)$$

where μ is shear modulus

$$\mu = \frac{kTn^2v}{\iint \langle \hat{\epsilon}_{12}(x) \hat{\epsilon}_{12}(x') \rangle dx' dx} \quad (13)$$

In liquid case $\epsilon_{12} \rightarrow \infty$, and therefore $\mu \rightarrow 0$. That is the shear deformation ϵ_{12} is the soft mode, v is the body volume.

It is interesting that in case of the no compressibility of elastomers when $\text{Tr} \epsilon_{ij} = \epsilon_{ii} \rightarrow 0$ we obtain according to (10) that compressibility also go to zero.

In isotropic case the relations between elastic moduli and corresponding compliances directly follows from formulas [7]

$$\tau_{ij} = K \epsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{ii} \right), \quad (14)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \tau_{ii} + \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{ii} \right). \quad (15)$$

Then we obtain the expressions for bulk elastic modulus K and for shear modulus (see 13)

$$9K = \frac{n^2 kT v}{\iint \langle \hat{\epsilon}_{ii}(x) \hat{\epsilon}_{kk}(x') \rangle dx' dx} \quad (16)$$

The Poisson's ratio defined by [7]

$$\nu = (3K - 2\mu) / 2(3K + \mu) \quad (17)$$

At calculation corresponding correlation functions in (13) and (16) it may occur the next results.

In case, when $3K < 2\mu$, $\nu < 0$ and at $K = 0$ (the compressibility is infinity) $\nu = -1$, at $K \rightarrow \infty$ or $\mu \rightarrow 0$ $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$.

It should be noted that in the work [8] the detailed and stimulated review on the materials with negative Poisson ratio is represented.

In our works in addition and in contrast to the works considered in [8] we develop the molecular statistical theory of the elastic properties of materials which may possess the negative Poisson ratio.

For nematic elastomers we have the nest structure tensor of compliances

$$B_{ijkl} = B_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + B_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + B_3 \delta_{il} \delta_{jk} + B_4 (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{kl} n_i n_j) + \\ + B_5 \delta_{ik} n_j n_l + B_6 (\delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l) + B_7 \delta_{jl} n_i n_k + B_8 n_i n_j n_k n_l$$

and the tensor of elastic module have the same structure

$$K_{ijkl} = K_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + K_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + K_3 \delta_{il} \delta_{jk} + K_4 (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{kl} n_i n_j) + \\ + K_5 \delta_{ik} n_j n_l + K_6 (\delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l) + K_7 \delta_{jl} n_i n_k + K_8 n_i n_j n_k n_l.$$

With help of the relation (11) we obtain formulas connected module K_i and coefficient of compliances B_i .

For example

$$K_1 = \frac{B_1 (B_5 + 2B_6 + B_7 + B_8) - B_4^2 + B_1 (B_2 + B_3)}{T}, \\ K_2 = \frac{B_2}{B_2^2 - B_3^2}, \quad K_3 = -\frac{B_3}{B_2^2 - B_3^2}, \\ K_4 = \frac{-B_1 (B_5 + 2B_6 + B_7 + B_8) + B_4^2 + B_4 (B_2 + B_3)}{T}, \\ K_5 = \frac{2B_2 B_3 B_6 - B_2 B_3 B_7 + B_2 B_6^2 - B_2^2 B_5 - B_3^2 B_7}{A}, \\ K_6 = \frac{B_2 B_3 B_7 + B_3 B_5 B_7 + B_2 B_3 B_5 - B_3 B_6^2 - B_3^2 B_6 - B_2^2 B_6}{A}, \\ K_7 = \frac{2B_2 B_3 B_6 - B_2 B_3 B_7 + B_2 B_6^2 - B_2^2 B_7 - B_3^2 B_5}{A},$$

where

$$A = (B_3^3 - B_2 B_6^2 - B_2 B_3^2 - B_3 B_5 B_7 + B_2^2 B_7 - B_2 B_3 B_5 - B_2 B_3 B_7 \\ + 2B_3^2 B_6 - 2B_2 B_3 B_6 + B_2^2 B_5 + B_3 B_6^2 - B_2^2 B_3 + B_2^3 + B_2 B_5 B_7)(B_2 + B_3), \\ T = (B_2 + B_3)^2 (-3B_1 - 2B_4 - B_5 - 2B_6 - B_7 - B_8) \\ + (B_2 + B_3)(-2B_1 (B_3 + 2B_6 + B_7 + B_8) - 2B_2 B_3 + 2B_4^2) \\ - (B_2^3 + B_3^3).$$

The modules K_8 is not shown in connection witch bulkiness of expressions.

For nonlinear elastic extension of elastomers the law of this deformation defined by formula [9]

$$P = \mu \left[(b_{\square} \lambda - b_{\perp} \lambda^{-2}) - \alpha (b_{\square}^{3/2} \lambda^2 - b_{\perp}^{3/2} \lambda^{-5/2}) + \beta (b_{\square}^{3/2} \lambda^3 - b_{\perp}^3 \lambda^{-3}) \right], \quad (18)$$

where $b_{\perp} = a/l_{\perp}$, $b_{\parallel} = a/l_{\parallel}$, a is effective length of monomer, $l_{\parallel} = a(1+2Q)$, $l_{\perp} = a(1-Q)$, Q is the scalar order parameter, λ is multiplicity stretch of material fibre, P is force per unit nondeformation area.

Let us remove in [9] the next misprint: all the numerical values α must be positive, instead of $\alpha = 0,515$ must be $\alpha = 1,515$.

In formula (13) above work instead of $-\alpha(2^{-3/2}\lambda^2 2^{-3k})$ must be $-\alpha 2^{-3/2}\lambda^2$.

REFERENS

1. Немцов В.Б. Теоретическая и математическая физика. 1973. Т.14. №2 С. 262.
2. Немцов В.Б. ДАН БССР, 1975. Т. 19. С.883.
3. Немцов В.Б. Сб. Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механики. Минск, 2001. С. 372.
4. Немцов В.Б. Теоретическая и прикладная механика. Вып. 17, 2004. С. 30.
5. Немцов В.Б. Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком. Минск, 1997. – 280 с.
6. M.Parinello, A. Rahman. J. Chem. Phys. (1), 1982. P. 2662.
7. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория упругости. М: Наука, 1987, – 248 с.
8. Конек Д.А., Войцеховский К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Механика композитных материалов и конструкций. (Москва)- 2004, т.10, №1, с. 35-69.
9. Немцов В.Б., Камлюк А.Н., Ширко А.В.// Механика машин, механизмов и материалов, Минск, № 3 (4), 2008, с. 56–59.

ОЦЕНКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАДИАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТЕЛА ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ДИСКУ

Локтионов А.В., Соколова А.С.

In this work the assessment of methods of calculation the relative radial displacement of the body on a rotating disk is given. Established that the definition of the law of relative motion of the body is simplified with the use of inertia forces in comparison with the solution of the problem using Lagrange equations.

В работах [1-6] изложены различными методами расчеты по определению закона движения тел точечной массы, совершающей сложное движение. Однако, сравнительная оценка методов расчета механической системы с двумя степенями свободы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси в работах не представлены.

Рассмотрим движение системы тел при их вращении вокруг неподвижной оси при условии, что одно из тел системы перемещается в радиальном направлении. Первое тело – диск радиуса r , момент инерции которого I_0 . Второе тело – тело точечной массы m . Уравнение перемещения тела по радиусу диска можно найти, рассматривая относительное движение тела или используя уравнения Лагранжа.

Рассмотрим диск, который вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси Oz (рис. 1). Требуется найти, по какому закону будет двигаться вдоль радиуса диска тело массы m (точка M), помещенное в начальный момент на расстоянии x_0 от точки O , и какой момент $M_{вр}$ должен быть приложен к диску, чтобы он при этом вращался равномерно со скоростью ω .

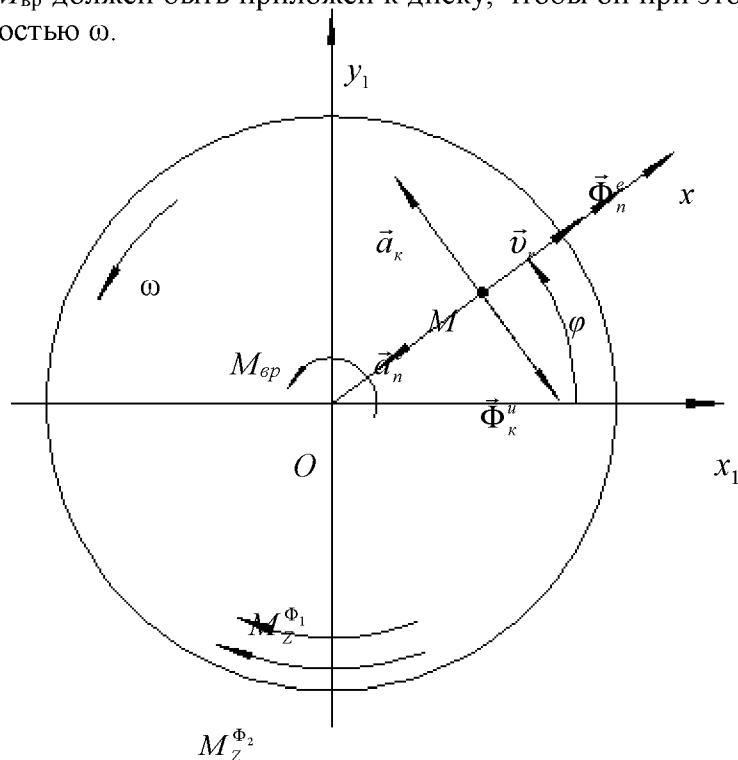


Рис. 1

Составим дифференциальное уравнение относительного движения тела массы m вдоль оси Ox

$$m\vec{a}_r = P + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_k^u, \quad (1)$$

где $P = mg$ – сила тяжести; $\vec{\Phi}_e^n$ – центробежная сила инерции; $\vec{\Phi}_\kappa^u$ – кориолисова сила инерции.

В проекции равенства (1) на ось Ox получим $m\ddot{x} = (\omega^2 x) \cdot m$, где $x = OM$.

Тогда дифференциальное уравнение движения тела будет иметь вид

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (2)$$

Его решение будем искать в виде $x = e^{rt}$. Корни характеристического уравнения $r^2 - \omega^2 = 0$ будут иметь вид $r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2}$. Тогда $x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$.

Общее решение уравнения будет иметь вид

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}. \quad (3)$$

Продифференцировав уравнение (3), получим

$$\dot{x} = c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}. \quad (4)$$

Подставив начальные условия ($t = 0, x = x_0, \dot{x} = 0$) в уравнения (3) и (4), будем иметь $x_0 = c_1 + c_2, 0 = c_1 \omega - c_2 \omega$. Получим $c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$. Следовательно, тело движется вдоль радиуса диска по закону

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}). \quad (5)$$

Условие равновесия системы в виде $\sum m_z (\vec{F}_k) = 0$ относительно оси Oz имеет вид $M_{ep} + M_Z^{\Phi_1} + M_Z^{\Phi_2} = 0$, где для диска $M_Z^{\Phi_1} = -I_0 \varepsilon = 0, M_Z^{\Phi_2} = \Phi_\kappa^u x = -2m(\omega \dot{x}) \cdot x$. Тогда $M_{ep} - 2m\omega \dot{x}x = 0$. Откуда получим

$$M_{ep} = 2m\omega \dot{x}x. \quad (6)$$

Выразим \dot{x} через x , с помощью равенств (4) и (5)

$$x^2 = \frac{x_0^2}{4} (e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} + 2), \quad (7)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{x_0^2}{4} \omega^2 (e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}). \quad (8)$$

Из (7) получим $e^{2\omega t} + e^{-2\omega t} = \frac{4x^2}{x_0^2} - 2$. Подставив в (8), имеем $\dot{x}^2 = \omega^2 (x^2 - x_0^2)$.

Тогда $\dot{x} = \omega \sqrt{x^2 - x_0^2}$.

Окончательно выражение для искомого момента M_{ep} будет иметь следующий вид

$$M_{ep} = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}. \quad (9)$$

Рассмотрим определение момента M_{ep} , используя уравнения Лагранжа. Как видно из рисунка система имеет две степени свободы (перемещение тела вдоль радиуса диска и поворот диска). Выберем за обобщенные координаты угол φ между OM и осью Ox_1 и расстояние $OC = x$ ($q_1 = \varphi, q_2 = x$).

Дифференциальные уравнения системы в обобщенных координатах (рис.1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Найдем обобщенные силы. При повороте диска на угол $\delta\phi$ приложенный к нему момент совершит элементарную работу $\delta A_1 = M_{ep} \delta\phi$. При перемещении тела массы m на расстояние δx элементарная работа приложенных сил $\delta A_2 = 0$. Следовательно $Q_1 = M_{ep}$, $Q_2 = 0$.

Вычислим кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий диска и тела, где $T_\phi = \frac{1}{2} I_O \omega^2$, $T = \frac{1}{2} m v^2$. В этих формулах I_O – момент инерции диска относительно оси Oz ; $\omega = \dot{\phi}$ – угловая скорость вращения диска; v – абсолютная скорость тела массы m .

Хотя определяется закон относительного движения тела вдоль радиуса диска, для составления уравнений Лагранжа следует вычислять кинетическую энергию системы в абсолютном движении – в движении относительно инерциальных осей.

Абсолютная скорость тела $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$, где численно $v_r = \dot{x}$; $v_e = OM \cdot \dot{\phi} = x\dot{\phi}$ (рис. 1).

Поэтому

$$v^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2.$$

Окончательно получим следующее выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2).$$

Вычислим частные производные, входящие в уравнения (10)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_O \dot{\phi} + m x^2 \dot{\phi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m x \dot{\phi}^2.$$

Подставляя эти величины и значения Q_1 , Q_2 в уравнения (10) и учтя одновременно,

что $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$, получим уравнения аналогичные (2) и (8).

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega^2 x &= 0, \\ M_{ep} &= 2m\omega \dot{x}. \end{aligned}$$

Интегрируя первое из уравнений и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи, найдем закон движения тела вдоль оси Ox

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Учитывая равенства (7) и (8), найдем $M_{ep} = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}$, что соответствует формуле (9).

Из равенства (9) следует, что для обеспечения равномерного вращения диска надо по мере продвижения тела вдоль оси Ox увеличивать вращающий момент. От момента инерции диска величина M_{ep} в этом случае не зависит.

Исследованиями установлено, что определение закона относительного движения тела в радиальном направлении и искомого вращающего момента значительно проще с использованием в расчете сил инерции, чем применение для решения поставленной задачи уравнений Лагранжа.

Следует рассмотреть случай когда угловая скорость вращения диска ω изменяется во времени.

Тогда кинетический момент системы

$$L = I\omega, \quad (11)$$

где I момент инерции системы

$$I = I_0 + mr^2. \quad (12)$$

Продифференцировав равенство (11), получим

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI}{dt} \omega = M^e. \quad (13)$$

Из равенства (13) следует, что угловое ускорение системы

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M^e - \frac{dI}{dt} \omega}{I}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что если $M^e = \frac{dI}{dt} \omega$, то $\frac{d\omega}{dt} = 0$, т.е. $\omega = \text{const}$;

$$M^e > \frac{dI}{dt} \omega, \text{ то } \frac{d\omega}{dt} > 0; \quad M^e < \frac{dI}{dt} \omega, \text{ то } \frac{d\omega}{dt} < 0.$$

Анализ уравнения (14) показывает, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил. Оценка влияния сил инерции на кинетические моменты тел системы, а также взаимосвязь момента кориолисовых сил инерции при движении тела массы m радиальном направлении с изменением момента инерции системы и угловой скоростью ω является предметом самостоятельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1983. – 528 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механике / С. М. Тарг. — М. : Высшая школа, 2003. – 416 с.: ил.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: Ч.2 / А. А. Яблонский, В. А. Никифоров. – М. : Высшая школа, 1984. – 423с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: Т. 2: Динамика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2006. – 736с.
5. Гернет, М. М. Курс теоретической механики: учебник для вузов / М. М. Гернет. – М. : Высшая школа, 1981. – 440 с.
6. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1984. – Ч. 2.- 560 с.

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Чигарев В.А., Чигарев Ю.В.

Введение

Устойчивость стохастически неоднородных реологических сложных сред относится к мало изученным вопросам современной механики, а их исследование сопряжено со значительными трудностями вычислительного и принципиального характера. Это прежде всего связано с приведением уравнения стохастической среды к виду удобному для исследования устойчивости, а так же с применением критериев устойчивости, которые разработаны в основном для однородных сред.

В данной работе стохастически неоднородная среда с трансляционным упрочнением преобразуется к однородной (в среднем) среде со сложными реологическими свойствами для которой в квазистатической постановке записываются уравнения устойчивости [1].

Предполагается, что докритические деформации малы. Это дает возможность использовать вспомогательные гипотезы кинематического и динамического характера для перехода от трехмерных уравнений к двумерным.

Исследована устойчивость пластины из случайно-неоднородного упруговязкопластического материала с детерминированными усилиями вдоль одной оси.

Следует отметить, что обзор и классификации постановок детерминированных задач об устойчивости прямоугольных пластин можно найти в монографии [2]. Там же дан сравнительный анализ значений критических нагрузок полученных по различным уравнениям устойчивости. В частности, доказано, что для композиционных материалов, как в пределах упругости, так и за пределом упругости привлечение прикладных теорий, построенных путем введения дополнительных гипотез (например, гипотезы Кирхгофа-Лява) не всегда приводит к точному результату.

1. Методы исследований.

1. Рассмотрим неоднородную среду в которой при упругом деформировании связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda_{ijke}(x) e_{kl}^e(x), \quad (1.1)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, e_{kl}^e – тензор упругих деформаций, $\lambda_{ijkl}(x)$ тензор упругих модулей, зависящий от пространственных координат x_i ($i, j, k, l = 1, 2, 3$). При отсутствии массовых сил уравнения равновесия запишем в виде

$$[\sigma_{ik}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0. \quad (1.2)$$

Граничные условия

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]n_j = p_i. \quad (1.3)$$

В (1.2) и (1.3) δ_{ik} – символ Кронекера, u_i – перемещения, n_j – нормаль к поверхности тела, p_i – поверхностные силы.

При наступлении в точках тела пластического состояния функция нагружения в общем случае будет иметь вид

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i, k_i) = 0, \quad (1.4)$$

здесь e_{ij}^p – пластические деформации, $\chi_i(x_i)$ – параметры упрочнения, $k_i(x_i)$ – материальные коэффициенты, зависящие от пространственных координат. Полная деформация в точках тела будет

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (1.5)$$

Условия Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.6)$$

Представим функцию нагружения через девиатор напряжения [3]

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

в виде

$$(S_{ij} - c(x)e_{ij}^p - \eta(x)\dot{e}_{ij}^p)(S_{ij} - c(x)e_{ij}^p - \eta(x)\dot{e}_{ij}^p) - k^2 = 0, \quad (1.7)$$

здесь $c(x)$ – коэффициент упрочнения, $\eta(x)$ – коэффициент вязкости, $k(x)$ – коэффициент пластичности.

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{e}_{ij}^p = \psi(S_{ij} - c(x)e_{ij}^p - \eta(x)\dot{e}_{ij}^p), \quad (1.8)$$

где ψ – положительный параметр.

Соотношения (1.1)-(1.8) определяют неоднородную упруговязкопластичекую среду с упрочнением.

Будем рассматривать процесс деформирования тела в квазистатической постановке.

Считаем, что параметры среды зависят случайным образом от пространственных координат, следовательно, поля напряжений, деформаций и перемещений также являются случайными функциями пространственных координат. Закон Гука перепишем в виде

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\sigma \right), \quad (1.9)$$

здесь ν – коэффициент Пуассона. Считаем $\nu = \text{const}$. $G = G(x)$ – модуль сдвига.

Параметры среды представим в виде [4]

$$G = \langle G \rangle f_1, \quad c = \langle c \rangle f_2, \quad k = \langle k \rangle f_3, \quad \eta = \langle \eta \rangle f_4, \quad (1.10)$$

где $f_i (i=1,2,3,4)$ – случайные статистически однородные изотропные функции, угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают математическое ожидание.

Вид функции f_i зависит от свойств материала и вида нагружения. Предположим, что

$$f_i = \langle f_i \rangle + f_i' = 1 + f_i', \quad (1.11)$$

а также функции обозначенные штрихом равны, т.е.

$$f_1' = f_2' = f_3' = f_4' = f'. \quad (1.12)$$

Рядом преобразований система уравнений (1.1)-(1.9) приводится к виду [1]

$$\begin{aligned} & 8f^3 \langle G \rangle^3 \langle k \rangle \dot{e}_{ij} - 4 \langle G \rangle^2 \langle k \rangle^2 T_{ij} f^2 = \\ & = [I_{ij} - 2f \langle c \rangle \langle G \rangle e_{ij} - \langle \eta \rangle (2 \langle G \rangle f \dot{e}_{ij} - T_{ij})] \times \\ & \times [I_{kg} - 2f \langle G \rangle \langle c \rangle e_{kg} - \langle \eta \rangle (2 \langle G \rangle f \dot{e}_{kg} - T_{kg})] \times [2f \langle G \rangle \dot{e}_{kg} - T_{kg}] \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{cases} T_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - 3\gamma\dot{\sigma}\delta_{ij} \\ J_{ij} = (2\langle G \rangle + \langle c \rangle)\sigma_{ij} - (2\langle G \rangle + 3\gamma\langle c \rangle)\sigma\delta_{ij} \\ \gamma = \frac{3\nu}{1+\nu} \end{cases} \quad (1.14)$$

Продельвая выкладки аналогичные работе [1] придем к системе уравнений описывающих среднее напряженное и деформированное состояние рассматриваемой среды, которое в силу громоздкости здесь не приводим.

Будем исследовать устойчивость среднего состояния тела по отношению к малым возмущениям граничных условий.

Решение для осредненного состояния представим в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+; \quad \langle e_{ij} \rangle = e_{ij}^0 + e_{ij}^+; \quad \langle u_{ij} \rangle = u_{ij}^0 + u_{ij}^+, \quad (1.15)$$

здесь параметры с нуликом определяют основное состояние, а с плюсом – возмущенное.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости деформирования бесконечно длинной в направлении ox_3 пластинки из упруго-пластического стохастически неоднородного материала. Обозначим через S длину, H – толщину пластины рис. 1. Пусть пластинка сжимается вдоль оси x_1 усилиями p . Будем предполагать, что масштаб неоднородности мал по сравнению с характерным масштабом пластины, что позволяет использовать интегрирование в бесконечных пределах при нахождении уравнений для основного среднего состояния и соответствующей тензор Грина [4]

Потерю устойчивости пластинки исследуем в плоскости x_1ox_2 . Используем предположение теории малых докритических деформаций и углов поворота.

Докритическое, в среднем однородное, напряженное и деформированное состояние определяется соотношениями [1].

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11}^0 \rangle &= -p; \quad \langle \sigma_{22}^0 \rangle = \langle \sigma_{12}^0 \rangle = 0; \quad \langle e_{12}^{p_0} \rangle = 0; \\ \langle e_{11}^{p_0} \rangle &= \langle e_{22}^{p_0} \rangle = \frac{p - \langle k \rangle \sqrt{1,5}}{3\langle c \rangle}; \\ \langle e_{33}^{p_0} \rangle &= -2 \frac{p - \langle k \rangle \sqrt{1,5}}{3\langle c \rangle}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

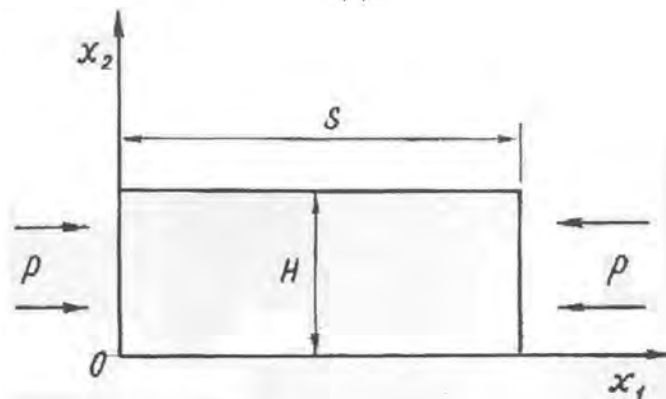


Рис. 1.

Уравнения равновесия для компонентов возмущения запишутся в виде

$$\begin{aligned}
& (a_{11} + a) \nabla^2 u_1^+ + (a_{12} + a) \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x_1 \partial x_2} - a \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1^2} = 0; \\
& (a_{11} + a) \nabla^2 u_1^+ + (a_{12} + a) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} \right) - a \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_2^2} - p \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь ∇^2 – оператор Лапласа. Коэффициенты a_{11} , a_{12} , a определяются выражениями

$$\begin{aligned}
a_{11} = & \frac{2\langle G \rangle (1-\nu)}{q} \left\{ \frac{\chi_1 \langle k \rangle^3}{2} + 4\langle G \rangle^2 p^2 + D_f \left[\frac{\chi_1}{4\langle G \rangle \langle c \rangle} - \frac{p(1-\nu)}{4\langle G \rangle^2} \left(\frac{\langle k \rangle^2 \langle c \rangle p}{2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{3p\langle c \rangle^2 \langle k \rangle^2}{16\langle G \rangle} + \frac{\chi_2 \langle c \rangle \langle k \rangle^2}{2} - \frac{\langle k \rangle^2 \langle c \rangle}{2\sqrt{2}} \right) - 4(1-\nu)\langle G \rangle^2 p^2 + \frac{\langle c \rangle \langle k \rangle^2}{8} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{\chi_2}{\langle c \rangle} - \frac{\nu p}{\langle G \rangle} \right) (2\sqrt{2}\langle k \rangle - \langle c \rangle) \right] \right\}; \\
a_{12} = & \frac{2\langle G \rangle \nu}{q} \left\{ 4\langle G \rangle^2 p^2 + \frac{\chi_1 \langle k \rangle^3}{2} - D_f \left(\frac{\langle k \rangle^2 \langle c \rangle}{8} \left[\left(\frac{\nu p}{\langle G \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\chi_2}{\langle G \rangle} \right)^2 + \frac{p\chi_2}{\langle G \rangle \langle c \rangle} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{p^2}{\langle G \rangle^2} \right] + 4\nu\langle G \rangle^2 p^2 \right) \right\};
\end{aligned}$$

$$a = 2\langle G \rangle + 4\nu(1 + 3D_f)$$

$$a_{11} = a_{22}; \quad a_{21} = a_{12};$$

$$q = (1-2\nu) \left\{ 4\langle G \rangle^2 p^2 + \langle k^4 \rangle + D_f \frac{\langle c \rangle^2 \langle k \rangle^2}{2} \left(\frac{\chi_2}{\langle c \rangle} - \frac{p}{2\langle G \rangle} \right)^2 \right\};$$

$$\chi_1 = \sqrt{2}p - \langle k \rangle; \quad \chi_2 = \sqrt{2}\langle k \rangle - p.$$

$D_f = \langle f'^2 \rangle$ – дисперсия неоднородности.

В возмущенном состоянии компоненты напряжений связаны с перемещениями формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^+ &= \frac{2}{H} \left(a_{11} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} \right) \\
\sigma_{22}^+ &= \frac{2}{H} \left(a_{11} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} + a_{12} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) \\
\sigma_{11}^+ &= \frac{2a}{H} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} \right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) можно привести к системе с уравнений в амплитудных величинах перемещений [2, 3]

$$R_{ij} u_j^+ = 0 \quad (i, j = 1, 2), \tag{2.4}$$

где дифференциальные операторы имеют вид

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \left(a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a \frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} \right) \\
R_{22} &= \left(a_{11} \frac{\partial u^2}{\partial x_2^2} + (a+p) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \\
R_{12} &= R_{21} = (a_{12} + a) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Решение (2.4) ищем в форме

$$u_i^+ = - \left(a_{12} \frac{\partial^2 F^{(j)}}{\partial x_1 \partial x_2} + a \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \delta_{i1} + \left(a_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + a \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) \delta_{i2} \quad (i=1,2). \tag{2.6}$$

Функции F определяются из условия нетривиального решения

$$(R_{11}R_{22} - R_{12}^2)F^{(j)} = 0. \tag{2.7}$$

Подставив (2.4) в (2.7), получим

$$F^{(j)} \left\{ (a-p)a_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + [a_{11}^2 - a_{12}(a_{12} + 2a) - pa] \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{11}a \frac{\partial^2}{\partial x_2^4} \right\} = 0. \tag{2.8}$$

Решение (2.8) запишем в следующем виде

$$F^{(j)} = \sum_{k=1}^2 F_k; \quad F \left(\xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) = 0. \tag{2.9}$$

Постоянные ξ_k имеют вид.

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2 - 2a_{12}a - pa}{2a_{11}a} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2 - 2a_{12}a - pa}{2a_{11}a} \right)^2 - a_{11} \frac{a-p}{a_{11}a}}. \tag{2.10}$$

При исследовании устойчивости в случае одностороннего выпучивания решение уравнений (2.8), четное по x_2 , для F удобно искать в форме

$$F = \sum_{i=1}^2 \left(c_i ch \frac{nH}{S} \xi_i x_2 \right) \sin \frac{\pi}{S} x_1$$

C_i – произвольные постоянные.

Напряжения возмущенного состояния при цилиндрической форме потери устойчивости, определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^+ &= a \left(a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} F; \\
\sigma_{22}^+ &= a \left(a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{a_{11}^2 - a_{12}(a_{12} - a)}{A_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} F; \\
\sigma_{12}^+ &= -a \left(a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - a_{11}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} F.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$\sigma_{22|_{x_2=0,H}}^+ = 0, \quad \sigma_{12|_{x_2=0,H}}^+ = 0, \tag{2.12}$$

или, учитывая (2.11), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{a_{11}^2 - a_{12}(a_{12} - a)}{a} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} F = 0, \\ & \left(a \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} F = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из условия существования нетривиального решения [2] получаем для определения критических усилий трансцендентное уравнение в виде

$$\left(\xi_1^2 - \theta_1 \right) \left(\xi_2^2 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \right) \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2 \psi \operatorname{sh} \psi \xi_2 - \left(\xi_2^2 - \theta_1 \right) - \left(\xi_1^2 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \right) \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2 \psi \operatorname{sh} \psi \xi_1 = 0, \quad (2.14)$$

где $0 = \frac{a_{11}^2 - a_{12}(a_{12} - a)}{a^2}$; $\psi = \frac{\pi H}{2S}$.

Для тонких полос, раскладывая гиперболические функции в степенной ряд до членов третьего порядка и подставляя полученное выражение в (2.14), находим:

$$\begin{aligned} & \left(\xi_1^2 \xi_2^2 - \frac{a_{11} \theta_1}{a_{12}} \right) \left\{ 1 + \frac{\psi^2}{6} \left[\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 \right) + \frac{\psi^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 4 \xi_1^2 \xi_2^2}{20} \right] - \right. \\ & \left. - \theta_1 \xi_1^2 \xi_2^2 \left(1 + \xi_1^2 \xi_2^2 \right) + \psi \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 \right) \frac{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 \right) + 8 \xi_1^2 \xi_2^2}{20} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Согласно соотношению (2.10) с учетом (2.15) получаем

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \alpha_{11} - P; \quad \xi_1^2 \xi_2^2 = 1 - \frac{a_{11}}{a} P. \quad (2.16)$$

Подставив (2.16) в (2.15), получим кубическое уравнение относительно

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_{11}^0}{a_{11}} = \chi, \\ & \Delta_1 + \Delta_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{a_{11}}{a_{12}} \chi - \frac{a_{11}}{a} \theta_1 & a_{11} \left(1 - \frac{a_{11} \chi}{a} \right) \\ \frac{\psi^3}{3} \left[1 + \frac{\psi}{10} (\theta_1 - \chi) \right] & 1 + \frac{\psi^2}{6} \left\{ (\theta_1 - \chi) + \frac{\psi^2}{20} \left[\theta_1 (\theta_1 - 2\chi) + \chi^4 + 4 - 4 \frac{a_{11} \chi}{a} \right] \right\} \end{array} \right| \\ \Delta_2 &= \left| \begin{array}{cc} \frac{a_{11} \theta_1}{a_{12}} & 1 \\ 0 & \left\{ 1 - \frac{\chi}{\theta_1} + \frac{\psi^2}{6 \theta_1} \left(\theta_1^2 - 2 \theta_1 \chi + \chi^2 + 2 - 2 \frac{a_{11}}{\theta_1} \chi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\psi^2}{120 \theta_1} (\theta_1 - \chi) \left[\theta_1 (\theta_1 - 2\chi) + \chi^4 + 8 \frac{a_{11} \chi}{a} \right] \right\} \end{array} \right| \end{aligned} \quad (2.18)$$

Рассмотрим двухкомпонентный материал. В безразмерных величинах связь между критической нагрузкой $P_0 = p \langle G \rangle^{-1}$ и параметрами среды $c_0 = \langle c \rangle \langle G \rangle^{-1}$; $k_0 = \langle k \rangle \langle G \rangle^{-1}$ выразиться следующим соотношением

$$P_0 = \frac{\psi^2}{9 B_1} B_4 \left[1 - \frac{2 \psi}{15 B_1 B_3} (B_4 - B_2 B_3) \right]; \quad (2.19)$$

здесь

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{k_0(\sqrt{2} + k_0) + D_f [k_0 + (k_0\sqrt{2} - 1)] + 0,5}{k_0^2 + D_f(k_0^2 - k_0\sqrt{2} + 0,5) + 2}, \\
B_2 &= \frac{k_0(\sqrt{2} - k_0) + D_f(k_0^2 - k_0\sqrt{2} + 1)}{k_0^2 + D_f(k_0^2 - k_0\sqrt{2} + 0,5) + 2}, \\
B_3 &= 2(1 + 3D_f), \quad B_4 = 3(B_1^2 - B_2^2).
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

При выводе соотношений (2.19) – (2.20) для упрощения положим $c_0 = 1$ коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Для случайной неоднородной упруго-вязкопластической среды получение критической силы с привлечением гипотезы Кирхгофа-Лява определяется первым сомножителем уравнения (4.19), а ошибка при нахождении критической силы между точной теорией и прикладной теорией выражается формулой

$$\frac{9P_0B_1 - \psi^2B_4}{\psi^2B_4} = -\frac{2\psi^2}{15B_2B_3}(B_4 - B_2B_3).
\tag{2.21}$$

Из (2.19) и (2.21) следует, что при исследовании устойчивости стохастически неоднородных пластинок из двухкомпонентного материала гипотеза Кирхгофа-Лява является асимптотически точной, т.е. значение критической нагрузки совпадает с первым членом разложения критической силы, вычисленной по точной теории. На

рис. 2.3 представлены зависимости между параметром ψ и величиной \tilde{P}_0 , где

$$\tilde{P}_0 = 1 - \frac{2\psi^2}{15B_2B_3}(B_4 - B_2B_3).
\tag{2.22}$$

Кривые соответствуют значениям, приведенным в таблице 1. На рис. 2 кривые соответствуют однородному напряженному и деформированному состоянию пластинки для разных коэффициентов пластичности. Величина критической силы в случае однородного состояния $D_f = 0$ слабо меняется при изменении геометрических размеров пластинки и при увеличении коэффициента пластичности предельные напряжения становятся больше рис. 2.

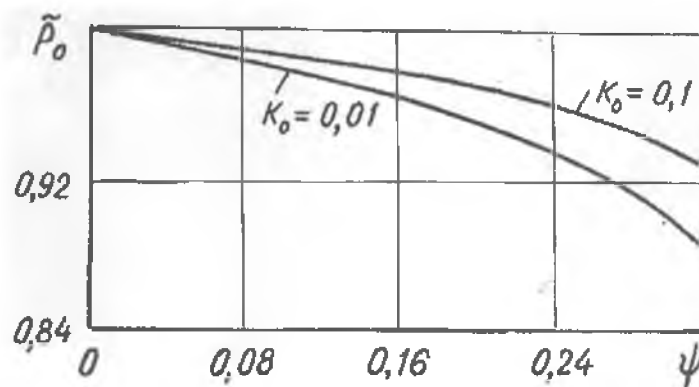


Рис. 2. Представлена зависимость между параметром ψ и величиной \tilde{P}_0 . Кривые соответствуют значениям приведенным в таблице 1. Кривые получены для однородного напряженного состояния, когда дисперсия неоднородности равна нулю $D_f = 0$.

Таблица 1.

№ рис.	Ψ	K_0	P_0	P_0^*	D_f
1	0,08	0,1	0,9853	0,9823	0
	0,16	0,1	0,9906	0,9756	0
	0,24	0,1	0,9600	0,9571	0
	0,32	0,1	0,9436	0,9199	0
	0,08	0,01	0,9800	0,9791	0
	0,16	0,01	0,9611	0,9552	0
	0,24	0,01	0,9363	0,9134	0
	0,32	0,01	0,8705	0,8500	0
2	0,08	0,1	0,9844	0,9814	0,2
	0,15	0,1	0,9008	0,8905	0,2
	0,24	0,1	0,8103	0,8000	0,2
	0,32	0,1	0,7250	0,6760	0,2
	0,08	0,01	0,9780	0,9721	0,2
	0,16	0,01	0,9610	0,8501	0,2
	0,24	0,01	0,7470	0,7243	0,2
	0,32	0,01	0,6108	0,5500	0,2

Из рис. 3. следует, что учет неоднородности материала идет к снижению критических напряжений.

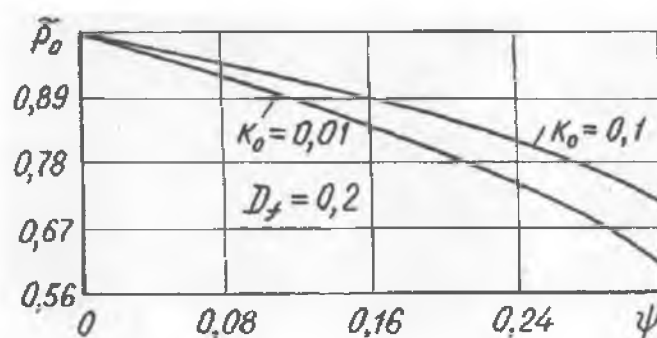


Рис. 3. Кривые зависимости критической силы от геометрических размеров пластины ψ . Кривые получены для неоднородного напряженного и деформированного состояния, когда $D_f = 0,2$. Показано, так же влияние пластичности на значение критической силы.

Выводы

Полученные выражения для критической силы показывает, что при исследовании устойчивости стохастических неоднородных упруговязкопластических тел гипотеза Кирхгофа-Лява является асимптотически точной. Установлено, что на величину критической силы влияют геометрические размеры полоски, средние параметры свойств материала и неоднородность.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Спорыхин А.Н., Чигарев Ю.В. Об устойчивости деформирования стохастически неоднородной упрочняющейся упруговязкопластической среды. Прикл. механика, т. 13, № 3, 1977. – с. 24-32.
2. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Изд-во «Наукова думка», 1971. – с. 275.
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Москва «Физматлит», 2001, с. 445.

ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННАЯ ТРЕЩИНА В АНИЗОТРОПНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Савенков В.А.

Two-dimensional elasticity solution and the stress intensity factors are determined for finite crack in one of the materials of biomaterial anisotropic composite.

Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации анизотропное упругое тело, состоящее из двух полупространств $D_j (j=1,2)$ с различными упругими постоянными. Границу полупространств берем за плоскость $y=0$. Индекс $j=1$ соответствует верхнему полупространству, а $j=2$ – нижнему.

Предположим, что нижнее полупространство содержит произвольно ориентированную трещину длиной $2l$, поверхность которой нагружена давлением $p = const$. Нагрузка на бесконечности отсутствует.

Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в такой области.

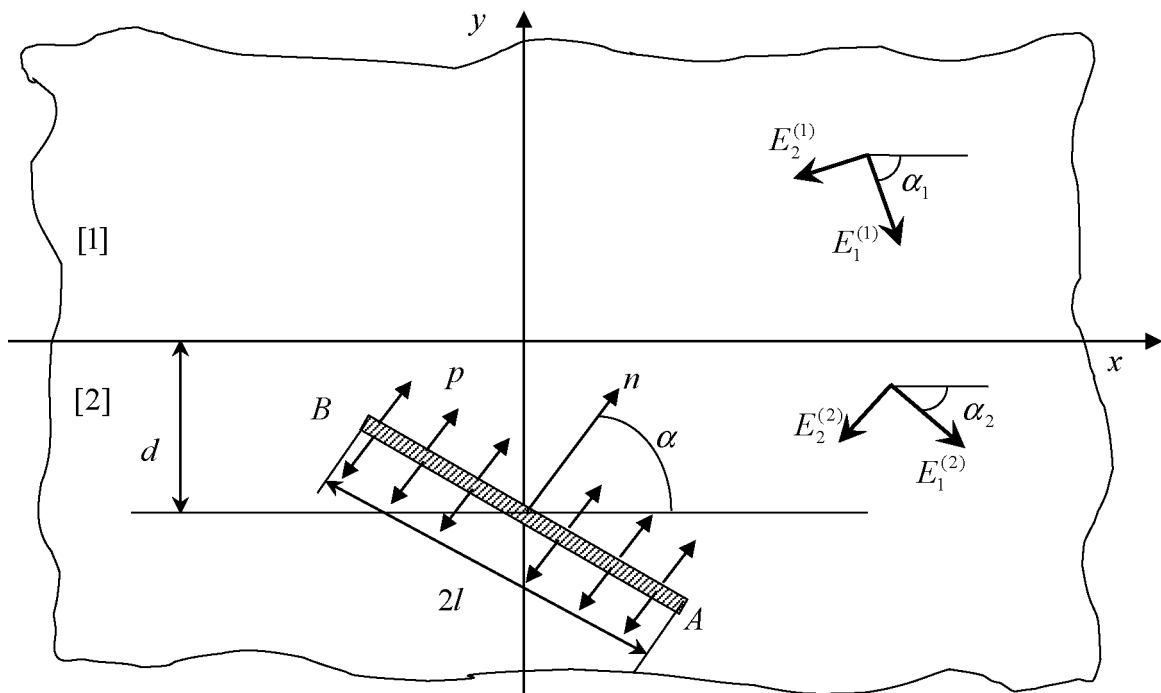


Рис.1 Расчетная схема задачи

Компоненты напряжений и смещений вычисляются по формулам [1]:

$$\{\sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 (\mu_{vj}^2, 1, -\mu_{jv}^2) \Phi_v^{(j)}(z_v^{(j)}) \right\},$$

$$\{U^{(j)}, V^{(j)}\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 (p_v^{(j)}, q_v^{(j)}) \varphi_v^{(j)}(z_v^{(j)}) \right\}.$$

Здесь $z_v^{(j)} = x + \mu_{vj}y$ – комплексная переменная; $\Phi_v^{(j)}(z_v^{(j)})$, $\varphi_v^{(j)}(z_v^{(j)})$ – аналитические функции в областях D_j ; $\varphi'(z) = \Phi(z)$; $p_v^{(j)} = c_{11}^{(j)}\mu_{vj}^2 + c_{12}^{(j)} - c_{16}^{(j)}\mu_{vj}$, $\mu_{vj}q_v^{(j)} = c_{11}^{(j)}\mu_{vj}^2 + c_{22}^{(j)} - c_{26}^{(j)}\mu_{vj}$; $\mu_j = \mu_{vj}$ – корни характеристического уравнения

$$c_{11}^{(j)}\mu_j^4 - 2c_{16}^{(j)}\mu_j^3 + (2c_{12}^{(j)} + c_{66}^{(j)})\mu_j^2 - 2c_{26}^{(j)}\mu_j + c_{22}^{(j)} = 0,$$

$c_{kl}^{(j)}$ – коэффициенты закона Гука.

Для вывода исходного интегрального уравнения задачи воспользуемся фундаментальным решением о действии сосредоточенной силы в кусочно-однородном изотропном пространстве, построенном в работе [2].

В соответствии с этим решением комплексные потенциалы $\Phi_v^{(j)}$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) &= \frac{s_1 A_0}{z_1^{(1)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{s_2 B_0}{z_1^{(1)} - \tau_2^{(2)}}, \\ \Phi_2^{(1)}(z_2^{(1)}) &= \frac{l_1 A_0}{z_2^{(1)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{l_2 B_0}{z_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}}, \\ \Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)}) &= \frac{A_0}{z_1^{(2)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{n_1 \overline{A_0}}{z_1^{(2)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{n_2 \overline{B_0}}{z_1^{(2)} - \tau_2^{(2)}}, \\ \Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)}) &= \frac{B_0}{z_2^{(2)} - \tau_2^{(2)}} + \frac{m_1 \overline{A_0}}{z_2^{(2)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{m_2 \overline{B_0}}{z_2^{(2)} - \tau_2^{(2)}}\end{aligned}\quad (1)$$

где $\tau_v^{(j)} = x_0 + \mu_{vj}y_0$ (x_0, y_0 – координаты приложения сосредоточенной силы $P(X_0, Y_0)$). Коэффициенты A_0, B_0 вычисляются через X_0, Y_0 при помощи системы четырех линейных алгебраических уравнений (два условия однозначности смещений и два статических условия) [3].

Коэффициенты $s_1, s_2, l_1, l_2, n_1, n_2, m_1, m_2$ находятся, удовлетворяя условиям идеального силового контакта при $y = 0$:

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad U^{(1)} = U^{(2)}, \quad V^{(1)} = V^{(2)} \quad (2)$$

которые приводят к системе уравнений ($j = 1, 2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mu_{11} & \mu_{21} & -\overline{\mu_{12}} & -\overline{\mu_{22}} \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & -\overline{p_1^{(2)}} & -\overline{p_2^{(2)}} \\ q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & -\overline{q_1^{(2)}} & -\overline{q_2^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ l_i \\ n_i \\ m_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_{i2} \\ p_i^{(2)} \\ q_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что вдоль трещины L действуют непрерывно распределенные усилия интенсивности $P(t)$. Тогда искомые функции $\Phi_v^{(j)}(z_v^{(j)})$, описывающие поле напряжений в кусочно-однородной плоскости с трещиной, на основании формул (1), можно представить как результат суперпозиций (ds – элемент отрезка L):

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) &= \int_L \frac{s_1 A_0(t) ds}{z_1^{(1)} - t_1^{(2)}} + \int_L \frac{s_2 B_0(t) ds}{z_1^{(1)} - t_2^{(2)}}, \\ \Phi_2^{(1)}(z_2^{(1)}) &= \int_L \frac{l_1 A_0(t) ds}{z_2^{(1)} - t_1^{(2)}} + \int_L \frac{l_2 B_0(t) ds}{z_2^{(1)} - t_2^{(2)}},\end{aligned}$$

$$\Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)}) = \int_L \frac{A_0(t)ds}{z_1^{(2)} - t_1^{(2)}} + \int_L \frac{n_1 \overline{A_0(t)}ds}{z_1^{(2)} - \overline{t_1^{(2)}}} + \int_L \frac{n_2 \overline{B_0(t)}ds}{z_1^{(2)} - \overline{t_2^{(2)}}},$$

$$\Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)}) = \int_L \frac{B_0(t)ds}{z_2^{(2)} - t_2^{(2)}} + \int_L \frac{m_1 \overline{A_0(t)}ds}{z_2^{(2)} - \overline{t_1^{(2)}}} + \int_L \frac{m_2 \overline{B_0(t)}ds}{z_2^{(2)} - \overline{t_2^{(2)}}};$$

Положим $\alpha_v = \mu_{v2} \cos \alpha - \sin \alpha$, ($v = 1, 2$), где α – угол между положительным направлением нормали к левому берегу трещины при движении от A к B в точке t и осью Ox .

Учитывая формулу $dt_v = \alpha_v ds$ и вводя функции $r(t) = -\frac{2\pi i A_0(t)}{\alpha_v}$, $q(t) = -\frac{2\pi i B_0(t)}{\alpha_v}$, перепишем предыдущие формулы так:

$$\Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{r(t)dt_1^{(2)}}{t_1^{(2)} - z_1^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{n_1 \overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{t_1^{(2)} - \overline{z_1^{(2)}}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{n_2 \overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{t_2^{(2)} - \overline{z_1^{(2)}}},$$

$$\Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)dt_2^{(2)}}{t_2^{(2)} - z_2^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{m_1 \overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{t_1^{(2)} - \overline{z_2^{(2)}}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{m_2 \overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{t_2^{(2)} - \overline{z_2^{(2)}}}.$$

Так определенные функции автоматически обеспечивают выполнение нулевых граничных условий на бесконечности и условий на границе раздела (2).

Так как все операции интегрирования совершаются в плоскости z (вдоль L), то везде под переменными t_1, t_2 следует подразумевать их выражения через переменную t :

$$t_v = \operatorname{Re}(t) + \mu_v \operatorname{Im}(t), t \in L$$

Функции $r(t), q(t)$ определяются из краевых условий на берегах разреза L и дополнительных условий однозначности смещений.

Краевые условия на L зададим в виде [4]:

$$a\Phi_1^{(2)\pm}(t_1^{(2)}) + b\overline{\Phi_1^{(2)\pm}(t_1^{(2)})} + \Phi_2^{(2)\pm}(t_2^{(2)}) = F^\pm(t), t \in L \quad (3)$$

где $a = \frac{a_0 a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_0 a_1}{a_2}$, $a_0 = \frac{\mu_{12} - \mu_{22}}{\mu_{22} - \mu_{22}}$, $b_0 = \frac{\mu_{12} - \mu_{22}}{\mu_{22} - \mu_{22}}$, $F^\pm = \frac{-p(\cos \alpha + \mu_{22} \sin \alpha)}{a_2(\mu_{22} - \mu_{22})}$.

Так как функции $\Phi_v^{(2)}(z_v^{(2)})$, на основании формул Сохоцкого-Племеля [5], имеют при стремлении к точке $z^{(2)}$ области D_2 и некоторой точке t_0 отрезка L предельные значения

$$\Phi_1^{(2)\pm}(t_{10}^{(2)}) = \pm \frac{r(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{r(t)dt_1^{(2)}}{t_1^{(2)} - t_{10}^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{n_1 \overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{t_1^{(2)} - \overline{t_{10}^{(2)}}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{n_2 \overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{t_2^{(2)} - \overline{t_{10}^{(2)}}}$$

$$\Phi_2^{(2)\pm}(t_{20}^{(2)}) = \pm \frac{q(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)dt_2^{(2)}}{t_2^{(2)} - t_{20}^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{m_1 \overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{t_1^{(2)} - \overline{t_{20}^{(2)}}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{m_2 \overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{t_2^{(2)} - \overline{t_{20}^{(2)}}}$$

то вычитая из первого предельного равенства (3) второе, будем иметь:

$$ar(t) + b\overline{r(t)} + q(t) = 0, t \in L \quad (4)$$

Складывая предельные равенства (3), приходим с учетом (4) к сингулярному интегральному уравнению относительно $r(t)$, которое после замены переменных $t = -i\delta l + sle^{i(\alpha - \pi/2)}$, $t_0 = -i\delta l + s_0 le^{i(\alpha - \pi/2)}$ принимают вид:

$$\int_{-1}^1 [K(s, s_0)r(s) + L(s, s_0)\overline{r(s)}] ds = \pi\psi(s_0), s_0 \in [-1, 1], \delta = d/l \quad (5)$$

где

$$K(s, s_0) = \frac{1}{s - s_0} + \frac{1}{2b_0} \left[\frac{\overline{n_1 a_0 a_1}}{f_1(s, s_0)} + \frac{\overline{m_1 a_2}}{f_2(s, s_0)} - \frac{\overline{m_2 a_0 a_2}}{f_3(s, s_0)} - \frac{\overline{n_2 a_0 a_0 a_1}}{f_4(s, s_0)} + \frac{\overline{n_2 b_0^2 a_1}}{f_4(s, s_0)} \right],$$

$$L(s, s_0) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\overline{n_1 a_1}}{f_1(s, s_0)} + \frac{\overline{m_2 b_0 a_1 a_2}}{a_1 \overline{b_0} f_3(s, s_0)} + \frac{\overline{n_2 a_0 b_0 a_1^2}}{a_1 \overline{b_0} f_4(s, s_0)} - \frac{\overline{n_2 a_0 a_1}}{f_4(s, s_0)} \right],$$

$$f_1(s, s_0) = \omega(s, s_0) + \delta(\overline{\mu_{12}} - \mu_{12}) + (\overline{\mu_{12} s_0} - \mu_{12} s) \cos \alpha,$$

$$f_2(s, s_0) = \omega(s, s_0) + \delta(\overline{\mu_{22}} - \mu_{12}) + (\overline{\mu_{22} s_0} - \mu_{12} s) \cos \alpha,$$

$$f_3(s, s_0) = \omega(s, s_0) + \delta(\overline{\mu_{22}} - \mu_{22}) + (\overline{\mu_{22} s_0} - \mu_{22} s) \cos \alpha$$

$$f_4(s, s_0) = \omega(s, s_0) + \delta(\overline{\mu_{12}} - \mu_{22}) + (\overline{\mu_{12} s_0} - \mu_{22} s) \cos \alpha,$$

$$\omega(s, s_0) = (s - s_0) \sin \alpha, \quad \psi(s_0) = -i \frac{p(\overline{\cos \alpha} + \mu_{22} \sin \alpha)}{a_2 (\overline{\mu_{22}} - \mu_{22})}$$

Условие однозначности смещений записываются в виде:

$$\int_{-1}^1 r(s) ds = 0. \quad (6)$$

Численное решение интегрального уравнения (5) получим методом механических квадратур [6].

Решение уравнения будем искать в виде:

$$r(s) = \frac{r^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (7)$$

Для вычисления регулярных интегралов будем пользоваться квадратурной формулой Гаусса-Чебышева [6]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(s_k), s_k = \cos \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) (k = \overline{1, n}), \quad (8)$$

а для вычисления сингулярного интеграла формулой:

$$\int_{-1}^1 \frac{r^*(s) ds}{\sqrt{1-s^2} (s - s_{0m})} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{r_k^*}{s_k - s_{0m}}, r_k^* = r^*(s_k), s_{0m} = \cos \left(\frac{\pi m}{n} \right). \quad (9)$$

Применив квадратурные формулы (8) и (9) к уравнению (5) и интегралу (6) придем к системе алгебраических уравнений для неизвестных постоянных r_k^* :

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_{k1} \alpha_{km}^+ - r_{k2} \beta_{km}^-) = \varphi_1 \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_{k1} \beta_{km}^+ + r_{k2} \alpha_{km}^-) = \varphi_2 \\ \sum_{k=1}^n r_{k1} = 0, \sum_{k=1}^n r_{k2} = 0, m = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (10)$$

где $r_{k1} + i r_{k2} = r_k^*$, $\alpha_{km}^\pm + i \beta_{km}^\pm = \frac{1}{n} [K(s_k, s_{0m}) \pm L(s_k, s_{0m})]$, $\varphi = \varphi_1 + i \varphi_2$.

После решения этой системы уравнений можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины [6]

$$\begin{cases} k_1^\pm = \pm p\sqrt{l} [R^\pm \cos^2 \alpha + T^\pm \sin^2 \alpha - S^\pm \sin 2\alpha] \\ k_2^\pm = \pm p\sqrt{l} [(T^\pm - R^\pm) \cos \alpha \sin \alpha - S^\pm \cos 2\alpha] \end{cases} \quad (11)$$

где $R^\pm = \operatorname{Re}\{i[\mu_{22}^2 \overline{r^*(\pm 1)} - (\mu_{12}^2 - \mu_{22}^2)r^*(\pm 1)]\}$, $T^\pm = \operatorname{Re}[i\overline{r^*(\pm 1)}]$,

$$S^\pm = \operatorname{Re}\{i[\mu_{22}^2 \overline{r^*(\pm 1)} - (\mu_{12}^2 - \mu_{22}^2)r^*(\pm 1)]\}, r^*(1) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k r_k^* \operatorname{ctg}\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right),$$

$$r^*(-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} r_k^* \operatorname{tg}\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right).$$

Верхний знак относится к правому концу трещины, а нижний – к левому.

Таблица 1.

Коэффициенты интенсивности напряжений ($k_i / p\sqrt{l}$)

α	δ	e_{11}, e_{12}	4., 10.	4., 10.	4., 10.	1.1, 8.	1.1, 8.	1.1, 8.
		e_{22}, e_{21}	2., 9	1.4, 7.	1.1, 8.	4., 10	1.4, 7.	2., 9.
45	2	k_1^-	0.77	0.71	0.73	0.83	0.72	0.80
		k_1^+	0.99	0.79	0.71	0.90	0.78	0.96
		k_2^-	-0.027	-0.059	-0.039	-0.018	-0.053	-0.024
		k_2^+	-0.033	-0.061	-0.038	-0.024	-0.051	-0.026
45	3	k_1^-	0.70	0.67	0.69	0.72	0.66	0.71
		k_1^+	0.75	0.69	0.74	0.71	0.67	0.73
		k_2^-	-0.02	-0.050	-0.033	-0.0032	-0.040	-0.090
		k_2^+	-0.02	-0.056	-0.035	-0.0038	-0.039	-0.010
30	2	k_1^-	0.46	0.45	0.44	0.50	0.45	0.47
		k_1^+	0.47	0.70	0.48	0.69	0.53	0.38
		k_2^-	0.20	0.14	0.17	0.24	0.16	0.22
		k_2^+	0.21	0.23	0.18	0.33	0.18	0.17
90	2	k_1^-	0.58	0.55	0.56	0.61	0.55	0.59
		k_1^+	0.61	0.57	0.58	0.66	0.67	0.67
		k_2^-	0.74	0.69	0.70	0.71	0.63	0.68
		k_2^+	0.78	0.71	0.74	0.80	0.72	0.80

В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений, вычисленных по формулам (11) в зависимости от ориентации трещины, расстояния до линии раздела и соотношения упругих постоянных

$$e_{11} = \frac{E_1^{(1)}}{E_2^{(1)}}, e_{12} = \frac{E_1^{(1)}}{G_{12}^{(1)}}, e_{22} = \frac{E_1^{(2)}}{E_2^{(2)}}, e_{21} = \frac{E_1^{(2)}}{G_{12}^{(2)}}$$

При некоторых значениях этих параметров коэффициенты интенсивности напряжений принимают отрицательные значения. Такого рода эффекты наблюдают-

ся при решении других задач, например, задачи о трещине в упругой полуплоскости [6]. Следует иметь в виду, что такие величины самостоятельного значения не имеют, поскольку в этом случае необходимо решать задачу в постановке, учитывающей контакт берегов. Однако отрицательные значения k в силу линейности задачи могут быть использованы для суперпозиции некоторых видов нагрузки, при действии которых суммарное значение k положительно

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.-416с.
2. Савенков, В.А. Кусочно-однородная ортотропная плоскость под действием сосредоточенной силы / В.А. Савенков, А.А. Кушунин // Вестник БГУ, сер.1 – 2005. - №3 – с.108-110.
3. Прусов, И.А. Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Мн.: Изд-во БГУ, 1978. – 200с.
4. Фильштинский, Л.А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами / Л.А. Фильштинский // Изв. АН СССР, МТТ. – 1976. - №5. – с.91 – 97.
5. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – 511с.
6. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324с.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ШИРОКОПОЛОСНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ МИКРО-НАНОАКТЮАТОРОВ

Сунка В.Я., Колешко Л.А.

New class of wide band ultrasonic micro – nanoactuators with increased stability of parameters was offered by authors. Output mechanical parameters are shown as results of computer simulation and experimental explorations.

В настоящее время на фоне интенсивного развития микроэлектроники, заметно некоторое отставание в создании исполнительных элементов мехатронных систем. В частности, задача создания высокоточных и миниатюрных актюаторов линейного и ограниченного углового перемещения весьма актуальна. Не менее значима актуальность и в разработке высокоточных, безредукторных приводов. В наибольшей мере указанным требованиям могут удовлетворять пьезоэлектрические исполнительные элементы (ПЭИЭ). Сюда можно отнести пьезоактюаторы (ПА) и пьезомоторы (ПМ). ПЭИЭ имеют уникальную совокупность положительных свойств: малые размеры, высокая разрешающая способность, широкий диапазон рабочих частот, значительные выходные усилия, отсутствие внешнего электромагнитного поля, широкий температурный диапазон, достаточная надежность. ПА имеют простую конструкцию и работают на основе обратного пьезоэффекта. Необходимое перемещение достигается за счет деформации пьезоэлемента при подаче на него электрического напряжения. Конструктивно пьезоэлементы выполняются в виде отдельных пластин или составного блока: секционного монолитного, склеенного составного и составного упругоподжатого пьезопреобразователя. ПА обеспечивает перемещения до десятков и сотен микрометров с нанометрической точностью.

Основной недостаток существующих ультразвуковых актюаторов заключается в существенном изменении выходных параметров (усилие, амплитуда и скорость перемещения) вследствие изменения резонансной частоты узкополосной механической ультразвуковой колебательной системы (УЗКС) при переменном воздействии различных дестабилизирующих факторов (температуры, усилия прижима, шероховатости контактирующих материалов, старения и т.д.). Повысить стабильность выходных параметров ультразвуковых актюаторов возможно методом расширения полосы пропускания их амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) [1.2] выходных механических параметров.

Данный метод реализуется с помощью электрических пассивных и активных цепей, включаемых между выходом генератора и входом УЗКС и образующих с ней систему электромеханически связанных контуров (ЭМСК).

В статье исследованы параметры широкополосных микроактюаторов в зависимости от параметров входных электрических цепей и конструктивно-технологических параметров исходной узкополосной УЗКС. Основу широкополосного ультразвукового микроактюатора (рис. 1) составляют: узкополосная УЗКС, включающая излучающую пьезоэлектрическую 1 и отражающую 2 пластины, волновод 3; компенсирующая индуктивность L_k 4 с ее активным сопротивлением R_6 ; корректирующая емкость C_k 5 и источник питания E_T 6. В качестве излучателя использовалась пьезокермика ЦТС-19 диаметром 5 мм и толщиной 1 мм со статической емкостью $C_0 = 1000 \pm 25$ пФ при величине пьезомодуля $d_{33} = 3.3 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н. В качестве волновода могут использоваться формы образующей: однородный цилиндрический или прямоугольный стержень одинакового сечения по его длине; цилиндрические формы коническая (при коэффициенте усиления амплитуды колебаний на

излучающем торце $N=2,25$ и $4,58$), экспоненциальная ($N=5$; 10 и 15) и катеноидальная ($N=5$; 10 и 15) (рис. 1). В зависимости от формы волновода используют пьезокерамическую пластину прямоугольной или дисковой формы. В настоящей статье рассматриваются волноводы только конической, экспоненциальной и катеноидальной формы с указанной величиной коэффициента N . Исходная узкополосная УЗКС имела резонансную частоту продольных колебаний $f_p \sim f_2 \sim 420$ кГц. Величина механической нагрузки Z_n на торец волновода 3 (рис. 1) изменялась от нулевого до максимального значения 1000 Н·с/м. Величина механического параметра S (амплитуды перемещения, скорости колебаний) на торце волновода определялась через коэффициент электромеханического преобразования $K_{эп}$ по выражению $S = K_{эп} \cdot U_{п}$, где $U_{п}$ – электрическое напряжение возбуждения пьезопреобразователя УЗКС. Расчет величины $K_{эп}$ производился с помощью ЭВМ с использованием полной шестиполусной эквивалентной схемы замещения реальной исходной УЗКС и параметров присоединенных реактивных L_k , C_k и активных R_6 цепей регулирования полосы пропускания. Величина коэффициента $K_{эп}$ определялась по выражению

$$K_{эп} = A_{11} Z_n + A_{12}, \quad (1)$$

где A_{11}, A_{12} – коэффициенты полной обобщенной матрицы шестиполусной эквивалентной схемы замещения УЗКС [3].

Величина электрической добротности $Q_э$, подключаемой компенсирующей индуктивности L_k , изменялась при расчетах от 10 до 500 , т. е. охватывала все возможные значения добротностей реальных электрических пассивных и активных фильтров.

Типичные АЧХ механического параметра (величины $K_{эп}$) приведены на рис. 2. Зависимость 1, соответствует АЧХ исходной узкополосной УЗКС, а зависимость 2, получена при значении подключенной индуктивности

$$L_k = L_{к0} = (4 \cdot \pi^2 \cdot C_э \cdot f_p^2)^{-1} \quad (2)$$

и является существенно неравномерной в широкой полосе частот $f_{п} = f_3 - f_1$ при коэффициенте электромеханической связи $K_c \geq 0,05$ [3].

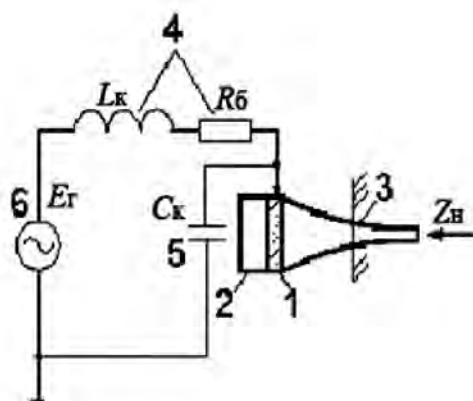


Рис. 1. Широкополосные микроактюаторы МЭМС

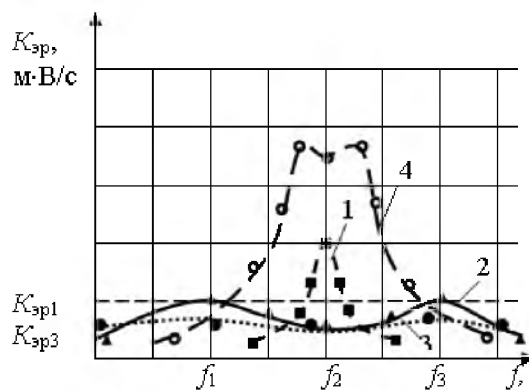


Рис. 2. АЧХ коэффициента электромеханического преобразования исходной (1) и широкополосных УЗКС (2-4) микроактюаторов МЭМС

Зависимости коэффициента $K_{эп}$ на частотах связи f_1 и f_3 от величины подключенной индуктивности L_k и механической нагрузки Z_n для УЗКС с катеноидальным волноводом ($N = 5$) приведены на рис. 3. Независимо от формы волновода общие закономерности таких зависимостей следующие. С ростом полосы пропускания (увеличение значения L_k) величина коэффициента $K_{эп}$ уменьшается. Увеличение механической нагрузки Z_n и уменьшение электрической добротности $Q_э$ также снижает значение $K_{эп}$ (рис. 3). Между величиной ширины полосы пропускания $f_{п} = f_3 - f_1$ и величиной коэффициента $K_{эп}$ существует практически линейная зависимость,

чем шире полоса тем меньше значение коэффициента $K_{эп}$. Увеличение добротности $Q_э$ с 10 до 500 при узкой полосе пропускания приводит к росту коэффициента $K_{эп}$ в 30-40 раз, а при широкой полосе пропускания $f_{п} = 40-50$ кГц ($L_{к0} = 0,15$ мГн) коэффициент $K_{эп}$ увеличивается в 20-30 раз (зависимость 1-4).

Характерно, что зависимость коэффициента $K_{эп}$ от механической нагрузки $Z_{н}$ в сильной степени определяется формой волновода и величиной его коэффициента усиления N . Чем больше значение N , тем больше и изменение коэффициента $K_{эп}$. Среди трех форм неоднородных волноводов наиболее устойчивы при изменении механической нагрузки $Z_{н}$ широкополосные ультразвуковые микроактюаторы с коническим волноводом. Для тех же значений N , $Z_{н}$ и $Q_э$ в широкополосной УЗКС с экспоненциальным или катеноидальным волноводом изменение величины коэффициента $K_{эп}$ в 1,5-2 раза больше, чем при использовании конического волновода. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации ПА и не стремиться к высоким значениям коэффициента N (реально величина N должна находиться в пределах $N = 2-5$).

Чрезвычайно важной особенностью широкополосных УЗКС на системе ЭМСК является то, что чем шире полоса пропускания тем стабильнее механические колебания при воздействиях механической нагрузки на торец волновода и дестабилизирующих различных факторов эксплуатации (зависимости 5-8, рис. 3). В целом при полосе $f_{п} = 40 - 50$ кГц ($L_{к0} = 0,15$ мГн) стабильность механических параметров в 15 – 20 раз выше, чем в исходной узкополосной УЗКС ($f_{п} = 1,0 - 1,5$ кГц ($L_{к0} = 0$ мГн)). Для всех широкополосных УЗКС с различными волноводами чем меньше величина электрической добротности $Q_э$, тем выше стабильность механических колебаний. Однако при этом уменьшается энергетический к.п.д.

С ростом ширины полосы пропускания (увеличение $L_{к}$) АЧХ механических параметров (амплитуды перемещения, скорости и коэффициента $K_{эп}$) приобретает М-образный (двухгорбый) характер с минимумом указанных значений на частоте связи f_2 (зависимости 2,3, рис. 2). Основным параметром таких АЧХ является неравномерность выходных параметров в полосе пропускания, определяемая как, например, отношение величин коэффициента $K_{эп1}$ или $K_{эп3}$ на частотах связи f_1 или f_3 к коэффициенту $K_{эп2}$ на частоте связи f_2

$$A = 20 \cdot \lg(K_{эп1} / K_{эп2}) = 20 \cdot \lg(K_{эп3} / K_{эп2}). \quad (3)$$

Проведенный анализ неравномерности α АЧХ механических выходных параметров рассматриваемого круга широкополосных УЗКС микроактюаторов позволяет сделать следующие выводы. Неравномерность АЧХ повышается с увеличением ширины полосы пропускания и увеличением добротности электрического контура, с одновременным уменьшением спектральной эффективности преобразования электрической энергии в механическую в заданной полосе частот.

Для УЗКС с $Q_э = 10-30$ при полосе $f_{п} = 15 - 30$ кГц величина $\alpha \sim 0$ так, как в данном случае получают АЧХ механических колебаний с одним экстремумом (максимумом) на частоте связи f_2 . Многочисленные эксперименты показали, что для качественной работы ПА необходимо в полосе используемых частот иметь величину неравномерности $\alpha \leq 3-5$ дБ. При использовании УЗКС с различной формой волновода величина α слабо зависит от коэффициента N в режиме холостого хода ($Z_{н} \sim 0$). Если же на торец волновода воздействует нагрузка ($Z_{н} \neq 0$), то характер зависимости $\alpha = \alpha(f)$ определяется формой образующей волновода. Наибольшая равномерность АЧХ присуща УЗКС с коническим волноводом. Так, при увеличении механической нагрузки $Z_{н}$ до 1000 Н·с/м неравномерность изменяется на (15-20) %, что в 2,5-5 раз меньше чем в УЗКС с экспоненциальным или катеноидальным волноводом (зависимость 1,5,6, рис. 4). При увеличении механической нагрузки изменение нерав-

номерности α происходит за счет уменьшения коэффициента связи $K_{\text{эп}}$ на частотах f_1 и f_3 .

При $Z_n = 1000 \text{ Н·с/м}$ для УЗКС с добротностью $Q_3 \geq 250$ величина α уменьшается на ~50% (зависимость 1,2, рис.4), а при $Q_3 \leq 100$ величина α уменьшается до 25 % (зависимость 3,4, рис.4). В УЗКС с коническим волноводом зависимость неравномерности АЧХ при воздействии нагрузки Z_n очень слаба (5 – 10 %) и несколько повышается при увеличении коэффициента N . Зависимость $\alpha = \varepsilon(N, Z_n)$ очень сильно выражена для УЗКС с экспоненциальным и катеноидальным волноводами (зависимость 5,6 рис. 4). Для УЗКС с последними волноводами при нагрузке $Z_n \geq 300 \text{ Н·с/м}$ форма АЧХ механических колебаний изменяется столь сильно, что превращается с двугорбой в одногорбую, причем чем больше величина N , тем при меньшей величине нагрузки Z_n двугорбая широкополосная АЧХ приобретает форму одногорбой АЧХ.

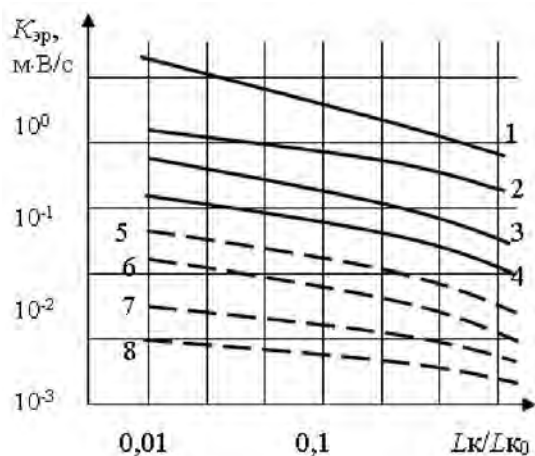


Рис.3. Зависимость величины $K_{\text{эп}}$ широкополосной УЗКС с катеноидальным волноводом от величины индуктивности L_k . 1,5; 2,6; 3,7; 4,8 - $Q_3 = 500, 100, 50$ и 10 ; 1-4 - $Z_n = 0$, 5-8 - $Z_n = 1000 \text{ Н·с/м}$

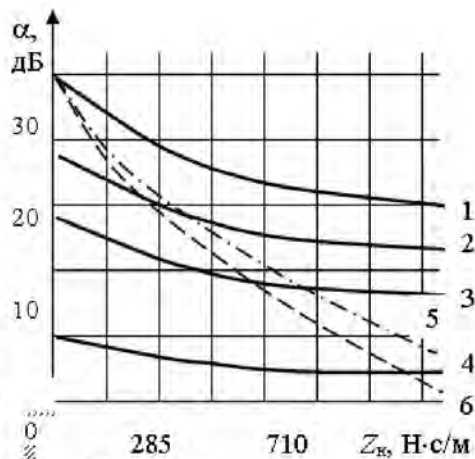


Рис. 4. Зависимость неравномерности АЧХ механической скорости широкополосных ПА с экспоненциальным волноводом от величины Z_n . 1,5,6; 2,3,4 - $Q_3 = 500, 100, 50$ и 10 ; 1-4 - $N = 5$; 5- $N = 10$ и 6- $N = 15$

Из приведенного выше анализа для широкополосных УЗКС пьезоэлектрических микроактюаторов можно предложить следующие методы коррекции (повышения) равномерности АЧХ выходных механических параметров в полосе пропускания.

1. Введение в цепь первого электрического контура системы ЭМСК последовательно с индуктивностью L_k активного сопротивления R_6 , определяемого по выражению

$$R_6 = (2 \cdot \pi \cdot L_{\text{ко}} \cdot f_2) / (f_2 / f_{\text{п}}). \quad (4)$$

При использовании данного метода полоса пропускания f_n остается неизменной, а равномерность повышается при увеличении сопротивления R_6 за счет одновременного уменьшения величины $K_{\text{эп}}$ только на частотах связи f_1 и f_3 при постоянной его величине на частоте f_2 . Недостаток данного метода – низкий к.п.д. из-за потерь электрической мощности на активном сопротивлении R_6 сравнимом с сопротивлением излучения УЗКС. Кроме того, амплитуда механических колебаний широкополосной УЗКС меньше, чем в исходной узкополосной без дополнительного подключения компенсирующей индуктивности $L_k = L_{\text{ко}}$.

2. Суть данного метода регулирования равномерности АЧХ выходных параметров состоит в дополнительном введении параллельно пьезопреобразователю

УЗКС корректирующей емкости C_k (рис. 1), величину которой выбирают по выражению

$$C_k = (1 / (4 \cdot \pi^2 \cdot C_3 \cdot f_p^2))^{-1} - C_3. \quad (5)$$

При противоположных изменениях величин C_k и L_k возможно регулировать форму АЧХ выходных механических параметров за счет корректировки коэффициента электромеханической связи K_c . В этом случае, с уменьшением величины компенсирующей индуктивности L_k и увеличением корректирующей емкости C_k полоса пропускания уменьшается при одновременном увеличении значения коэффициента $K_{эп}$ (зависимость 4, рис. 2). При малых значениях компенсирующей индуктивности $L_k \leq (0,05-0,25) L_{к0}$ величины выходных механических параметров существенно увеличиваются по сравнению с аналогичными параметрами узкополосной исходной УЗКС. Например, при $Q_3 \sim 30-50$ теоретически и экспериментально получено увеличение механических параметров в 3-4 раза, при этом и полоса пропускания $f_{п}$ также увеличилась в 3-4 раза. Равномерность АЧХ в полосе пропускания таких широкополосных УЗКС микроактюаторов легко регулируется и находится в пределах $\alpha \leq 0,5-2$ дБ. Увеличение выходных механических параметров при одновременном и расширении полосы пропускания обусловлено следующими обстоятельствами. В системе ЭМСК УЗКС образуется резонанс электрических напряжений, а значит на параллельно соединенных C_k и C_3 (т.е на электродах пьезокерамического преобразователя) электрическое напряжение увеличивается в несколько раз по сравнению с напряжением источника питания E_r (генератора). Безусловно спектральная мощность, потребляемая широкополосным ПА от источника, равномерна в заданном частотном диапазоне.

3. Третий метод регулирования равномерности в полосе пропускания обусловлен изменением величины пьезомодуля пьезокерамического преобразователя, т. е. изменяем величину коэффициента электромеханической связи K_c механического и электрического контуров системы ЭМСК. Собственно, изменение величины d_{ik} приводит к адекватному изменению эквивалентной механической емкости C_m пьезопреобразователя. Уменьшение величины пьезомодуля d_{33} от $3,3 \cdot 10^{-10}$ до $0,47 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н ведет почти к линейному уменьшению полосы пропускания $f_{п}$ (рис. 5,б) системы ЭМСК микроактюатора и соответственно к уменьшению величины неравномерности α (рис.5,в). Величина коэффициента электромеханического преобразования $K_{эп}$ с уменьшением пьезомодуля увеличивается на 10-50 % и тем больше, чем уже исходная полоса пропускания УЗКС (рис. 5,а). Этот неожиданный результат (ибо хорошо известно, что величина механических выходных параметров пьезопреобразователей прямо пропорциональна величине пьезомодуля d_{ik}) можно объяснить следующим образом. Действительно, уменьшение пьезомодуля ведет к соответствующему уменьшению механических выходных параметров. С другой стороны, уменьшение пьезомодуля d_{33} ведет к сужению полосы пропускания (рис. 5,б), а значит к повышению значения коэффициента $K_{эп}$ на частотах связи f_1 и f_3 . Второе условие является доминирующим, вследствие чего величина механических параметров и увеличивается частотах связи f_1 и f_3 при уменьшении пьезомодуля d_{33} и приемлемой (заданной) величине неравномерности α . Больше изменение величины коэффициента $K_{эп}$ при уменьшении пьезомодуля d_{33} имеет место при узкой полосе пропускания $f_{п} \leq 1,5$ кГц (рис. 5,а, зависимость 1,2).

Приведенные на рис. 2-5 графики позволяют в зависимости от конкретного технологического процесса использования микропьезоактюатора оптимально сконструировать их УЗКС, выбрать необходимую величину компенсирующих и корректирующих элементов L_k , R_6 , C_k и величину пьезомодуля d_{ik} с целью получения широкополосной АЧХ выходных механических параметров. Из сравнения рассмотренных трех методов регулирования неравномерности АЧХ выходных механиче-

ских параметров широкополосных микроактюаторов для создания микроперемещений изделий второй метод (одновременное противоположное изменение величин реактивных элементов L_k и C_k) со всех точек зрения является безусловно самым предпочтительным. В некоторых практических случаях применения широкополосных пьезокерамических микроактюаторов возможно и комбинированное использование трех методов, но с возможно меньшей величиной активного резистора R_6 для второго метода.

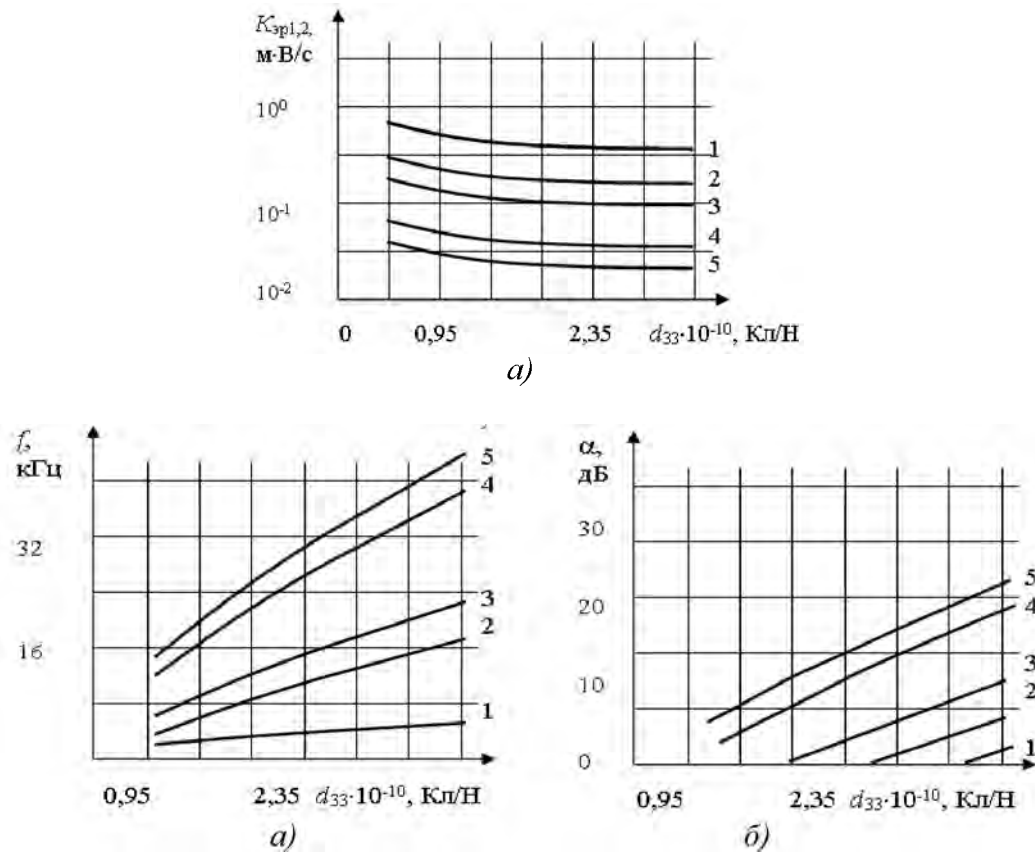


Рис. 5. Зависимость коэффициента $K_{эp}$ (а), ширины полосы пропускания f_n (б) и неравномерности α (в) от величины пьезомодуля d_{33} для широкополосной УЗКС с коническим волноводом ($N=4.58$) при $Z_n=0$, $Q_э=50$ и 1; 2; 3; 4; 5- $L_k/L_{к0}=0,01; 0,05; 0,1; 0,5$ и 1,0

При этом ширина полосы пропускания f_n ультразвуковых микроактюаторов должна, по крайней мере, в 3-4 раза превышать возможный уход резонансной частоты исходной узкополосной УЗКС при воздействии дестабилизирующих факторах их эксплуатации. В этих условиях использование широкополосных микроактюаторов будет весьма плодотворным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование электронных схем расширения полосы частот ультразвуковых систем/ В.М. Колешко, В.Я. Сунка // Известия АН БССР, сер. ФМН-1980. №1. – С.89-95.
2. В.М. Колешко, В.Я. Сунка. Авт. свид. СССР №№ 721285, 725846, 763004, 793662.
3. Домаркас, В.И., Кажис, Р.-И.Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. - Вильнюс: Минтис, 1975. - 255 с.

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНЫХ
УПРУГИХ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ***

Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В.

The design task of heterogeneous construction element with thermo-force loading is formulated on the basis following suppositions and determined correlations: shell's thinness, Kirchhoff's hypothesis, Duhamel-Neumann's law for temperature stress, Fourier's heat transfer law, equal-strong criterion, and equation of shells linear theory. Basis peculiarities of shells strain-stress state with equal strain intensity on external layers surfaces are revealed by numerical decision of formulated nonlinear border task.

Проектированию упругих равнопрочных слоистых оболочек вращения без учета термосиловых воздействий посвящены работы [1-7]. Выявлены особенности поведения и эффективность по весу или стоимости рассмотренных оболочек по сравнению с эталонными оболочками. Показано, что в результате решения задачи проектирования равнопрочных оболочек не всегда возможно удовлетворение всех классических граничных условий в рамках теории оболочек Кирхгофа-Лява. Поставлена и решена задача проектирования двухслойной упругой равнопрочной эллипсоидальной оболочки с варьированием поверхности спая слоев. Полученные решения свидетельствуют о расширении возможностей удовлетворения всех классических граничных условий оболочек. Из полученных решений также следует, что с варьированием поверхности спая слоев сохраняется основное свойство равнопрочных проектов – условие равнопрочности (условие текучести Мизеса) на внешних поверхностях слоев влечет выполнение этого условия по всему объему при определенном выборе материалов слоев оболочки.

В настоящей работе исследовано напряженно-деформированное состояние слоистых эллипсоидальных оболочек вращения в условиях термосилового воздействия и выполнения критерия равнопрочности на внешних поверхностях слоев. Показано, что конструктивная неоднородность, нормальная анизотропия, непрерывность теплового потока и разрывы напряжений при постоянной положительной температуре на внешних поверхностях слоев ведут к возрастанию, а при отрицательных температурах на внешних поверхностях слоев – к уменьшению интенсивностей напряжений на поверхности спая слоев по сравнению с интенсивностями напряжений на внешних поверхностях слоев оболочки.

Рассмотрим двухслойную осесимметрично нагруженную эллипсоидальную оболочку вращения в системе координат θ и φ , направленных вдоль меридиана и параллели отсчетной поверхности, соответственно, и координатой \bar{z} , совпадающей с внешней нормалью к той же поверхности. Первая квадратичная форма отсчетной поверхности:

$$dl^2 = R_1^2 d\theta^2 + R_2^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

где dl – длина линейного элемента, θ – угол между внешней нормалью и осью вращения,

φ – угол между текущим и начальным меридианными сечениями, $R_1 = R_\theta$ и $R_2 = R_\varphi$ – главные радиусы кривизны отсчетной поверхности оболочки.

Главные кривизны \bar{k}_1 и \bar{k}_2 определим из выражений:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-08-00152-а)

$$k_1 = \frac{1}{b_a^2 a_h} (\sin^2 \theta + b_a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}, k_2 = \frac{1}{a_h} (\sin^2 \theta + b_a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (2)$$

Здесь

$$k_i = \bar{k}_i \bar{H}_0, k_i = 1/r_i, r_i = R_i/\bar{H}_0, a_h = a/\bar{H}_0, b_a = b/a,$$

где a и b – горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса, $2\bar{H}_0$ – постоянная толщина эталонной оболочки, служащей для сравнения с ней рациональных проектов оболочек при одинаковых геометриях, нагружениях и опираниях.

Оболочка выполнена из двух ортотропных слоев: внешнего (первого), $H_0 \leq \bar{z} \leq Z_1$, и внутреннего (второго), $-Z_2 \leq \bar{z} \leq H_0$, $z = H_0(\theta)$ – задаваемая аппликата поверхности спая слоев до отсчетной поверхности, $Z_1 = H_0 + H_1$, $Z_2 = H_2 - H_0$, H_1 и H_2 – толщины слоев, $H = H_1 + H_2$ – полная толщина оболочки. Механические характеристики материалов слоев предполагаются различными: $E_{i(k)}$ – модули упругости; $\nu_{(k)}, \nu_{12(k)}, \nu_{21(k)}$ – коэффициенты ортотропии; $\alpha_{i(k)}$ – коэффициенты линейного теплового расширения, $(i, k = 1, 2)$. Предположим, что геометрической нелинейностью можно пренебречь.

Уравнения равновесия оболочки [4]:

$$k_1 \frac{d(rn_{11})}{d\theta} - n_{22} \cos \theta + r(k_1 q_1 + q_\theta) = 0, k_1 \frac{d(rq_1)}{d\theta} - r(k_1 n_{11} + k_2 n_{22} - q_n) = 0, \\ k_1 \frac{d(rm_{11})}{d\theta} - m_{22} \cos \theta - 2rq_1 = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$n_{ii} = N_{ii}/N_0, m_{ii} = M_{ii}/M_0, q_1 = Q_1/Q_0, q_\theta = \bar{q}_\theta/q_0, q_n = \bar{q}_n/q_0, \\ r = r_2 \sin \theta, N_0 = Q_0 = 2\sigma_0 \bar{H}_0, M_0 = \sigma_0 \bar{H}_0^2, q_0 = 2\sigma_0,$$

где N_{ii}, M_{ii} и Q_1 – усилия, моменты и перерезывающая сила, σ_0 – предел текучести эталонной, \bar{q}_θ и \bar{q}_n – меридианная и нормальная нагрузки оболочки.

Деформации и изменения кривизн $\bar{\kappa}_i$ отсчетной поверхности:

$$\varepsilon_{01} = k_1 \frac{du}{d\theta} + k_1 w, \varepsilon_{02} = \frac{u \cos \theta}{r} + k_2 w, \kappa_1 = k_1 \frac{d\vartheta}{d\theta}, \kappa_2 = \frac{\cos \theta}{r} \vartheta, \vartheta = k_1 \left(u - \frac{dw}{d\theta} \right). \quad (4)$$

Здесь

$$\kappa_i = \bar{H}_0 \bar{\kappa}_i, u = U/\bar{H}_0, w = W/\bar{H}_0,$$

где U и W – меридианное и нормальное перемещения.

Введем вектор-столбцы напряжений $\bar{\sigma}_{(k)}$, деформаций $\bar{\varepsilon}_0$, изменений кривизн $\bar{\kappa}$, усилий \bar{n} , моментов \bar{m} и коэффициентов линейного теплового расширения $\bar{\alpha}_{(k)}$:

$$\bar{\sigma}_{(k)} = (\sigma_{1(k)}, \sigma_{2(k)})', \bar{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02})', \bar{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)', \bar{n} = (n_{11}, n_{22})', \\ \bar{m} = (m_{11}, m_{22})', \bar{\alpha}_{(k)} = (\alpha_{1(k)}, \alpha_{2(k)})', 2\bar{n} = \int_{-z_2}^{h_0} \bar{\sigma}_{(2)} dz + \int_{h_0}^{z_1} \bar{\sigma}_{(2)} dz, \\ \bar{m} = \int_{-z_2}^{h_0} \bar{\sigma}_{(k)} z dz + \int_{h_0}^{z_1} \bar{\sigma}_{(1)} z dz, z = \bar{z}/\bar{H}_0, h_i = H_i/\bar{H}_0, h_0 = H_0/\bar{H}_0,$$

$$z_i = Z_i/\bar{H}_0, \sigma_{i(k)} = s_{i(k)}/\sigma_0, (i, k = 1, 2),$$

где $s_{i(k)}$ – главные напряжения в k -м слое.

Полагая, что при деформировании каждого слоя выполняется закон Дюамеля-Неймана и что вследствие малости полной толщины оболочки распределение температуры по координате z может быть с достаточной степенью точности аппроксимировано кусочно-линейным распределением, будем иметь:

$$\bar{\sigma}_{(k)} = A_{(k)}[\bar{\epsilon}_0 + z\bar{\kappa} - \bar{\alpha}_{(k)}T_{(k)}], T_{(k)} = T_{1(k)} + (z - h_0)t_{2(k)}, \quad (5)$$

$$2\bar{n} = [A_{(1)}(z_1 - h_0) + A_{(2)}(z_2 + h_0)]\bar{\epsilon}_0 + (1/2)[A_{(1)}(h_1^2 + 2h_0h_1) - A_{(2)}(h_2^2 - 2h_0h_2)]\bar{\kappa} + 2\bar{n}_t, \quad (6)$$

$$3\bar{m} = (3/2)[A_{(1)}(h_1^2 + 2h_0h_1) - A_{(2)}(h_2^2 - 2h_0h_2)]\bar{\epsilon}_0 + [A_{(1)}[(h_0 + h_1)^3 - h_0^3] + A_{(2)}[h_0^3 - (h_0 - h_2)^3]]\bar{\kappa} + 3\bar{m}_t, \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{n}_t &= (n_{11t}, n_{22t})', \quad \bar{m}_t = (m_{11t}, m_{22t})', \\ 2\bar{n}_t &= (T_{1(1)}h_1 + t_{2(1)}h_1^2/2)A_{(1)}\bar{\alpha}_{(1)} - (T_{1(2)}h_2 - t_{2(2)}h_2^2/2)A_{(2)}\bar{\alpha}_{(2)}, \\ \bar{m}_t &= A_{(2)}\bar{\alpha}_{(2)}[T_{1(2)}(z_2^2 - h_0^2)/2 + t_{2(2)}h_2^2(3h_0 - 2h_2)/6] - \\ &\quad - A_{(1)}\bar{\alpha}_{(1)}[T_{1(1)}(z_1^2 - h_0^2)/2 - t_{2(1)}h_1^2(3h_0 + h_1)/6], \\ A_{(k)} &= (A_{ij(k)}) \quad (i, j = 1, 2), \quad A_{11(k)} = e_{1(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \\ A_{12(k)} &= e_{1(k)}\nu_{12(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \quad A_{22(k)} = e_{2(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \quad A_{21(k)} = A_{12(k)}, \\ e_{i(k)} &= E_{i(k)}/\sigma_0, \quad \tilde{\nu}_{(k)} = 1 - \nu_{12(k)}\nu_{21(k)}, \quad t_{2(k)} = T_{2(k)}\bar{H}_0, \end{aligned}$$

где $T_{1(k)}$ и $T_{2(k)}$ – коэффициенты кусочно-линейного распределения температуры по толщине оболочки.

Для исследования температурного поля в слоистой оболочке примем следующие допущения.

1) Тепловые потоки из одного слоя в другой равны, то есть с учетом закона Фурье

$$\lambda_1 \text{grad}_n T_{(1)} = \lambda_2 \text{grad}_n T_{(2)}, \quad (8)$$

где λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности первого и второго слоя, n – нормаль к поверхности сая.

2) Температура изменяется непрерывно на поверхности сая слоев, что приводит к равенству

$$T_{1(1)} = T_{1(2)} \quad (9)$$

3) На внешних поверхностях температурное поле задано, то есть

$$T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)} = T_1(\theta), \quad T_{1(2)} + h_2 t_{2(2)} = T_2(\theta) \quad (10)$$

На основании допущений (8) – (10) получим дифференциальное уравнение для коэффициента $T_{1(1)}$ и алгебраические равенства для остальных коэффициентов распределения температуры

$$\frac{dT_{1(1)}}{d\theta} + PT_{1(1)} = Q, \quad T_{1(2)} = T_{1(1)}, \quad t_{2(1)} = \frac{T_1 - T_{1(1)}}{h_1}, \quad t_{2(2)} = -\frac{T_2 - T_{1(1)}}{h_2}, \quad (11)$$

где

$$P = -\frac{ctg\beta}{(\lambda_2 - \lambda_1)k_1} \left(\frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda_2}{h_2} \right), \quad Q = -\frac{ctg\beta}{(\lambda_2 - \lambda_1)k_1} \left(\frac{\lambda_1 T_1}{h_1} + \frac{\lambda_2 T_2}{h_2} \right), \quad tg\beta = k_1 \frac{dh_0}{d\theta},$$

β – угол между нормальными к поверхности сая и отсчетной поверхности.

Из уравнения и равенств (11) нетрудно получить выражения для коэффициентов в частных случаях.

Если $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx 0$, то

$$T_{1(1)} = \frac{\lambda_2 T_2 h_1 + \lambda_1 T_1 h_2}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2}, T_{1(2)} = T_{1(1)} t_{2(1)} = \frac{\lambda_2 (T_1 - T_2)}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2}, t_{2(2)} = \frac{\lambda_1 t_{2(1)}}{\lambda_2}. \quad (12)$$

В другом частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, получим

$$T_{1(2)} = T_{1(1)} = \frac{T_1 h_2 + T_2 h_1}{h_1 + h_2}, t_{2(2)} = t_{2(1)} = \frac{T_1 - T_2}{h_1 + h_2}.$$

Критерий Мизеса-Хилла равнопрочного проекта на поверхностях $z = h_1$, ($k = 1$), и $z = -h_2$, ($k = 2$), [4]:

$$\tau_k^2 = a_{(k)}^2 \sigma_{1(k)}^2 + 2b_{(k)} \sigma_{1(k)} \sigma_{2(k)} + c_{2(k)}^2 \sigma_{2(k)}^2 = \tau_{(k)}^2, \quad (13)$$

где $a_{(k)}$, $b_{(k)}$, $c_{(k)}$, $\tau_{(k)}$ – определяемые из эксперимента константы материала.

Равенства (13) будут тождественно удовлетворены, если принять

$$\sigma_{1(k)} = K_{1(k)} \sin \omega_k + K_{2(k)} \cos \omega_k \equiv \sigma_{1(k)}^*, \quad (14)$$

$$\sigma_{2(k)} = K_{3(k)} \cos \omega_k \equiv \sigma_{2(k)}^*, \quad (15)$$

где

$$K_{1(k)} = \frac{\tau_{(k)}}{a_{(k)}}, K_{2(k)} = -\frac{b_{(k)} \tau_{(k)}}{a_{(k)} d}, K_{3(k)} = \frac{a_{(k)} \tau_{(k)}}{d}, d = \sqrt{a_{(k)}^2 c_{2(k)}^2 - b_{(k)}^2}.$$

Учитывая соотношения (14) – (15) и затем закон Дюамеля-Неймана (5), условия равнопрочности (13) можно записать в виде:

$$A_{(k)}^{-1} \sigma_{(k)}^* = \bar{\varepsilon}_0 + (-1)^{k+1} z_k \bar{\kappa} - \alpha_{(k)} T_{(k)}^*, \quad (k = 1, 2), \quad (16)$$

где $\bar{\sigma}_{(k)}^* = (\sigma_{1(k)}^*, \sigma_{2(k)}^*)'$ – вектор-столбцы напряжений на соответствующих наружных поверхностях слоев оболочки, при этом

$$T_{(k)}^* = T_{1(k)} + (-1)^{k+1} h_k t_{2(k)}.$$

Из равенства (16) получим условия равнопрочности в эквивалентной форме:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{h} (z_2 \bar{A} + z_1 \bar{B}) + \bar{\varepsilon}_0^t, \quad \bar{\kappa} = \frac{1}{h} (\bar{A} - \bar{B}) + \bar{\kappa}^t. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_0^t &= [z_2 \bar{\alpha}_{(1)} (T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)}) + z_1 \bar{\alpha}_{(2)} (T_{1(2)} - h_2 t_{2(2)})] / h, \\ \bar{\kappa}^t &= [\bar{\alpha}_{(1)} (T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)}) - \bar{\alpha}_{(2)} (T_{1(2)} - h_2 t_{2(2)})] / h, \\ \bar{A} &= A_{(1)}^{-1} \bar{\sigma}_{(1)}^* + \bar{\alpha}_{(1)} T_{1(1)}^*, \quad \bar{B} = A_{(2)}^{-1} \bar{\sigma}_{(2)}^* + \alpha_{(2)} T_{2(2)}^*, \quad A_{(k)}^{-1} = (B_{ij(k)}) \\ B_{11(k)} &= A_{22(k)} / \Delta_{(k)}, \quad B_{12(k)} = -A_{12(k)} / \Delta_{(k)}, \quad B_{21(k)} = B_{12(k)}, \\ \Delta_{(k)} &= A_{11(k)} A_{22(k)} - A_{12(k)} A_{21(k)}, \quad h = h_1 + h_2, \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned}$$

На основании равенства (4), получим условия совместности деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_{02}}{d\theta} = \frac{r_1}{r_2} (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}) \operatorname{ctg} \theta - r_1 \kappa_2 \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d\kappa_2}{d\theta} = \frac{r_1}{r_2} (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ctg} \theta - \kappa_2 \operatorname{tg} \theta, \quad (18)$$

Из второго и четвертого равенств (4) следует дифференциальное уравнение для определения прогиба w :

$$\frac{dw}{d\theta} = r_1 r_2 (k_1 (\varepsilon_{02} - k_2 w) - \kappa_2) \operatorname{tg} \theta. \quad (19)$$

Уравнения (3), (18)-(19) и (11) представляют полную систему из семи нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих равнопрочные проекты двухслойных эллипсоидальных оболочек вращения с переменными толщинами слоев.

Для удобства записи полученной системы уравнений введем вектор-столбцы искоемых функций $\bar{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)'$ и правых частей $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)'$, где

$$y_1 = \omega_1, y_2 = \omega_2, y_3 = h_1, y_4 = h_2, y_5 = q_1, y_6 = w, y_7 = T_{1(1)}. \quad (20)$$

Система уравнений (3), (18) – (19) примет вид:

$$A \frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \bar{f}. \quad (21)$$

Здесь $A = (a_{i,j})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), — матрица переменных коэффициентов, элементы $a_{i,j}$ которой определяются из выражений:

$$\begin{aligned} a_{1,l} &= D_{n11} D_{\omega l}, \quad a_{1,l+2} = D_{n11} D_{hl} + \partial n_{11} / \partial h_l + D_{n11}^t D_{hl}^t + \partial n_{11}^t / \partial h_l, \quad a_{2,l} = D_{m11} D_{\omega l}, \\ a_{2,l+2} &= D_{m11} D_{hl} + \partial m_{11} / \partial h_l + D_{m11}^t D_{hl}^t + \partial m_{11}^t / \partial h_l, \quad a_{3,l} = \partial \varepsilon_{02} / \partial \omega_l, \\ a_{3,l+2} &= \partial \varepsilon_{02} / \partial h_l, \\ a_{4,l} &= \partial \kappa_2 / \partial \omega_l, \quad a_{4,l+2} = \partial \kappa_2 / \partial h_l, \\ a_{5,5} &= 1, \quad a_{6,6} = 1, \quad a_{77} = 1, \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \quad (22)$$

где введены обозначения вектор-строк и вектор-столбцов,

$$\begin{aligned} D_{n11} &= \left(\frac{\partial n_{11}}{\partial \varepsilon_{01}}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \varepsilon_{02}}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \kappa_1}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \kappa_2} \right), \quad D_{\omega l} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{01}}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \kappa_1}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \kappa_2}{\partial \omega_l} \right), \\ D_{hl} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{01}}{\partial h_l}, \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial h_l}, \frac{\partial \kappa_1}{\partial h_l}, \frac{\partial \kappa_2}{\partial h_l} \right), \quad D_{n11}^t = \left(\frac{\partial n_{11}^t}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial n_{11}^t}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial n_{11}^t}{\partial t_{1(1)}}, \frac{\partial n_{11}^t}{\partial t_{1(2)}} \right), \\ D_{hl}^t &= \left(\frac{\partial T_{1(1)}}{\partial h_l}, \frac{\partial T_{1(2)}}{\partial h_l}, \frac{\partial t_{2(1)}}{\partial h_l}, \frac{\partial t_{2(2)}}{\partial h_l} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение для D_{m11} , D_{m11}^t получим из выражения (23) для D_{n11} , D_{n11}^t заменой n_{11} на m_{11} . Невыписанные элементы матрицы A равны нулю. Частные производные в выражениях (22) – (23) определяются по известным функциям (6) – (7), (19) – (20), (22), причем вторые и четвертые слагаемые в равенствах (22) вычисляются с фиксированными деформациями, изменениями кривизн и функциями распределения температуры.

Компоненты вектора правых частей уравнения (21) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{r_1}{r_2} (n_{22} - n_{11}) \text{ctg} \theta - q_1 - r_1 q_0 - f_{10}, \quad f_2 = \frac{r_1}{r_2} (m_{22} - m_{11}) \text{ctg} \theta + 2r_1 q_1 - f_{20}, \\ f_3 &= \frac{r_1}{r_2} (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}) \text{ctg} \theta - r_1 \kappa_2 \text{tg} \theta - f_{30}, \quad f_4 = \frac{r_1}{r_2} (\kappa_1 - \kappa_2) \text{ctg} \theta - \kappa_2 \text{tg} \theta - f_{40}, \\ f_5 &= r_1 (k_1 n_{11} + k_2 n_{22} - k_2 q_1 \text{ctg} \theta), \quad f_6 = r_1 r_2 [k_1 (\varepsilon_{02} - k_2 w) - \kappa_2] \text{tg} \theta, \\ f_7 &= Q - P y_7. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{10} &= \frac{\partial n_{11}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{10}^t, \quad f_{20} = \frac{\partial m_{11}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{10}^t, \quad f_{30} = \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{30}^t, \quad f_{40} = f_{40}^t, \\ f_{10}^t &= D_{n11}^t D_{T\theta} + D_{n11} D_{\theta}^t, \quad f_{20}^t = D_{m11}^t D_{T\theta} + D_{m11} D_{\theta}^t, \quad f_{30}^t = D_{\theta}^t (2), \quad f_{40}^t = D_{\theta}^t (4), \end{aligned}$$

$$D_{T\theta} = \left(\frac{dT_{1(1)}}{d\theta}, \frac{dT_{1(2)}}{d\theta}, \frac{dt_{2(1)}}{d\theta}, \frac{dt_{2(2)}}{d\theta} \right)', \quad D_{0i}^T = \left(\frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial t_{2(1)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial t_{2(2)}} \right),$$

$$D_{\kappa_i}^T = \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_{2(1)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_{2(2)}} \right), \quad D_{\theta}^T = (D_{\theta}^T(1), D_{\theta}^T(2), D_{\theta}^T(3), D_{\theta}^T(4)),$$

$$D_{\theta}^T(1) = D_{011}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(2) = D_{012}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(3) = D_{\kappa_1}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(4) = D_{\kappa_2}^T D_{T\theta}.$$

В частных случаях $f_{i0}^t = 0, i = 1, 2, 3, 4$. Частные производные $\partial n_{11} / \partial h_0$ и $\partial m_{11} / \partial h_0$ вычислим при фиксированных функциях распределения температуры.

Разрешив систему уравнений (21) относительно производных, получим каноническую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \bar{F}, \quad \bar{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)'. \quad (25)$$

Здесь

$$F_1 = \frac{1}{\Delta_1} (a_{22} F_{f1} - a_{12} F_{f2}), \quad F_2 = \frac{1}{\Delta_1} (a_{11} F_{f2} - a_{21} F_{f1}), \quad F_3 = \frac{1}{\Delta_2} (A_{22} F_{f3} - A_{12} F_{f4}),$$

$$F_4 = \frac{1}{\Delta_2} (A_{11} F_{f4} - A_{21} F_{f3}), \quad F_5 = f_5, \quad F_6 = f_6, \quad \Delta_1 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\Delta_2 = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}, \quad A_{11} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} \Delta_1),$$

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{31} b_3 + a_{32} b_4 + a_{34} \Delta_1), \quad A_{21} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{41} b_1 + a_{42} b_2 + a_{43} \Delta_1),$$

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{41} b_3 + a_{42} b_4 + a_{44} \Delta_1), \quad b_1 = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}, \quad b_2 = a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23},$$

$$b_3 = a_{12} a_{24} - a_{22} a_{14}, \quad b_4 = a_{21} a_{14} - a_{11} a_{24},$$

$$F_{f3} = \frac{1}{\Delta_1} [(a_{32} a_{21} - a_{31} a_{22}) f_1 + (a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}) f_2 + f_3 \Delta_1],$$

$$F_{f4} = \frac{1}{\Delta_1} [(a_{42} a_{21} - a_{41} a_{22}) f_1 + (a_{41} a_{12} - a_{42} a_{11}) f_2 + f_4 \Delta_1],$$

$$F_{f1} = f_1 - a_{13} F_3 - a_{14} F_4, \quad F_{f2} = f_2 - a_{23} F_3 - a_{24} F_4, \quad F_5 = f_5, \quad F_6 = f_6, \quad F_7 = f_7.$$

В рассмотренных частных случаях после исключения седьмого уравнения системы (25) получим систему уравнений шестого порядка. Тогда в равенствах (24) следует принять $f_{10}^t = f_{20}^t = f_{30}^t = f_{40}^t = 0$.

Естественные граничные условия на краях ($\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$) оболочки, совпадающих с параллелями [4]:

а) свободный край –

$$n_{11} = m_{11} = q_1 = 0; \quad (26)$$

б) шарнирный, неподвижно опертый край –

$$u = w = m_{11} = 0; \quad (27)$$

в) жесткая заделка –

$$u = w = \theta = 0. \quad (28)$$

Для изотропных оболочек, закрепленных по одной параллели, граничные условия в полюсе ($\theta = 0$) имеют вид:

$$u = 0, \quad n_{22} = n_{11}, \quad m_{22} = m_{11}. \quad (29)$$

Граничные условия (29) получены с учетом симметрии в полюсе.

В результате поставлена двухточечная краевая задача с семью нелинейными дифференциальными уравнениями (25) и шестью граничными условиями, представляющими комбинацию условий (26) – (29), для определения равнопрочного проекта неоднородной ортотропной двухслойной эллипсоидальной оболочки вращения.

Рассмотрим, к примеру, граничные условия с шарнирным опиранием (27). Первые два условия остаются без изменения. Из них следует, согласно равенствам (4), $\varepsilon_{02} = 0$ и, в соответствии с первым равенством (17), для определения толщины $h_2(h_1, \omega_1, \omega_2)$ получим уравнение:

$$z_2^2 + Az_2 + B = 0, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (1/G)\{z_1[\lambda_2(A_1 + T_2\alpha_{2(1)}) + \lambda_1(A_2 + T_1\alpha_{2(2)}) + \alpha_{2(1)}t_{2(1)}^* - \alpha_{2(2)}t_{2(2)}^*] - \\ &\quad - A_1h_0(\lambda_2 - \lambda_1) - \alpha_{2(1)}h_0(\lambda_2T_2 - \lambda_1T_1 + t_{2(1)}^*)\}, \\ B &= (z_1/G)[z_1\lambda_2(B_1 + T_2\alpha_{2(2)}) - B_1h_0(\lambda_2 - \lambda_1) - \alpha_{2(2)}h_0(\lambda_2T_2 - \lambda_1T_1 + t_{2(2)}^*)], \\ G &= \lambda_1(A_1 + T_1\alpha_{2(1)}), \quad t_{2(1)}^* = \lambda_2(T_1 - T_2), \quad t_{2(2)}^* = \lambda_1t_{2(1)}^*/\lambda_2, \\ A_1 &= B_{21(1)}K_{1(1)} \sin \omega_1 + (B_{21(1)}K_{2(1)} + B_{22(1)}K_{3(1)}) \cos \omega_1, \\ B_1 &= B_{21(2)}K_{1(2)} \sin \omega_2 + (B_{21(2)}K_{2(2)} + B_{22(2)}K_{3(2)}) \cos \omega_2, \\ z_1 &= h_1 + h_0, \quad z_2 = h_2 - h_0. \end{aligned}$$

С учетом равенств (30), (7) и (12), для определения m_{11} получим равенство:

$$m_{11} = D_{m11}(1)\varepsilon_{01} + D_{m11}(3)\kappa_1 + D_{m11}(4)\kappa_2, \quad (31)$$

Полагая в равенстве (26) $m_{11} = 0$, получим уравнение:

$$D_1(h_1, h_2, \omega_1, \omega_2) = 0. \quad (32)$$

Разрешив численно уравнения (30) и (32) относительно h_2 и ω_2 , граничные условия на одном краю ($\theta = \theta_1$) представим в виде:

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2(h_1, \omega_1), \quad y_3 = h_1, \quad y_4 = h_2(\omega_1, h_1), \quad y_5 = q_1, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = T_{1(1)}. \quad (33)$$

Здесь величины h_1 и ω_1 являются параметрами, в число которых включим также перерезывающую силу q_1 . На параметры h_1 и ω_1 наложим требование положительности h_1 и h_2 на краю оболочки $\theta = \theta_1$.

Существенной особенностью поставленной задачи является отсутствие естественного граничного условия для температуры $T_{1(1)}$ на поверхности спая слоев. Расчеты показали незначительную зависимость решения от граничного условия для температуры $T_{1(1)}$ на краю оболочки в интервале $[T_1, T_2]$. Поэтому в приведенных примерах граничное условие для температуры на поверхности спая слоев задано в виде

$$T_{1(1)} = (T_1 + T_2)/2 \quad (34)$$

Другая особенность задачи заключается в следующем. Если температуры на внешних поверхностях равны и постоянны, то из уравнения (11) с условием (34) следует независимость решения задачи от теплового потока на поверхности спая слоев любой формы и температура постоянна по всему объему слоев оболочки. Поэтому в случае одинаковых постоянных температур на внешних поверхностях слоев порядок системы снижается на единицу и можно воспользоваться равенствами (12) и (34).

Решая численно задачу Коши с уравнениями (25) и граничными условиями (33) с учетом равенства (34), определим вес V и стоимость C оболочки.

Относительный по отношению к эталонной оболочке вес v или стоимость c неоднородной оболочки определим из выражений:

$$v = \frac{1}{2a_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) r_1 r_2 \sin \theta d\theta,$$

$$c = \frac{1}{2a_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (c_1 \rho_1 h_1 + c_2 \rho_2 h_2) r_1 r_2 \sin \theta d\theta,$$

где

$$a_p = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 r_2 \sin \theta d\theta, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad c = \frac{C}{C_0}, \quad \rho_k = \frac{\rho_k^0}{\rho_0}, \quad c_k = \frac{c_k^0}{c_0},$$

причем ρ_0 и ρ_k^0 – удельные плотности, c_0 и c_k^0 – удельные стоимости эталонной и проектируемой оболочек ($k = 1, 2$), соответственно.

Проекты относительных минимальных веса или стоимости определим из решений поставленной задачи Коши варьированием параметров ω_1 , h_1 и q_1 , а также коэффициентов a_1 и b_1 линейного уравнения для поверхности спая слоев

$$h_0 = ((b_1 - a_1)\theta + a_1\theta_2 - b_1\theta_1) / l, \quad l = \theta_2 - \theta_1.$$

В приведенных ниже примерах решение задачи Коши получено методом Фельберга с делением интервала l на 20000 подинтервалов и контролем точности и устойчивости.

В примерах рассмотрены шарнирно опертые на одном краю оболочки под действием внешнего равномерного давления с одинаковыми параметрами:

$$a_h = 40, \quad b_a = 0,5, \quad \theta_1 = 0,092, \quad \theta_2 = \pi/4, \quad v_{12(k)} = v_{21(k)} = 0,3. \quad (35)$$

В первом примере рассмотрена двухслойная оболочка, первый слой которой выполнен из дюралюминия, а второй – из стали, с дополнительными к равенствам (35) параметрами:

$$e_{i(1)} = 0,36 \cdot 10^3, \quad e_{i(2)} = 10^3, \quad \tau_{(1)} = 1, \quad \tau_{(2)} = \tau_{(1)} e_{i(2)} / e_{i(1)} = 2,77,$$

$$\rho_1 = 0,33, \quad \rho_2 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad T_1 = 100^\circ, \quad T_2 = 200^\circ.$$

При таком выборе пределов текучести интенсивности деформаций на внешних поверхностях слоев равны.

Во втором примере рассмотрена двухслойная оболочка, оба слоя которой выполнены из одного материала – стали, с дополнительными к равенствам (35) параметрами:

$$e_{i(1)} = 10^3, \quad e_{i(2)} = 10^3, \quad \tau_{(1)} = 1, \quad \tau_{(2)} = 1, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad c_1 = c_2 = 1.$$

Такую оболочку можно рассматривать как однородную.

Эталонная оболочка выполнена из одного материала, как во втором примере, и шарнирно оперта по краям с граничными условиями (27). Нагрузка по допустимой величине $\tau_{(k)} = 1$ в какой либо одной точке определена для эталонной оболочки по линейной теории упругих оболочек методом ортогональной прогонки и равна $q_n = -0,0184$.

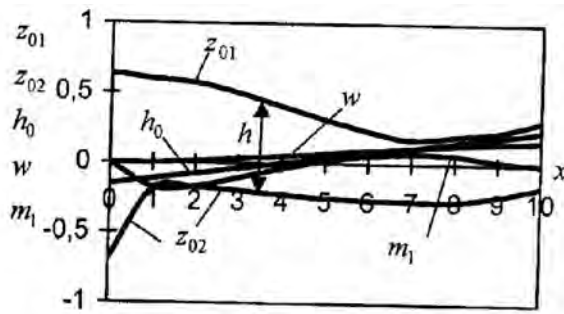


Рис. 1

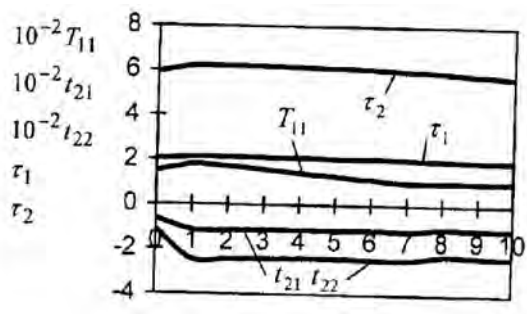


Рис. 2

Вычисления проведены с учетом уравнения (11) для функций, характеризующих распределение температуры. Зависимости $z_{01}, z_{02}, h_0, w, m_1, T_{11}, t_{21}, t_{22}, \tau_1, \tau_2$ от координаты $x = \theta - \theta_1$ для первой оболочки с температурами на внешних поверхностях слоев $T_1 = 100^\circ$ и $T_2 = 200^\circ$ ($\nu = 0,187$) показаны на рис. 1 – 2, с температурами $T_1 = -100^\circ$ и $T_2 = -200^\circ$ ($\nu = 0,249$) — на рис. 3 – 4, с температурами $T_1 = T_2 = 100^\circ$ ($\nu = 0,477$) на рис. 5 и с температурами $T_1 = T_2 = -100^\circ$ ($\nu = 0,398$) на рис. 6. Зависимости $z_{01}, z_{02}, h_0, w, m_1, \tau_1, \tau_2$ от координаты x для второй оболочки с одинаковыми температурами на внешних поверхностях слоев $T_1 = T_2 = 100^\circ$ ($\nu = 0,583$) показаны на рис. 7, а с температурами $T_1 = T_2 = -100^\circ$ ($\nu = 0,558$) — на рис. 8.

Из полученных результатов вычислений можно сделать следующие выводы.

1) Сохраняются затруднения, связанные с выполнением естественных граничных условий и отмеченные в работах [4 – 7]. Как правило, при точном выполнении граничных условий на одном крае нетрудно выполнить одно из трех граничных условий на другом крае оболочки. В примерах достаточно точно выполнено граничное условие – равенство нулю изгибающего момента (рис. 1 – 6). Равнопрочное предельное состояние под действием заданного внешнего давления обеспечивается установкой подвижного шарнира вдоль нормали с приложением поперечной силы и силы, направленной вдоль меридиана. В частном случае одинаковой температуры на внешних поверхностях слоев выполнены граничные условия – равенство нулю изгибающего момента и прогиба (рис. 5), что можно обеспечить установкой подвижного шарнира с приложением силы вдоль меридиана. Невыполнение естественных граничных условий приводит к выводу, что напряженно-деформированное состояние равнопрочной слоистой оболочки является предельным состоянием упругой слоистой оболочки с предельными нагрузками, как в жесткопластическом анализе [7].

2) Градиенты температур при нагреве внешних поверхностей первой оболочки (рис. 1 – 2) ведут к увеличению интенсивностей напряжений на поверхности сая слоев более чем в два раза, а с охлаждением внешних поверхностей – к снижению интенсивностей напряжений, за исключением краевых эффектов (рис. 3 – 4). Уменьшение интенсивностей напряжений имеет место и при одинаковых температурах на внешних поверхностях несущих слоев первой оболочки с различной интенсивностью краевых эффектов существенного превышения пределов текучести.

3) Напряженно-деформированное состояние и распределение температуры оболочки, за исключением первой оболочки с неодинаковым нагревом (рис. 2) и второй оболочки характеризуются немонотонными зависимостями от координаты (рис. 4, 5, 6, 7, 8).

4) Для второй оболочки интенсивности напряжений на поверхности «спая» $z = h_0$ интенсивности напряжений одинаковы (рис. 7,8), в отличие от первой оболочки (рис. 2,4). Кроме того, интенсивности напряжений на поверхности спая

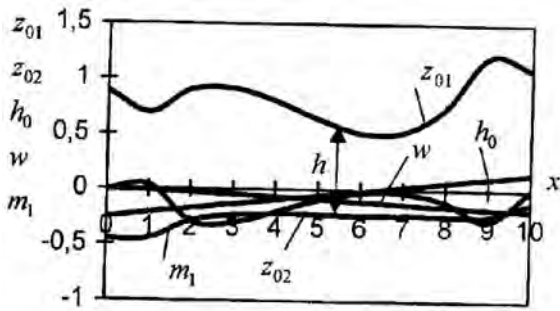


Рис. 3

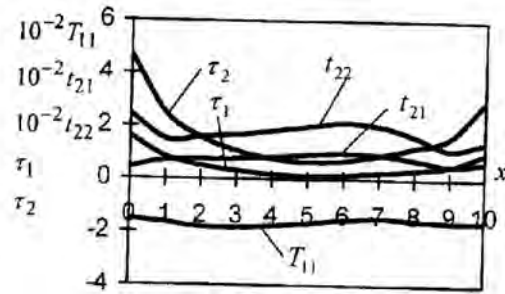


Рис. 4

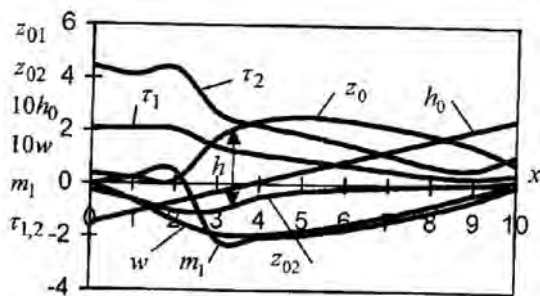


Рис. 5

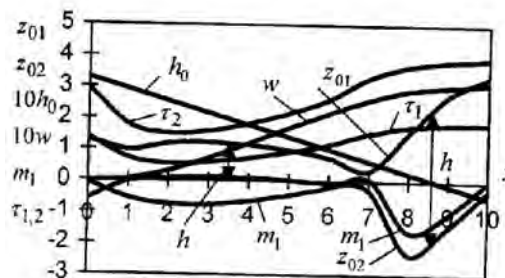


Рис. 6

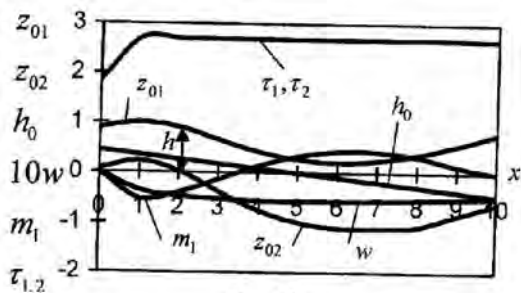


Рис. 7

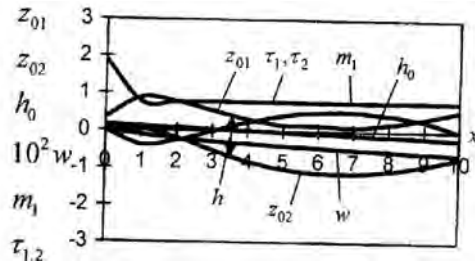


Рис. 8

слоев с одинаковым нагревом внешних поверхностей слоев в 2,7 раза превышают пределы текучести практически на всей длине оболочки. Следовательно нагрев внешних поверхностей слоев может быть причиной разрушения во внутренних областях оболочки.

5) Из полученных решений следует существенная зависимость веса, распределения толщин, интенсивностей напряжений от выбранной формы поверхности спая слоев. Принятая простейшая линейная зависимость для меридиана поверхности спая слоев не отражает всего многообразия особенностей напряженно-деформированного состояния и оптимизации элементов тонкостенных конструкций в условиях термосилового нагружения.

В целом, проведенные численные исследования показывают различный характер влияния температуры на предельные состояния при нагреве и охлаждении внешних поверхностей оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1978. –Т.12. – 90 с.
2. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. – М: Наука, 1981. – 288 с.
3. Немировский Ю. В. Оболочки абсолютно минимального веса // Механика деформируемых сред. – Куйбышев, – 1978. – Вып.3. – С. 3 – 78.
4. Вохмянин И. Т. , Немировский Ю. В., О проектировании двухслойной эллипсоидальной оболочки по критерию равнопрочности на внешних поверхностях слоев // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – № 11. – С. 9 –17.
5. Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В. Об оптимальном проектировании двухслойной тороидальной оболочки по условию равнопрочности на внешних поверхностях слоев // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 10. – С. 19 – 27.
6. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. О проектировании двухслойных кольцевых пластин по критерию равнопрочности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1 – 3 июля 2003 г. /Под ред. В.М. Фомина.– Новосибирск:«Издательство «Нонпарель» , 2003. – С. 27 – 37.
7. Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В. О равнопрочности и несущей способности упругих слоистых оболочек вращения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики СО РАН. – Новосибирск, 2007. Вып.125: Механика структурно-неоднородных сред. – С. 32 – 35.

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ ЖЕСТКОСТЬЮ

Косых Э.Г.

Transverse-longitudinal bending of elastic thinwalled beams with variable rigidity is considered. Boundary problem come to the linear system of differential equations with variable coefficients. Received combined equations of equilibrium and its analytical solution via moving.

В условиях поперечного изгиба рассматривается тонкостенный стержень с переменной жесткостью при ограничениях, определяемых условиями подобия жестких контуров поперечных сечений.

Логика применения дорогих высокопрочных материалов в различных отраслях техники и строительства приводит к необходимости применять тонкостенные конструкции и в частности тонкостенные стержни. Работу упругих тонкостенных стержней исследовал В.З.Власов [1]. Им сформулирована т.н. гипотеза жесткого контура, введены понятия секториальных геометрических характеристик, центра изгиба, построена система разрешающих дифференциальных уравнений и приведены решения конкретных задач для стержней постоянного – не зависящего от продольной координаты контура, а также при толщине элементов контура, постоянной вдоль продольной оси.

В настоящей работе исследуется упругий стержень переменного вдоль продольной оси контура с учетом изменения толщины стержня по длине.

Деформации малые, определяемые соотношениями Коши

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

Здесь: $(i, j = 1, 2, 3)$ – индексы осей основной системы координат; значение индекса "3" соответствует оси "z", т.е. продольной оси; u_i перемещение вдоль соответствующей оси.

Вводится криволинейная ось поперечного сечения вместе с соответствующей координатой s – это след пересечения срединной поверхности с плоскостью поперечного сечения. Эта ось имеет в общем случае несколько ветвей, и в нашей постановке задачи концы этих ветвей имеют уже не постоянные координаты x_{K_v} ; y_{K_v} – здесь индекс K_v указывает на координаты концов v -ой ветви, а зависящие от "z", т.е. координаты границ суть функции переменной "z": $x_{K_v}(z)$; $y_{K_v}(z)$.

Перемещение точек поперечного сечения.

В каждой точке криволинейной оси в поперечном сечении введем местную систему осей (v, w, u) – здесь v – направление касательной вдоль s ; w – направление внутренней нормали к срединной поверхности в этой точке, u – направление в точке параллельно оси z . Обозначим перемещения точки по этим направлениям теми же символами.

Учитывая геометрию стержня, гипотезу В.З.Власова об отсутствии сдвига в срединной поверхности, а также введенное им понятие секториальных характеристик, получим для перемещений v, w, u выражение

$$\begin{aligned} v &= \xi(z) \cos \alpha + \eta(z) \sin \alpha + \theta(z) h \\ w &= -\xi(z) \sin \alpha + \eta(z) \cos \alpha + \theta(z) t \\ u &= \xi(z) - \zeta_{,z} x - \eta_{,z}(z) y - \theta_{,z}(z) \omega \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\zeta(z)$ – перемещения вдоль основных осей – x , y , z ;

$\theta(z)$ – угол закручивания, обусловленный деформацией и чистым кручением поперечного сечения

$$\begin{aligned} h &= (x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha \\ t &= (x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

ω – секторная площадь,

$$d(x) = \cos \alpha ds; \quad dy = \sin \alpha ds; \quad d\omega = h ds.$$

Из (2) можно получить вариации перемещений. Например для δu :

$$\delta u = \delta \zeta - \delta \xi_{,z} \cdot x - \delta \eta_{,z} \cdot y - \delta \theta_{,z} \cdot \omega \quad (4)$$

аналогично и других вариаций.

Деформации в тонкостенном стержне следуют из (2) с помощью (1):

$$\varepsilon_{zz} = \zeta' - \xi'' x - \eta'' y - \theta'' \omega.$$

Других деформаций согласно принятых гипотез учитывать не будем. Вариации деформаций будут

$$\delta \varepsilon_{zz} = \delta \zeta' - \delta \xi'' x - \delta \eta'' y - \delta \theta'' \omega.$$

Нормальные напряжения для рассматриваемого линейно-упругого стержня будут иметь вид

$$\sigma_{zz} = E(\zeta' - \xi'' x - \eta'' y - \theta'' \omega).$$

Введем в рассмотрение внутренние силы

$$N = \int_F \sigma_{zz} dF; \quad M_x = \int_F \sigma_{zz} y dF; \quad M_y = - \int_F \sigma_{zz} x dF; \quad B = \int_F \sigma_{zz} \omega dF. \quad (5)$$

Величины N , M_x , M_y , B – продольная сила, изгибающие моменты относительно осей x , y , u , бимомент [1] – B . Кроме того, необходимо помнить, что в сечении действует момент чистого кручения H_K , обусловленный неравномерным распределением касательных напряжений по толщине δ . Для получения разрешающей системы уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Тогда вариация упругой потенциальной энергии будет

$$\delta W = \int_z (N \delta \zeta_{,z} - M_x \delta \xi_{,zz} + M_y \delta \eta_{,zz} + B \delta \theta_{,zz} + H_F \delta \theta_{,z}) dz \quad (6)$$

Вычислим вариации работы внешних сил δA , полагая что нагрузка $p(z, s)$ с проекциями (p_z, p_v, p_w) распределена по срединной поверхности

$$\delta A = \iint_{zs} (p_z \delta u + p_v \delta v + p_w \delta w) ds dz + \delta A_{Gr}. \quad (7)$$

Здесь δA_{Gr} – работа сил на границе.

Подставляем в (7) вариации перемещений, и преобразуя слагаемые с вариациями от производных известным образом, например:

$$(N(z) \delta \xi_{,z}) = (N(z) \delta \xi)_{,z} - (N_{,z}(z) \delta \xi);$$

получим систему уравнений равновесия в силах

$$\begin{aligned} N_{,z} &= -q_z, \\ M_{y,zz} &= - \left(\int_{L(z)} \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + q_x \right), \\ M_{x,zz} &= \int_{L(z)} \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + q_y, \\ B_{,zz} + H_{K,z} &= \int_{L(z)} \frac{\partial p_t}{\partial z} \omega ds + m. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь q_x, q_y, q_z – проекция погонной нагрузки от $p(z, s)$; m – погонный момент относительно выбранного полюса от заданной внешней нагрузки.

Используя далее выражения для внутренних сил через перемещения и их производные, после преобразования получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 (F_{\zeta,z} - S_y \xi_{,zz} - S_x \eta_{,zz} - S_\omega \theta_{,zz})_{,z} &= -\frac{1}{E} q_z \\
 (-S_y \zeta_{,z} + I_y \xi_{,zz} + I_{xy} \eta_{,zz} + I_{\omega x} \theta_{,zz})_{,zz} &= \frac{1}{E} \left(q_x + \int_{L(7)} P_{z,z} ds \right) \\
 (-S_x \zeta_{,z} + I_{xy} \xi_{,zz} + I_x \eta_{,zz} + I_{\omega y} \theta_{,zz})_{,zz} &= \frac{1}{E} \left(q_y + \int_{L(7)} P_{z,z} y ds \right) \\
 (-S_\omega \zeta_{,z} + I_{\omega x} \xi_{,zz} + I_{\omega y} \eta_{,zz} + I_\omega \theta_{,zz})_{,zz} - \left(\frac{G}{E} I_d \theta_{,z} \right)_z &= \\
 &= \frac{1}{E} \left(m + \int_{L(7)} P_{z,z} \omega ds \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

При выводе уравнений (8), (9) принято, что на боковых гранях границы стержня внешняя нагрузка отсутствует. Учет ее не представляет трудностей и приводит к пополнению правой части системы уравнений дополнительными членами.

Преобразуем (9) к виду, позволяющему с помощью построения матрицанта проинтегрировать систему. Продифференцируем первое уравнение системы один раз по "z" и запишем систему уравнений (9) в матричной форме, вводя дополнительные переменные:

$$\begin{aligned}
 \xi_{,zz} = \bar{\xi}, \quad \eta_{,zz} = \bar{\eta}, \quad \theta_{,zz} = \bar{\theta} \\
 \left[\begin{pmatrix} F & -S_y & -S_x & -S_\omega \\ -S_y & I_y & I_{xy} & I_{\omega x} \\ -S_x & I_{xy} & I_x & I_{\omega y} \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{,z} \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \right]_{,zz} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{G}{E} I_d \theta_{,z} \end{pmatrix} = + \frac{1}{E} \begin{pmatrix} -q_{z,z} \\ -q_x + \int_{L(z)} P_{z,z} x ds \\ q_y + \int_{L(z)} P_{z,z} y ds \\ m + \int_{L(z)} P_{z,z} \omega ds \end{pmatrix} \tag{10}
 \end{aligned}$$

Здесь матрица в первом слагаемом состоит из геометрических характеристик сечения. Обозначим ее (\wp) , тогда дифференцируем первое слагаемое по "z", и умножая слева на обратную матрицу, получим

$$\left(\begin{pmatrix} \zeta_{,z} \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \right)_{,zz} + 2(-\wp)^{-1}(\wp)_{,z} \begin{pmatrix} \zeta_{,z} \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}_{,z} + (\wp)^{-1}(\wp)_{,zz} \begin{pmatrix} \zeta_{,z} \\ \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} + (\wp)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{G}{E} I_d \theta_{,z} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} (\wp)^{-1} \begin{pmatrix} -q_{z,z} \\ q_x \\ q_y \\ m \end{pmatrix}$$

Символы \bar{q}_c – это краткая запись соответствующих элементов в (9).

Таким образом система уравнений (9) приведена к системе уравнений второго порядка в матричной форме. Выполним необходимые преобразования [2], приведем систему к виду

$$(y)_{,zz} + B(y)_{,z} + A(y) = (\bar{q}),$$

а затем и к канонической форме

$$(\bar{y})_{,zz} + E(z)(\bar{y}) = (\bar{q}) \tag{11}$$

Решение системы (11) построено автором в виде матрицанта [3].

Рассмотрим частный случай симметричного относительно двух осей сечения. Примером может служить двутавр с элементами постоянной толщины при переменной высоте полков. Матрица (φ) будет диагональной и общая система уравнений "распадется" на четыре системы уравнений.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}_{,zz} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 2F^{-1}F_{,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}_{,z} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & F_x^{-1}F_{,zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix} = \frac{F^{-1}}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -q_{z,z} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}_{,zz} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 2I_x I_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}_{,z} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & I_y^{-1} I_{y,zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \frac{I_y^{-1}}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ q_x + \int_{L(z)} P_{z,z} x ds \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}_{,zz} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 2I_x I_{x,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}_{,z} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & I_x^{-1} I_{x,zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \frac{I_x^{-1}}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ q_y + \int_{L(z)} P_{z,z} y ds \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}_{,zz} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{G}{E} I_{,z} & \dots & \dots & 2I_{\omega}^{-1} I_{\omega,\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}_{,z} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & I_{\omega}^{-1} I_{\omega,zz} - \frac{G}{E} I_{\omega}^{-1} I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{I_{\omega}^{-1}}{E} \begin{pmatrix} 0 \\ m + \int_{L(z)} P_{z,z} \omega ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

К каждой из этих систем можно буквально применить решение, изложенное в [2], [3] записать искомые вектора в функциях $Co(E, z)$ и $Si(E, z)$ составляющие матрицант системы уравнений; т.е.:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 Co(E, z) + C_2 Si(E, z) + \begin{pmatrix} y_{1q} \\ y_{2q} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Матричные функции $Co(E, z)$ и $Si(E, z)$ рассмотрены в [3]. Последнее слагаемое в (12) – это частное решение матричной системы (11).

Отметим, что в (12) получено решение системы любой размерности, так для решения системы (9) матрица $E(z)$ и вектор (y) будет уже пятого порядка.

Таким образом, в работе приведены системы уравнений деформирования тонкостенных стержней переменной жесткости в рамках гипотез В.З.Власова, но при ограничении изменений контура условием подобия, а также указан путь интегрирования полученной системы уравнений.

Как частный случай рассматривается аналитическое представление переменной жесткости кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией. В этих предположениях решение (12) получено в классической форме метода начальных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.З.Власов. Тонкостенные упругие стержни. // М.: Физматгиз –1959.
2. Э.Г.Косых. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости. // Вестник СамГУ – Естественная серия, 2008, N 8/1(67).
3. Э.Г. Косых. Изгиб стержней переменной жесткости. //Международная научная конференция "X Белорусская математическая конференция". Тезисы докладов. Часть 2. Минск, 2008. – С. 130.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СЕНСОРНОЙ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЗНАЧЕНИЙ

Колешко В.М., Сунка В.Я., Крупская Е.В.

The simulation data of vibration viscosimeter sensitive elements for large viscosity values measurements are presented. The viscosity measurement intelligent sensor system was developed and measurement errors of this system was determined.

В различных областях промышленности остро ощущается необходимость в создании широкого класса автоматизированных интеллектуальных сенсорных систем (ИСС) измерения вязкости газов и жидкостей в диапазоне от 10^{-5} до 10^8 Па·с, в том числе неньютоновских жидкостей в трубопроводах и емкостях.

При проектировании современных ИСС измерения к хорошо известным требованиям повышения метрологических параметров, ужесточения эксплуатационных параметров и уменьшения габаритов добавляются, в соответствии с мировыми стандартами IEEE 1451 специфические требования по интерфейсам ИСС измерения как в составе микропроцессорной системы автоматического контроля и управления, так и при передаче информации по беспроводным каналам связи, выполненным по требованиям мировых стандартов IEEE 802.11-802.16.

Для существенного расширения диапазона измеряемой динамической вязкости вплоть до величин (10^6 - 10^8) Па·с предложен фазовый метод, при котором измеряют величину фазового сдвига φ между электрическими напряжениями возбуждающего и приемного преобразователей вибрационного измерительного зонда. Для данного фазового метода вибрационные зонды должны иметь только сосредоточенные параметры и в исследуемой вязкой жидкости должны создавать плоские сдвиговые волны. Для вибрационных зондов используют поступательные и вращательные (крутильные) механические колебания. Значения безразмерных коэффициентов демпфирования используемых зондов запишутся выражениями [1,2]:

$$\text{зонд поступательных колебаний} \quad D_n = \frac{h\sqrt{\eta\rho_{\text{ж}}}}{m\sqrt{2\omega_0}} \quad (1)$$

$$\text{зонд вращательных колебаний} \quad D_b = \frac{M\sqrt{\eta\rho_{\text{ж}}}}{J\sqrt{2\omega_0}}, \quad (2)$$

где h – площадь соприкосновения зонда с жидкостью, m – масса зонда, M – момент инерции площади соприкосновения зонда с жидкостью, J – кинетический момент инерции зонда.

Для моделирования величины коэффициентов демпфирования D_o для поступательных и вращательных колебаний зонды конструктивно выбраны в виде стального шарика диаметром $d = 2r$ от 5 до 100 мм и стального цилиндра диаметром $d = 2r$ от 5 до 100 мм и длиной $l = 100$ мм. Конструктивно зонды выполнялись как сплошными, так и пустотелыми с толщиной стенки 2 мм. Моменты инерции выбранных зондов определялись по выражениям:

- для сплошных зондов:

$$M = \frac{8\pi r^4}{3} \text{ – для шара, } M = \pi r^3(2l + r) \text{ – для цилиндра,} \quad (3)$$

- для пустотелых зондов:

$$J = \frac{8\pi\rho_3(r^5 - r_b^5)}{15} - \text{для шара, } J = 0,5\pi\rho_3 l(r^4 - r_b^4) - \text{для цилиндра,} \quad (4)$$

где r_b – внутренний радиус пустотелого зонда. По приведенным выражениям (1)-(4) выполнено обширное моделирование зависимостей коэффициентов демпфирования D_o измерительных стальных зондов в зависимости от их конструктивного исполнения и величины вязкости исследуемых жидкостей. Некоторые результаты этого моделирования коэффициентов D_o (коэффициент вязкого демпфирования без конкретизации типа колебаний зонда)

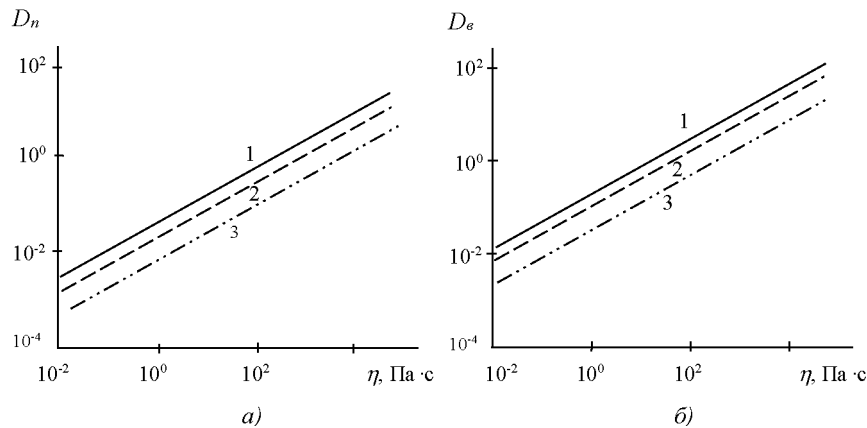


Рис.1. Зависимость коэффициентов демпфирования для поступательных (а) и вращательных (б) колебаний. 1;3- сплошной шарик $r = 5$ мм и 25 мм, 2 – пустотелый шар $r = 25$ мм.

для плотности контролируемой жидкости ($\rho_{ж} = 880 \text{ кг/м}^3$) и в зависимости от параметров вибрационных стальных зондов приведены на рис. 1. Анализируя эти зависимости можно констатировать следующее. Измерительные зонды с сосредоточенными параметрами на 1-2 порядка имеют более высокое значение коэффициента демпфирования D_o , чем зонды с распределенными параметрами, совершающими изгибные колебания. Одинаковой конструкции зонды для вращательных (крутильных) колебаний по сравнению с поступательными имеют величину коэффициента D_o в 1,5-1,6 раза большую. Измерительный зонд в виде шарика имеет на 20-30 % более высокую чувствительность, чем цилиндрический зонд с одинаковым диаметром зонда. Существенное различие в величинах коэффициента D_o имеет место для сплошных и пустотелых вибрационных зондов, при этом, чем больше наружный диаметр зонда, тем выше чувствительность к демпфированию (рис. 1. зависимость 2). Например, сплошной шарик диаметром 5 мм (рис. 1, зависимость 1) и пустотелый шар радиусом 25 мм (рис. 1, зависимость 2) имеют близкие значения коэффициентов D_o . Зонд в виде сплошного шара радиусом 25 мм (рис. 1, зависимость 3) имеет чувствительность по коэффициенту D_o в ~ 2 раза меньшую, чем пустотелый шар-зонд.

При малых значениях колебаний вибрационного зонда зависимость угла сдвига фаз φ между электрическими напряжениями приемного и возбуждающего преобразователей зонда записывается выражением:

$$\varphi = \arctg \frac{D_o v^{3/2} + v^2 - 1}{\chi + D_o v^{3/2}} + \varphi_o, \quad (5)$$

где $v = \omega/\omega_0$ – безразмерная круговая частота колебаний зонда, ω_0 – резонансная частота ненагруженного зонда, χ – тангенс угла механических потерь в упругом элементе зонда, можно считать, что величина χ обратно пропорционально величине ме-

ханической добротности Q , $\varphi_0 \sim 0,1^\circ$ – постоянный фазовый сдвиг в электронной цепи, создаваемый электрическими и механическими цепями.

Типичные частотные зависимости угла сдвига φ от геометрических параметров зонда и коэффициента D_0 приведены на рис. 2. Чем меньше механические потери в зонде, тем выше чувствительность прибора (зависимости 1-3).

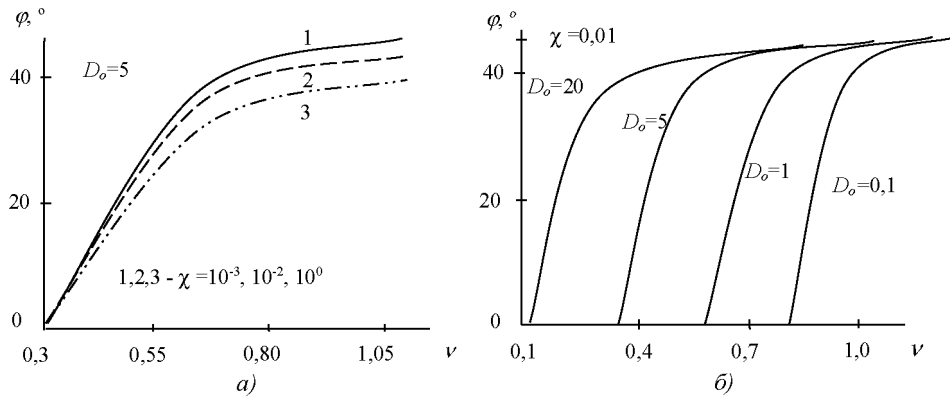


Рис. 2. Частотные зависимости угла сдвига фаз

Из рис. 2,б очевидно, что при увеличении значения коэффициента демпфирования D_0 безразмерная частота ν , на которой значение угла сдвига фаз $\varphi \sim 0$ сдвигается в сторону меньших значений ν . Из анализа типичных зависимостей, $\varphi = \psi(\chi, D_0, \nu)$ очевидно, что этим методом можно вести измерения при коэффициенте демпфирования $D_0 \geq 0,1$ и $\chi \geq 10^{-3}$.

По результатам измеренного (рассчитанного) значения сдвига фаз φ на выбранной частоте ν приведенная вязкость жидкости записывается выражением [1]:

$$\sqrt{\eta\rho_{\text{ж}}} = \frac{J\sqrt{2\omega_0}}{M} \cdot \frac{\nu^2 - 1 - \chi \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)}{\nu^{3/2} [\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) - 1]} \sqrt{\nu} \quad (6)$$

Рассчитанные по выражению (6) при величине $\frac{J\sqrt{2\omega_0}}{M} = 3,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ (постоянная вискозиметра) и плотности жидкости $\rho_{\text{ж}} = 880 \text{ кг/м}^3$ значения приведенной вязкости показаны на рис. 3. Величина $\sqrt{\eta\rho_{\text{ж}}}$, которую можно измерить данным методом повышается с ростом потерь χ и уменьшением безразмерной частоты ν .

Из графиков рис. 3 и выражений (6) вытекает, что увеличив постоянную вискозиметра $\frac{J\sqrt{2\omega_0}}{M} \gg 3,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ и снизив частоту ν до значений 0,25-0,35 при $\chi = 0,02-0,1$ возможно расширить диапазон измеряемых значений вязкости в сторону предельно больших значений $\sqrt{\eta\rho_{\text{ж}}}$. Например, при указанных значения $\chi, \nu, \frac{J\sqrt{2\omega_0}}{M}$ и плотности жидкости $\rho_{\text{ж}} = 880 \text{ кг/м}^3$ можно измерить вязкость до $\eta = (10^6 - 10^8) \text{ Па}\cdot\text{с}$, что до сих пор является рекордным значением для вибрационных вискозиметров.

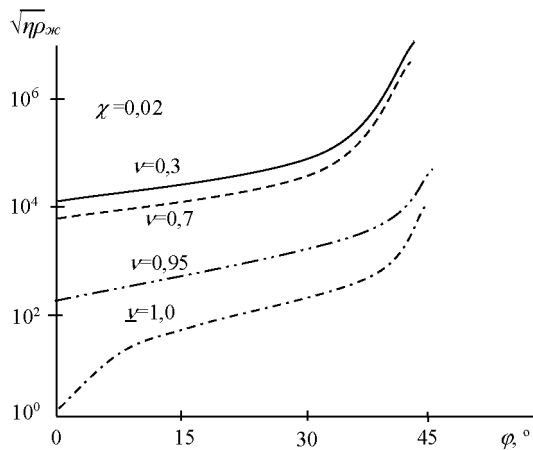


Рис. 3. Зависимость приведенной вязкости от угла сдвига

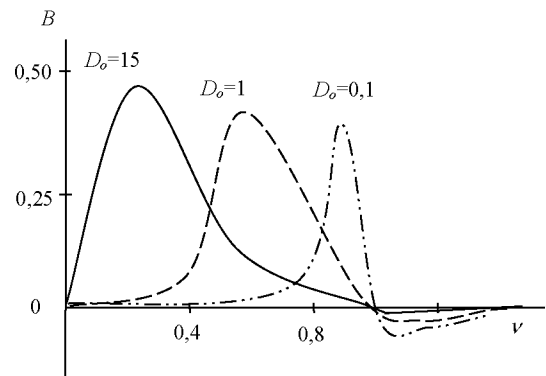


Рис. 4. Частотные зависимости чувствительности фазового вискозиметра

Чувствительность рассматриваемого фазового метода, равная отношению приращения угла φ к вызвавшему его изменению вязкости $\Delta\eta$ по [2] имеет вид:

$$B = \frac{D_0 \nu^{3/2} (1 + \chi - \nu^2)}{2((\chi + D_0 \nu^{3/2})^2 + [\nu^2 (1 + D_0 / \sqrt{\nu})]^2)} \quad (7)$$

Анализ приведенной зависимости чувствительности (рис. 4), рассчитанной по формуле (7) показывает, что повышение механической добротности Q зонда всегда ведет к увеличению чувствительности. Увеличение коэффициента демпфирования D_0 сдвигает максимум чувствительности в сторону уменьшения безразмерной частоты ν . Чем меньше величина D_0 , тем ближе значение максимума B к резонансной частоте ненагруженного зонда. Максимальное значение чувствительности стремится к своему предельному значению $B \cong 0,5$. Характерным для частотных зависимостей $B = \psi(\nu)$ является нулевая чувствительность при условии $\nu^2 = (1 + \chi)$. На этой безразмерной частоте все фазочастотные характеристики вибрационного зонда пересекаются в единой точке равной $\varphi = \pi/4$. При $\nu^2 > 1 + \chi$ шкала вискозиметра будет обратной. Поэтому при измерении рассматриваемым фазовым методом частоту измерения всегда необходимо выбирать ниже резонансной частоты ω .

Широкодиапазонная фазовая вибрационная ИСС вискозиметрии по рассматриваемому методу может быть выполнена по функциональной схеме рис. 5. Кварцевый генератор 6 вырабатывает стабильную частоту $f_{эм}$. Автоматически управляемым делителем 5 частота $f_{эм}$ понижается и через усилитель мощности 4 напряжение низкой частоты подается на возбуждающий преобразователь 2 вибрационного зонда 1, где и преобразуется в низкочастотные механические колебания. На другом, противоположном конце зонда 1 (или в непосредственной близости от него) расположен приемный преобразователь 3, воспринимающий колебания жидкой среды.

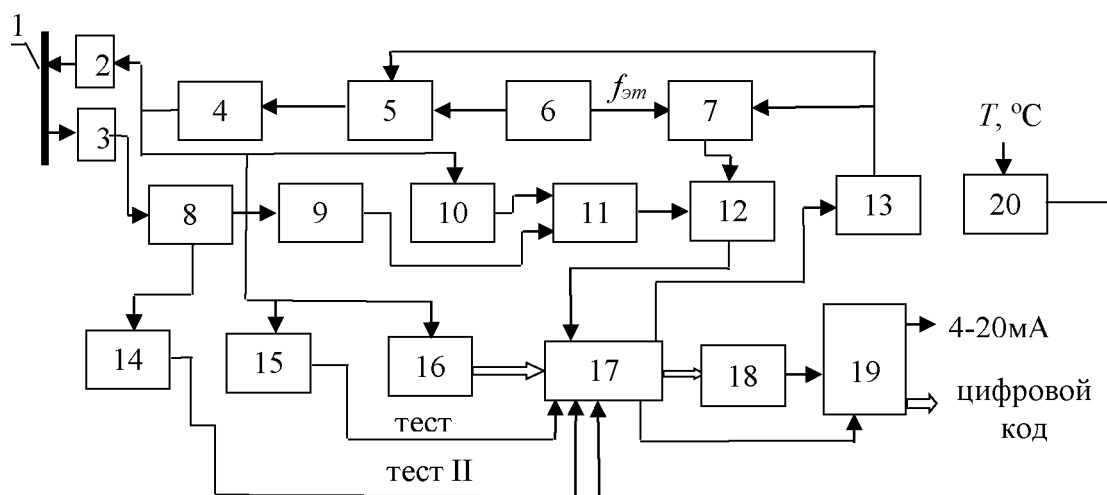


Рис. 5 Структурная схема фазовой ИСС вискозиметрии

От приемника 3 напряжение низкой частоты поступает на вход усилителя 8. Данный усилитель имеет глубокую автоматическую регулировку усиления в пределах 50÷60 дБ и цепи коррективы для уменьшения влияния высокой частоты, модулирующей слабый низкочастотный сигнал. Напряжения на входе преобразователя 2 и выходе преобразователя 3 не синфазные, при этом величина сдвига фаз φ между ними пропорциональна реакции жидкости на вводимые в нее механические колебания. Выходные напряжения усилителей 4 и 8 подаются на нуль-органы (триггеры Шмита) соответственно 10 и 9, в которых при переходе напряжения через нулевое значение формируется прямоугольный импульс с очень высокой крутизной фронтов (0,01 мкс). При подаче импульсов с нуль-органов 9 и 10 по их передним фронтам в формирователе 11 получают прямоугольный импульс, длительность которого t_i прямо пропорциональна величине фазового сдвига φ , т. е. вязкости исследуемой жидкости $t_i \approx \varphi \approx \eta$.

Измерение длительности импульса t_i выполняется с помощью хорошо разработанных электронных время импульсных методов измерения, суть которых состоит в счете количества импульсов генератора эталонной частоты, прошедших на счетчик в течение времени t_i . Для выполнения этой операции в вискозиметре имеется делитель частоты 7 и пересчетное устройство 12, на один вход которого подается от формирователя 11 импульс, длительностью t_i , а на другой – напряжение эталонной частоты от блока 7. Полученный с выхода пересчетного устройства 12 последовательный код, пропорциональный величине вязкости, подается на вход микроконтроллера 17, где и формируется двоичный N-разрядный выходной цифровой код.

Для управления отдельными исполнительными элементами технологического процесса наиболее приемлемым является получение выходного унифицированного аналогового тока (4÷20) мА. В этом случае с выхода микроконтроллера 17 выходной цифровой код подается на цифроаналоговый преобразователь 18. Выходные унифицированные сигналы вискозиметра через выходной сетевой интерфейс 19 передаются непосредственно потребителю по проводным или беспроводным каналам связи. Для выполнения самодиагностики и тестирования выходные напряжения усилителей 4 и 8, как наиболее информативных о надежной работе вискозиметра, подаются на входы выпрямителей-формирователей соответственно 14 и 15. Постоянные напряжения величиной (2,5÷3,5)В этих формирователей, при правильной работе приемо-возбуждающих преобразователей 2 и 3 и усилителей 4 и 8, подаются на входы микроконтроллера 17 (тест I и тест II) для последующего размещения логических «1» в старших разрядах выходного кода. В вискозиметр вводится также сенсор тем-

пературы 20 для корректировки температурной погрешности измерений вязкости и приведения значения измеряемой вязкости к температуре 20°C.

Околорезонансные измерения фазы и частоты реально осуществимы при скачкообразном изменении частоты возбуждения измерительного зонда. Для выбора оптимальной частоты измерения в зависимости от вязкости контролируемой жидкости задающий генератор выполняется электронно-перестраиваемым. Это позволяет одним и тем же измерительным зондом перекрывать очень широкий диапазон значений вязкости. Учитывая, что вибрационный вискозиметр работает в широком диапазоне вязкостей, то это создает значительную механическую нагрузку на измерительный зонд при больших значениях вязкости (верхняя часть предела измерения). Безусловно, в этих условиях усилитель мощности, возбуждающий измерительный зонд, должен иметь достаточный запас по выходной электрической мощности.

В микроконтроллере 17 в течение измерительного процесса проводится анализ измеряемого значения фазы. Если величина фазы $\varphi \geq 45^\circ$, то с выхода микроконтроллера подается импульс напряжения через блок 13, который выдает управляющее напряжение на делитель частоты 5. При этом частота генератора 4 понижается до тех пор, пока угол сдвига фаз не будет находиться в диапазоне $10^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$. При выходе в этот диапазон угла сдвига фаз прекращается дальнейшее изменение частоты. В микроконтроллер 17 постоянно вводится информация о величине фазы и частоты напряжения возбуждения вибронда.

При определенных выше значениях фазы, частоты и величине плотности контролируемой жидкости по выражению (6) и проводится вычисление измеряемой вязкости в широком диапазоне значений.

В состав микроконтроллера 17 входит и перепрограммируемое запоминающее устройство, в котором записана вся программа измерительно-вычислительного процесса. Микроконтроллер 17 выполняет следующие основные функции: метрологическую обработку информации по результатам измерения; выбор необходимой частоты измерения по величине вязкости и управление частотой задающего генератора для возбуждения измерительного зонда; управление процессом измерения; выбор и регулировку диапазона измерения; формирование идентификационной информации о вискозиметре и передачи полной информации по запросу потребителя.

Для рассматриваемого метода приведем выражения для определения полной погрешности измерения в виде:

$$\Delta\eta/\eta = N_{\varphi\varphi} (\Delta\varphi/\varphi) + N_{\varphi f} (\Delta f/f) + N_{\varphi v} (\Delta v/v) + N_{\varphi P} (\Delta P/P) \quad (8)$$

где $N_{\varphi\varphi}$, $N_{\varphi f}$, $N_{\varphi v}$ и $N_{\varphi P}$ – соответственно коэффициенты ошибок измерения сдвига фаз, частоты, резонансной частоты ненагруженного зонда и подводимой мощности для возбуждения измерительного зонда ($\Delta\varphi/\varphi$), ($\Delta f/f$), ($\Delta v/v$) и ($\Delta P/P$) – относительные приведенные погрешности измерения фазы, частоты генератора, резонансной частоты вибрационного зонда обусловленной изменением температуры, старением и т.д., а также стабильность электрической мощности генератора. Коэффициенты $N_{\varphi\varphi}$, $N_{\varphi f}$, $N_{\varphi v}$ и $N_{\varphi P}$ – суть методические ошибки выбранного метода измерения вязкости, которые определяются, прежде всего, параметрами вибрационного зонда и они показывают во сколько раз суммарная приведенная относительная погрешность вибрационного вискозиметра больше чем, относительная погрешность электронных измерителей амплитуды (вольтметра), фазы (фазометра), частоты (частотомера) и электрической мощности.

Фазовые погрешности отдельных электронных блоков вискозиметра можно суммировать с погрешностью измерителя фазы и представлять их в составляющей φ_0 . Пренебрегая величинами $N_{\varphi f}$ (ввиду ее малости для кварцевых генераторов) и $N_{\varphi P}$

(можно автоматически поддерживать достаточно точно постоянной величину электрической мощности, вводимой в вибрационный зонд) полная приведенная погрешность запишется суммой составляющих:

$$\Delta\eta/\eta = N_{\varphi p}(\Delta\varphi/\varphi) + N_{\varphi v}(\Delta v/v). \quad (9)$$

Коэффициенты ошибки $N_{\varphi v}$ и $N_{\varphi p}$ запишутся в виде [1]:

$$N_{\varphi v} = \frac{3(1-v^2)/v^2 + 2v}{1+\chi-v^2}, \quad (10)$$

$$N_{\varphi p} = 2 \frac{(\chi + D_0 v^{3/2})^2 + (D_0 v^{3/2} + v^2 - 1)^2}{D_0 v^{3/2}(1+\chi-v^2)}. \quad (11)$$

Анализируя приведенные на рис.6 зависимости коэффициентов ошибок $N_{\varphi v}$ и $N_{\varphi p}$, рассчитанных по выражениям (10) и (11) можно констатировать. Увеличение

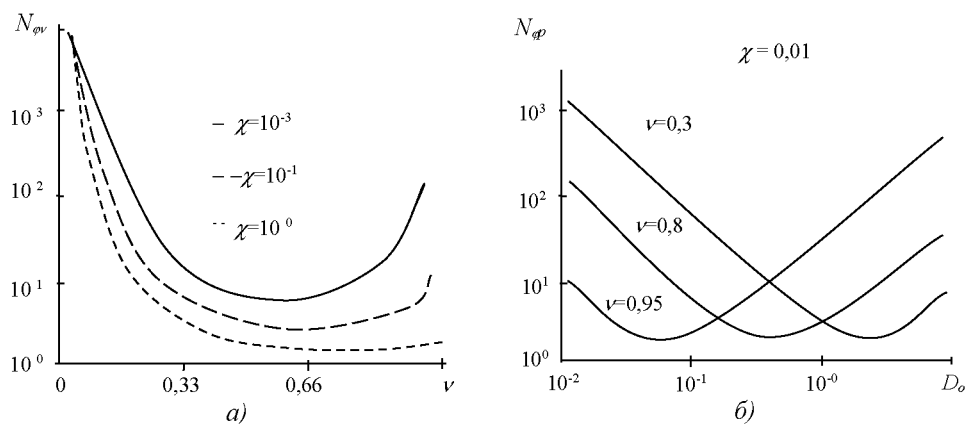


Рис. 6 Зависимости коэффициентов ошибок частотной (а) и фазовой (б) нестабильно-

механических потерь χ (рис. 6,а) приводит к некоторому снижению ошибки $N_{\varphi v}$, возможно из-за уменьшения чувствительности вибрационного зонда. При величине $(\Delta v/v) \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ (кварцевые задающие генераторы) безразмерная частота измерения v может сдвигаться в сторону ее уменьшения вплоть до $v = 0,2-0,3$ (измерение больших значений вязкости жидкостей). При этих условиях погрешность $N_{\varphi v}(\Delta v/v)$ при $\chi = (10^{-3} - 1,0)$ не превысит значений $(0,4-1) \%$.

Зависимости коэффициентов ошибки сдвига фаз $N_{\varphi p}$ (рис. 6,б) от величины коэффициента демпфирования D_0 имеют явно выраженный минимум своих значений при выбранных для измерения вязкости значениях безразмерной частоты v . Минимальные значения $N_{\varphi p}$ находятся в пределах $N_{\varphi p} \sim (1,5-2,0)$. Чем меньше значения вязкости, тем ближе частота измерений к резонансной частоте не нагруженного измерительного зонда. Частотные зависимости минимума $N_{\varphi p}$ хорошо коррелируют с зависимостями чувствительности фазового метода (рис.4).

В целом, можно констатировать, что погрешности измерения в амплитудном методе имеют наибольшее значение [3], а в компенсационном амплитудном методе эти погрешности меньше [4,5]. Принципиально наиболее перспективны вибрационные вискозиметры на основе фазовых методов, имеющих меньшую погрешность, чем амплитудные вискозиметры. Однако фазовые вибрационные вискозиметры схематически существенно сложнее (требуется многоканальное построение задающего генератора), чем амплитудные вискозиметры.

При конструировании вибрационных вискозиметров материал для вибросотного зонда должен обладать малыми несовершенствами упругости, высокой релаксационной стойкостью, стабильностью упругих свойств во времени и в переменных внешних условиях, необходимой коррозионной стойкостью при работе с агрессивными средами. Для высокого класса ИСС вибровискозиметрии при измерении неагрессивных жидких сред и при небольшом температурном диапазоне окружающей среды для изготовления вибрационных зондов хорошо использовать хромокремниймарганцевистую сталь 35ХГС. Для ИСС измерения вязкости общего назначения вибросотные зонды можно изготавливать из сталей 35ХГС, 50ХГА, 50ХФА, а также из сталей 20Х13 и 40Х13.

Для образцовых и 1-го класса ИСС измерения вязкости при работе в агрессивных средах и повышенной температуре для изготовления вибрационных зондов используют элинварный сплав 44НХТЮ – ферромагнитной сплав с железохромникелевой основой с добавками титана и алюминия.

Материалы для вибросотных измерительных зондов должны быть ферромагнетиками, способными хорошо взаимодействовать с магнитным полем для построения качественных электромагнитных преобразователей зонда (возбуждающего и приемного).

Для материалов вибросотных измерительных зондов очень важным является следующее соотношение $\sigma_n / \sigma_y \cong (0,1-0,15)$, где σ_n – предел прочности и σ_y – предел упругости материала (сопротивляемость металла механической пластической деформации).

Для повышения метрологических и эксплуатационных характеристик вибросотных измерительных зондов разработаны методы упрочнения материала резонатора, для замедления роста процессов ползучести (развитие необратимой деформации во времени), основанные на комбинированном воздействии теплового и механического воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крутин, В.Н. К методике расчета колебательных крутильных вискозиметров с сосредоточенными параметрами / В.Н. Крутин, И.Б. Смирницкий // Зав. лаборатория. -1975. - № 4. - С. 461-466.
2. Крутин, В.Н. Фазовый вибрационный метод измерения вязкостей / В.Н. Крутин, Л.А. Ушаков // Зав. лаборатория. - 1976, -№ 8. - С. 1197-1199.
3. Дзюба, А.П. Разработка вибрационного вискозиметра общепромышленного назначения и опыт его внедрения / А.П.Дзюба, В.Н.Крутин, Л.А.Ушаков и др. // Сборник научных трудов. Под ред. Чл. корр. АН СССР С.С. Кутателадзе. - Новосибирск: 1976, - С. 78-87.
4. Колешко, В.М. Электронный прибор для измерения плотности- вязкости нефтепродуктов / В.М. Колешко, В.Я. Сунка // Материалы, технология, инструменты. - 1997, - №1, - С. 96-99.
5. Колешко, В.М. Реанимация нефтегазовых скважин / В.М. Колешко, В.Я. Сунка – Минск, М., 1996, - 60 с.

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ УРОВНЕЙ НАГРУЖЕНИЯ СЛОЖНО АРМИРОВАННЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Немировский Ю. В., Янковский А. П.

Сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения в условиях ползучести верхней кинематической границы несущей способности сложно армированных металлокомпозитных пологих оболочек вращения. Показано, что для рассмотренных видов конструкций и типов композиций наибольшую предельную нагрузку обеспечивают структуры армирования по меридионально-окружным направлениям; максимально допустимые предельные нагрузки для тонкостенных конструкций, работающих в условиях ползучести, в несколько раз ниже предельно допустимых нагрузок, определенных по критерию кратковременной прочности; даже незначительное искривление срединной поверхности пластин приводит к существенному увеличению несущей способности таких тонкостенных конструкций.

В работах [1, 2] авторы исследовали влияние различных структур армирования на несущую способность изгибаемых пластин и оболочек на базе критерия кратковременной прочности. При этом предполагалось: все фазовые материалы тонкостенных конструкций ведут себя идеально-жестко-пластично, что позволяет определить предельный уровень нагружения, выдерживаемый армированными пластинами и оболочками при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции. Однако на практике тонкостенные конструкции зачастую эксплуатируются в условиях длительного нагружения при повышенных температурах [3], поэтому в них могут активно развиваться деформации ползучести. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос об оценке предельных уровней нагружения сложно армированных металлокомпозитных оболочек (которые в последнее время находят все более широкое применение на практике) с учетом развития деформаций ползучести в них.

Так как теория ползучести и длительной прочности сложно армированных тонкостенных конструкций в настоящее время находится в зачаточном состоянии [4], то для проведения оценочных технических расчетов целесообразно использовать приближенную схему жестко-ползучего тела [5, 6]. Полное решение или близкие (верхнюю и нижнюю) границы несущей способности конструкции по жестко-ползучей схеме можно получить лишь для некоторого узкого круга задач [5–7 и др.], поэтому выдвигаемые практикой новые задачи требуют привлечения численных методов решения математической задачи об определении предельного уровня их нагружения в рамках жестко-ползучей модели. Настоящее исследование посвящено определению верхней границы несущей способности металлокомпозитных пологих оболочек вращения различной осесимметричной структуры в условиях ползучести с использованием теории линейного программирования.

В силу известного [5] формального сходства определения несущей способности конструкции по жесткопластической и жестко-ползучей схемам не будем останавливаться на описании метода расчета, который полностью совпадает с подробно изложенным в [2], где нужно лишь заменить пределы текучести $\sigma_s = \sigma_{0,2}$ фазовых материалов на соответствующие пределы ползучести σ_c .

При проведении расчетов по жестко-ползучей схеме предел ползучести σ_c материала выбирается либо из условия предельно допустимой деформации ϵ_{\max} ползучести [6], либо из условия предельно допустимой скорости $\dot{\epsilon}_{\max}$ деформации пол-

зучести [5], которая регламентирована для целого ряда несущих элементов конструкций [3].

В случае армированного металлокомпозита значения σ_c для фазовых материалов можно выбрать, исходя, например, из следующих соображений. Рассмотрим наиболее характерные законы $\dot{\epsilon} \propto \sigma$ установившейся ползучести для металлов: степенной

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^m \quad [1/\text{ч}] \quad (1)$$

и экспоненциальный

$$\dot{\epsilon} = \exp(-K + \beta\sigma) \quad [1/\text{ч}], \quad (2)$$

где B, m, K, β – известные из эксперимента характеристики материалов.

Далее в настоящем исследовании будем изучать поведение пластин, изготовленных из жесткой меди (Cu) или алюминиевого (Al) сплава АМг3 и армированных стальной проволокой У8А. При температуре $T \approx 200^\circ\text{C}$ законы установившейся ползучести для меди и проволоки У8А подчиняются соотношению (1) с характеристиками:

$$\text{Cu [8]: } m = 2,16, \quad B = 5,63 \cdot 10^{-9} \text{ (МПа)}^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}; \quad (3)$$

$$\text{У8А [9]: } m = 24,98, \quad B = 1,054 \cdot 10^{-84} \text{ (МПа)}^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}, \quad (4)$$

а для алюминиевого сплава – соотношению (2) при:

$$\text{АМг3 [10]: } K = 12,2, \quad \beta = 0,0673 \text{ (МПа)}^{-1}. \quad (5)$$

Аппроксимируем степенной закон установившейся ползучести (1), (4) для проволоки У8А двухзвенной кусочно-линейной функцией

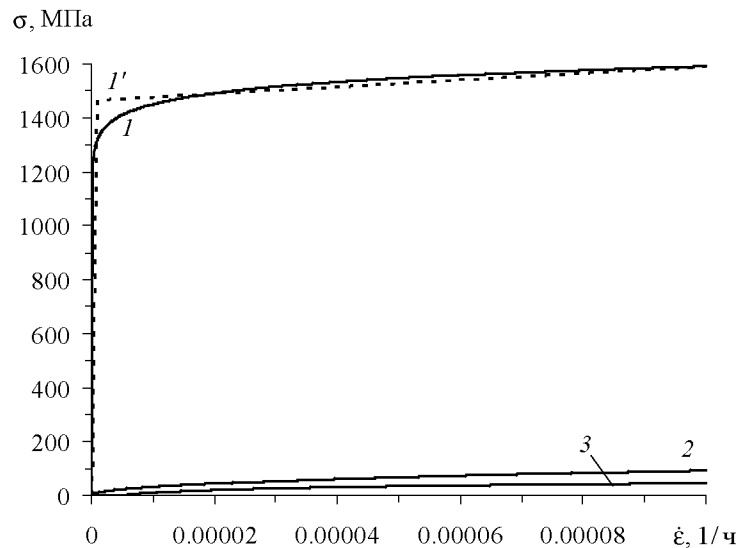


Рис. 1. Кривые установившейся ползучести фазовых материалов

$$\sigma = \begin{cases} B_1 \dot{\epsilon}, & 0 \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_1, \\ \sigma_1 + B_2 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_1), & \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_1, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$B_1 = 1,611 \cdot 10^{15} \text{ Па} \cdot \text{ч}, \quad B_2 = 1,257 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{ч},$$

$$\sigma_1 = 1,466 \text{ ГПа}, \quad \dot{\epsilon}_1 = 9,097 \cdot 10^{-7} \text{ 1/ч}. \quad (7)$$

(Параметры (7) определены на основании зависимости (1), (4) методом наименьших квадратов на интервале $0 \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-4} \text{ 1/ч}$, при этом варьировались величины σ_1 , $\dot{\epsilon}_1$.)

На рис. 1 кривые 1, 2 характеризуют степенные зависимости $\sigma \sim \dot{\epsilon}$ (1) с параметрами (4), (3) соответственно, а линия 3 – экспоненциальную зависимость (2), (5). Двухзвенная ломаная 1' (штриховая линия) соответствует аппроксимации (6), (7). Сравнение линий 1, 1' показывает, что зависимость (6), (7) удовлетворительно аппроксимирует закон установившейся ползучести (1), (4). Из поведения же ломаной 1' следует, что при $\sigma > \sigma_1$ происходит «катастрофическое» нарастание скорости $\dot{\epsilon}$ деформации установившейся ползучести арматуры, поэтому для проволоки У8А в качестве предела ползучести целесообразно выбрать значение $\sigma_c = \sigma_1 = 1,466 \text{ ГПа}$. Согласно (1), (4), этому значению напряжения соответствует скорость деформации $\dot{\epsilon}_{\max} = 1,3034 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}$. Так как арматура и связующее в пластине должны деформироваться совместно, и при одних и тех же значениях скорости $\dot{\epsilon}$ деформаций ползучести напряжения σ в меди и алюминиевом сплаве АМгЗ существенно меньше напряжения в проволоке У8А (ср. поведение кривых 2, 3 с линией 1), то катастрофическому нарастанию $\dot{\epsilon}$ в арматуре будет соответствовать и катастрофическое нарастание $\dot{\epsilon}$ в связующем композициях. Поэтому для рассматриваемых материалов связующей матрицы в качестве $\dot{\epsilon}_{\max}$ можно выбрать то же самое значение, что и для проволоки У8А. Подставив $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{\max} = 1,3034 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}$ в соотношения (1), (2), с учетом параметров (3), (5) получим расчетные значения пределов ползучести σ_c для твердой меди и сплава АМгЗ, которые (наряду с другими физико-механическими характеристиками фазовых материалов) приведены в таблице. (Рассуждая подобным образом, можно определить значения σ_c для фазовых материалов при использовании других типов металлокомпозиций.)

Физико-механические характеристики фазовых материалов [3, 9]

Материал	σ_s , МПа	σ_c , МПа	ρ , кг/м ³
Твердая медь	280	36,11	8940
Сплав АМгЗ	108,9	14,15	2670
Проволока У8А	3500	1466	7800

Исследуем на конкретных примерах влияние структуры армирования и типа композиции полой оболочки на уровень ее предельного нагружения при ползучести и сравним его с уровнем предельного нагружения таких оболочек, определенным по жесткопластической схеме (по критерию кратковременной прочности). В качестве условия сопоставимости различных проектов армирования оболочек выберем одинаковый расход Ω арматуры в них, который с учетом метрики на плоскости (что справедливо для полых оболочек) определяется равенствами

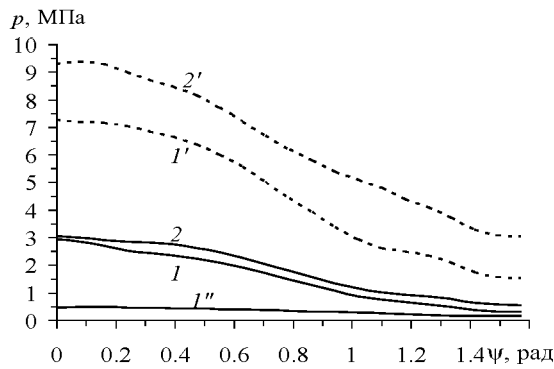


Рис. 2. Зависимости предельных нагрузок для тонкостенных конструкций от угла

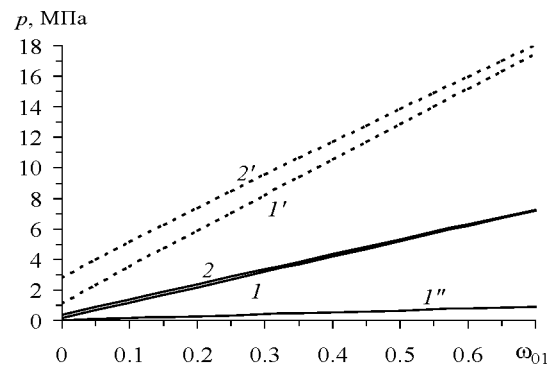


Рис. 3. Зависимости предельных нагрузок для тонкостенных конструкций с меридионально-окружной структурой от суммарной плотности армирования

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega_k = \int_V \omega_k dV = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} H(r) \omega_k(r) r dr \quad (1 \leq k \leq N) \quad (8)$$

и фиксирован для любых композиций и структур армирования. (Здесь $H(r)$ – переменная по радиусу r (в плане) толщина полой оболочки; r_0, r_1 – радиусы внутренней и внешней кромок кольцевой (в плане) оболочки; $\omega_k(r)$ – плотность армирования волокнами k -го семейства; N – количество армирующих волокон (проволок); Ω_k – объемное содержание волокон k -го семейства.)

Так как арматура предполагается постоянного поперечного сечения и обрывается только на краях конструкции, то, согласно [11], для полой оболочки

$$\omega_k(r) = H_0 r_0 \omega_{k0} \cos \psi_{k0} / [H(r) r \cos \psi_k(r)], \quad H_0 = H(r_0), \quad \omega_{k0} = \omega_k(r_0), \quad \psi_{k0} = \psi_k(r_0), \quad (9)$$

где $\psi_k(r)$ – углы армирования проволокой k -го семейства, отсчитываемые от меридионального направления (предполагаются изначально заданными функциями); ω_{k0} – произвольные постоянные. Равенство (9) не выполняется лишь при окружном армировании (так как $\cos \psi_k \equiv 0$), в этом случае $\omega_k(r)$ – произвольная функция [11].

Рассмотрим несущую способность пологих сферических оболочек радиуса $R = 1,2$ м и толщины $H = 1$ см, ограниченных (в плане) кромками радиусов $r_0 = 10$ см, $r_1 = 40$ см и жестко заземленных на внешней кромке r_1 . Центральное (полюсное) отверстие предполагается закрытым абсолютно жесткой круглой пластиной (крышкой), жестко скрепленной с внутренней кромкой оболочки r_0 . На оболочку (со стороны вогнутости) и крышку действует равномерно распределенная поперечная поверхностная нагрузка p .

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимости предельной поперечной поверхностной нагрузки p от угла армирования ψ . Оболочки армированы меридионально-симметрично по логарифмическим спиральям двумя ($N = 2$) семействами проволок ($\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi = \text{const}$, $\omega_1(r) = \omega_2(r)$) с интенсивностями на внутренней кромке $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,35$, поэтому для обеих рассматриваемых композиций при всех структурах такого армирования общий расход Ω волокон в тонкостенных конструкциях остается одним и тем же (см. (8), (9)).

З а м е ч а н и е 1. На рис. 2, 3 сплошные линии 1, 2 определяют предельные нагрузки p_c для пологих оболочек при ползучести, а пунктирные кривые 1', 2' приведены для сравнения и соответствуют предельным нагрузкам p_s , рассчитанным

для тех же конструкций по жесткопластической схеме (по критерию кратковременной несущей способности). На этих рисунках линии 1, 1' построены для композиции Al-U8A, а кривые 2, 2' – для композиции Cu-U8A. Кроме того, на рис. 2, 3 для сравнения приведены кривые 1'', характеризующие значения p_c для кольцевых армированных пластин ($R \rightarrow \infty$) из композиции Al-U8A.

Сравнение кривых 1, 2 с 1', 2' соответственно на рис. 2 указывает на то, что несущая способность пологих оболочек рассматриваемой структуры, определенная по жестко-ползучей схеме, далека от полного исчерпания, так как ординаты точек на линиях 1, 2 в два с лишним раза меньше, чем на кривых 1', 2'. Сопоставление же линий 1 и 1'' показывает, что даже незначительное искривление срединной поверхности пластины (трансформация ее в пологую оболочку) приводит к существенному (в разы) увеличению предельной нагрузки p_c при ползучести. (Подобные картины наблюдаются и на рис. 3.)

Все кривые на рис. 2 (за исключением линии 2') монотонно убывают. Следовательно, для обеих композиций в условиях ползучести и для Al-U8A-композиции в условиях кратковременной прочности из всех рассмотренных проектов армирования меридиональное армирование ($\psi = 0$) является рациональным, так как обеспечивает максимальные значения p_c , p_s . Кривая же 2' имеет максимум при перекрестном армировании под углами $\psi \approx \pi/20$, поэтому не всегда меридиональное армирование (армирование по одному из направлений главных напряжений в композиции) может оказаться наилучшим. В силу того, что точки максимумов на кривых 2, 2' рис. 2 реализуются при разных углах армирования ($\psi = 0$ – для линии 2, $\psi \approx \pi/20$ – для кривой 2'), рациональные с точки зрения кратковременной прочности проекты армирования могут оказаться нерациональными при эксплуатации изделия в условиях длительной прочности.

Общая тенденция поведения всех кривых на рис. 2 – уменьшение значений p_c , p_s с увеличением углов спирального армирования ψ . Однако эта тенденция сохраняется не всегда. Так, для оболочек большой кривизны [2] и для изгибаемых пластин, жестко заземленных на внутренней кромке и свободных от нагружения на внешней кромке [1], при определенных композициях наблюдается противоположное явление – возрастание предельной нагрузки p с увеличением углов армирования ψ . В этих случаях рациональными являются проекты со структурами армирования, близкими к окружному ($\psi = \pi/2$). Следовательно, выбор рациональных структур армирования зависит не только от типа композиции, но и от геометрии тонкостенной конструкции (в частности, от степени искривленности срединной поверхности) и способов закрепления и опирания ее кромок.

Рассмотрим теперь пологие оболочки и кольцевые пластины, армированные по меридионально-окружным направлениям, совпадающим с направлениями главных напряжений. Интенсивность армирования ω_1 меридиональным ($\psi_1 = 0$) семейством волокон определяется равенством (9), а интенсивность армирования окружным семейством зададим формулой $\omega_2(r) = \omega_{10} - \omega_1(r)$. При этом суммарная плотность армирования постоянна ($\omega_{10} = \omega_1(r) + \omega_2(r) = \text{const}$). Увеличивая ω_{10} в пределах $0 \leq \omega_{10} \leq \omega_{\text{max}}$ (где $\omega_{\text{max}} \approx 0,7$ – предельно допустимое на практике значение интенсивности армирования), будем увеличивать относительное объемное содержание арматуры в конструкции. Так как в обеих рассматриваемых композициях предельные напряжения σ_c , σ_s в волокнах более чем на порядок превосходят значения аналогичных величин в связующем (см. таблицу), то увеличение удельного объемного

содержания арматуры должно приводить к увеличению несущей способности металлокомпозитных оболочек и пластин.

На рис. 3 изображены зависимости $p(\omega_{10})$ для конструкций с указанными структурами армирования (см. замечание 1). Ординаты левых точек на кривых рис. 3 (при $\omega_{10} = 0$) определяют значения p_c , p_s для изотропных пологих оболочек и пластин, выполненных из материала связующего. Все кривые на рис. 3 монотонно возрастают, причем ординаты точек этих кривых уже при $\omega_{10} \geq 0,1$ в несколько раз больше, чем при $\omega_{10} = 0$. Следовательно, армирование пологих оболочек позволяет увеличить их несущую способность в разы, а в некоторых случаях – на порядок и более (ср. ординаты левых и правых точек на кривых 1, 2 рис. 3).

Сравнение кривых с одинаковыми номерами, изображенных на рис. 2, 3, позволяет заключить, что из всех рассмотренных выше проектов армирования для обеих композиций наибольшую несущую способность обеспечивают структуры с меридионально-окружным армированием (рис. 3) при предельной суммарной плотности армирования $\omega_{10} = 0,7$. Это объясняется тем, что при таких структурах армирования суммарное объемное содержание арматуры Ω (см. (8)) в пологих оболочках и пластинах фиксированной толщины ($H = 1$ см) больше, чем при их спирально-перекрестном армировании (см. (8), (9)) со значениями $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,35$ на внутренней кромке (рис. 2).

Изменение структуры армирования тонкостенных конструкций приводит к изменению жесткопластической и жестко-ползучей границы в них. В большинстве проведенных расчетов образование пластических или вязко-ползучих шарниров происходило на обеих кромках; в некоторых же случаях (например, при расчете кривой 1" на рис. 2) часть тонкостенной конструкции (при некоторых углах армирования ψ), примыкающая к внутренней кромке ($r_0 \leq r < r_p$), остается абсолютно жесткой и движется поступательно вместе с абсолютно жесткой крышкой, закрывающей полусное отверстие, а остальная часть, примыкающая к внешней кромке ($r_p < r \leq r_1$), испытывает течение в условиях ползучести или пластичности; в точке $r = r_p$ возникает пластический или вязко-ползучий шарнир. Граница между абсолютно жесткой зоной и зоной течения, определяемая радиусом r_p , изменяется вместе с изменением структуры армирования или с формой профиля конструкции. Так, на рис. 4 изображена зависимость r_p от ψ для Al-U8A-пластин ($R \rightarrow \infty$), армиро-

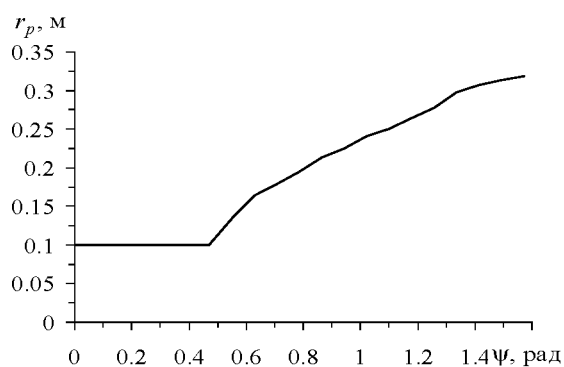


Рис. 4. Зависимость положения жестко-ползучей границы в Al-U8A-пластине со

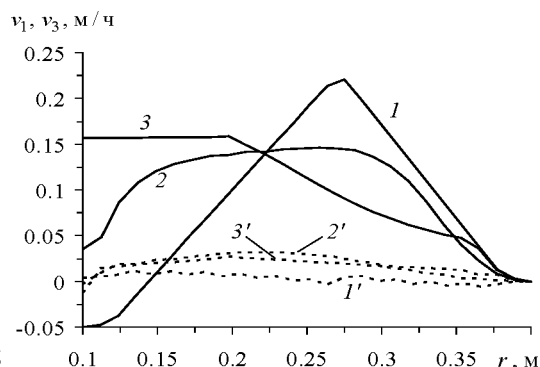


Рис. 5. Эюры скорости смещений точек срединной поверхности пологих оболочек из Si-U8A-композиции при ползучести для некоторых углов спирального

ванных по логарифмическим спиральям и работающих в условиях ползучести (см.

линию 1'' на рис. 2). Изменение структуры армирования приводит не только к изменению r_p , но и к качественному изменению эпюр скоростей течения точек тонкостенных конструкций. Так, на рис. 5 изображены кривые, качественно характеризующие скорости смещения точек срединной поверхности пологой оболочки из Cu-U8A-композиции в меридиональном (v_1 – штриховые линии с номерами 1', 2', 3') и нормальном (v_3 – сплошные линии с номерами 1, 2, 3) направлениях в условиях ползучести при разных углах спирального армирования: кривые 1, 1' рассчитаны при $\psi = 0$ (меридиональная структура, которой соответствует левая точка на кривой 2 рис. 2), линии 2, 2' – при $\psi = 3\pi/8$ (спирально-перекрестное армирование), кривые 3, 3' – при $\psi = \pi/2$ (окружное армирование, которому соответствует правая точка на линии 2 рис. 2). Сравнение кривых на рис. 5 позволяет проследить за качественным изменением эпюр скоростей прогибов v_3 и меридиональных (радиальных) смещений v_1 при ползучести в зависимости от изменения угла ψ армирования по логарифмическим спиральям. (Левый горизонтальный участок на кривой 3 рис. 5 свидетельствует о том, что при $\psi = \pi/2$ часть оболочки, примыкающая к крышке, закрывающей плюсное отверстие, остается абсолютно жесткой, а течение развивается лишь в некоторой окрестности ($r_p < r \leq r_1$, $r_p \approx 0,2$ м) внешней кромки рассматриваемой пологой оболочки.)

Таким образом, проведенные в настоящей работе исследования позволяют заключить, что уровни предельно допустимого нагружения кольцевых (в плане) пологих оболочек в условиях ползучести существенно (вдвое и более) ниже уровней предельных нагрузок, при которых происходит переход в пластическое состояние всех фаз композиции пластины. Из всех рассмотренных структур армирования наибольшую несущую способность таким конструкциям обеспечивает армирование по радиально-окружным направлениям с постоянной суммарной плотностью армирования.

З а м е ч а н и е 2. Наиболее известные и распространенные на сегодняшний день теории ползучести металлов [5, 12] не учитывают такого явления, как разносопротивляемость материалов растяжению – сжатию в условиях ползучести, которое наблюдается в экспериментах для целого ряда металлов [13, 14 и др.]. В рамках использованной в настоящем исследовании жестко-ползучей схемы это явление может быть легко учтено и использовано в расчетах. (Описание учета такой особенности поведения материалов на базе жесткопластической модели дано в [15], поэтому не будем здесь останавливаться на обсуждении этого вопроса.)

З а м е ч а н и е 3. В настоящем исследовании крышка оболочки предполагалась абсолютно жесткой. В действительности же следовало бы оценить и несущую способность крышки в предположении об абсолютной жесткости оболочки. Для круглых изотропных и металлокомпозитных пластин (каковой и предполагается крышка) это можно сделать методами, изложенными в [1], [7]. Изучение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00046-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин // Вестник ННГУ. Серия: Механика. – 2006. – Вып. 1 (7). – С. 123–133.

2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Влияние структуры армирования на предельную нагрузку металлокомпозитных оболочек вращения // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Якушева. Серия: Механика предельного состояния. – 2008. – № 1 (4). – С. 108 – 116.
3. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И. И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
4. Немировский Ю. В. Ползучесть однородных и композитных оболочек // Актуальные проблемы механики оболочек. Тр. междунар. конф., посвященной 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина. Казань 26–30 июня 2000 г. – Казань: Новое знание, 2000. – С. 42–49.
5. Качанов Л. М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. Немировский Ю. В. О времени эксплуатации цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Строительная механика корабля. – 1967. – Вып. 92. – С. 107–113.
7. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
8. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
9. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
10. Соснин О. В. О ползучести слабо упрочняющихся материалов при нестационарных температурно-силовых режимах // Проблемы прочности. – 1972. – № 1. – С. 74–77.
11. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.
12. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.
13. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – № 5. – С. 136–139.
14. Горев Б. В. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса с разрывными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. – Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973. – Вып. 14. – С. 44–51.
15. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 8. – С. 4–11.

АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АСФАЛЬТОБЕТОНА В УСЛОВИЯХ МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Гавриленко С.Л.

The analysis of deformation properties of asphalt concrete by results of fatigue tests for prismatic samples on a three-dot bend has been carried out. It has been shown that the elastic-plastic model allows us to describe mechanical behaviour of a material adequately.

Введение.

Трудности описания деформационно-прочностных свойств асфальтобетона обусловлены тем, что указанные дорожно-строительные материалы, помимо сложного (композиционного) строения, в процессе эксплуатации испытывают комплексное термомеханическое воздействие [1-4]. Для расчетного прогнозирования состояния и срока службы дорожного покрытия необходимо построение адекватных моделей асфальтобетона с использованием мезомеханического [5] либо макромеханического [3] подходов.

Целью настоящей работы является математическое описание деформирования асфальтобетона в условиях малоцикловых усталостных испытаний на трехточечный изгиб призматических образцов.

Методика исследования.

Для идентификации модели деформирования анализировались данные циклических испытаний асфальтобетона, выполненных по методике [6], с использованием образцов, изготовленных в БелдорНИИ. Нагружение стандартного призматического образца по схеме трехточечного изгиба производилось сферическим индентором на прецизионном стенде для механических испытаний Инстрон 5567. Циклическая нагрузка составляла 30% от усилия, соответствующего статической прочности образца. Длительность цикла составляла 1 с. Поскольку основной характеристикой при таких испытаниях является прогиб в центре образца, достаточно информативной является диаграмма «усилие (Н) – перемещение (мм)».

В соответствии с классификацией [7] асфальтобетоны представляют собой типичные функциональные композиционные материалы, в которых для сохранения структуры в процессе эксплуатации разработчиком закладываются особые физико-механические свойства вяжущего (на основе битума). Важность рассматриваемых материалов делает актуальным уточненное и вместе с тем удобное для прикладных расчетов описание диаграммы деформирования. В частности, в настоящей работе использована модель бимодульной упругости [4], согласно которой в качестве основных характеристик используется два модуля Юнга, коэффициент Пуассона можно принять согласно справочным данным $\nu = 0,17$. При выводе основных соотношений используется известный подход, описанный в [7,8]. В качестве обобщения модели бимодульной упругости применима упругопластическая модель с критерием пластичности по Мизесу с возможностью учета упрочнение и движение поверхности текучести в пространстве девиатора напряжений.

Методика определения характеристик асфальтового раствора.

В качестве модельной будем использовать одномерную постановку задачи о трехточечном изгибе с использованием гипотезы нормальных сечений [7]. В

качестве неизвестной рассматривается функция прогиба $v(x)$, для определения которой используется дифференциальное уравнение 4-го порядка [7]:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ},$$

где $q(x)$ – нормальная нагрузка, действующая вдоль оси симметрии OX бруса, E – модуль Юнга материала, J – момент инерции сечения призматического образца асфальтобетона (в данном случае он равен 218700 мм^4). Решением указанного дифференциального уравнения является следующая функция:

$$v(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \int \int \int \int \frac{q(x)}{EJ} dx.$$

Постоянные C_0 , C_1 и C_2 можно найти из 4-х уравнений, полученных из начальных и граничных условий. Граничные условия дают следующие два уравнения для нахождения произвольных констант:

$$v(0) = 0; \quad v(L) = 0.$$

Из условия симметрии функции прогиба, в условиях заданной распределенной нормальной нагрузки, симметричной относительно начала координат, можно использовать следующее уравнение для определения произвольных констант:

$$\frac{dv\left(\frac{L}{2}\right)}{dx} = 0.$$

Для 5-и параметров (4-х произвольных констант и неизвестного модуля Юнга) имеем 3 уравнения. Недостающие уравнения можно получить из двух экспериментальных точек. После несложных математических преобразований имеем следующее выражение для модуля Юнга (E):

$$E = \frac{1}{J} \frac{q_2^{\max} - q_1^{\max}}{v_2 - v_1} \left(\left(1 + \frac{L}{4}\right) \frac{L^4}{d^2 4!} - \frac{L^5}{2^6 d 5!} \right).$$

Здесь L – расстояние между опорами, d – полуширина пятна контакта, q_i^{\max} – максимальная нагрузка в i -ом испытании, J – момент инерции, v_i – значение прогиба в i -ом испытании.

Анализ имеющихся данных по усталостному разрушению асфальтового раствора.

При расчете область под индентором считается малодеформированной (квadrатами компонент градиента перемещений можно пренебречь) и можно воспользоваться допущениями линейной теории упругости [8]. Максимальная нагрузка под индентором зависит от пятна контакта индентора и материала образца. Учитывая линейность задачи она рассчитывалась из линейных соотношений (отсутствие контакта при нулевом усилии, максимальная при $P = 700 \text{ Н}$). Всего производилось 54 цикла нагружения и разгрузки. Пример отдельного цикла деформирования, аппроксимированного линейными отрезками, представлен на рис. 1.

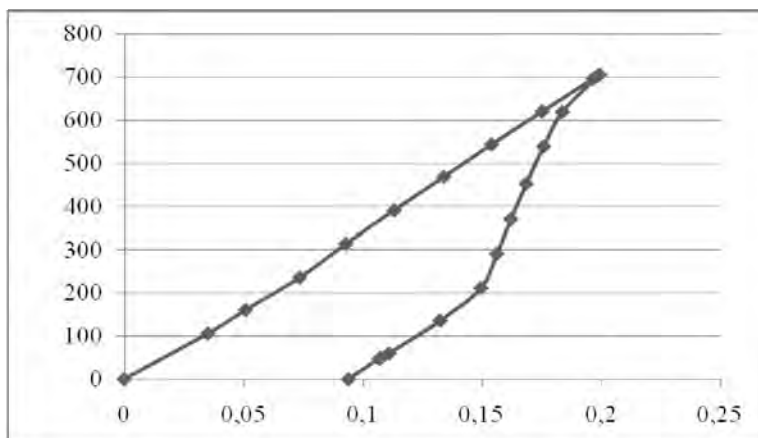


Рис. 1. Зависимость «Перемещение (мм) – усилие (Н)» в 1-ом цикле испытания с 54 циклами до разрушения.

Аналогичные данные для остальных выбранных циклов приведены на рис. 2, 3.

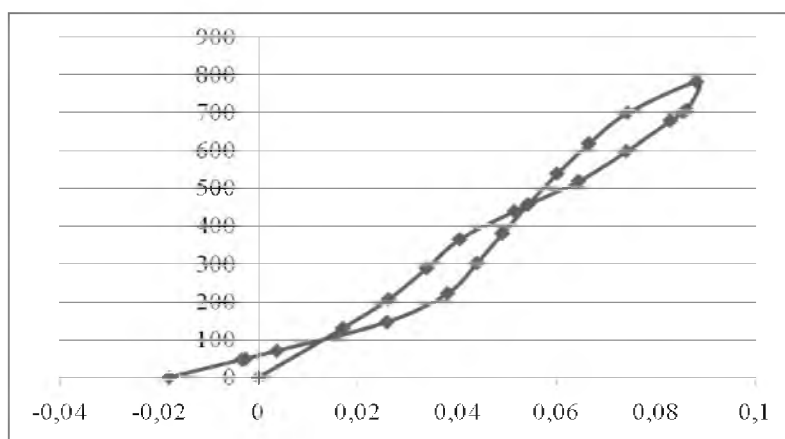


Рис. 2. Зависимость «Перемещение (мм) – усилие (Н)» в 27-ом цикле испытания.

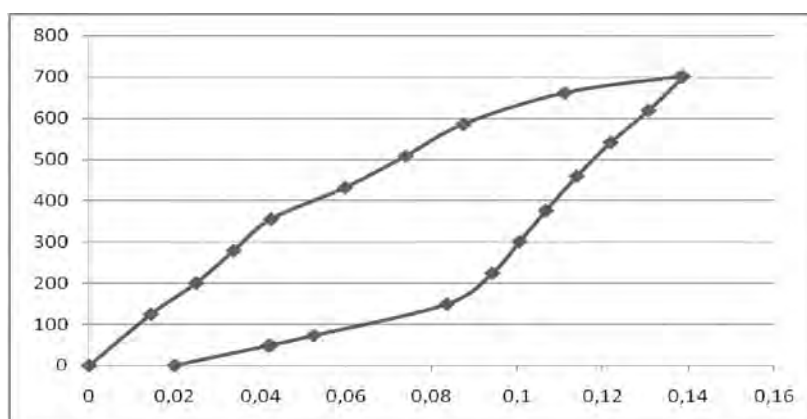


Рис. 3. Зависимость «Перемещение (мм) – усилие (Н)» в 54-ом цикле испытания.

Для расчета механических характеристик была написана программа в среде Mathcad 2001. Результаты расчетов представлены в таблицах 1-3. При расчете упругих модулей учитывалось то, что закон деформирования бруса линейно упругий, и прогиб с отрицательным знаком по модулю равен прогибу, полученному при нагрузке с противоположным знаком. Линейно упругий участок при расчете

может начинаться с ненулевого прогиба и с ненулевой силы и необходимо учитывать при расчетах.

Таблица 1.

Геометрические и механические характеристики 1-го цикла

№	$v_{нач}(x)$	$v(x)$	$P, Н$	$q_{max}, МПа$	$E, МПа$
1	0	0,035	106,0	1,93	528
2	0	0,051	160,1	2,92	528
3	0,051	0,113	390,3	4,21	578
4	0,051	0,175	619,3	8,41	578
5	0,175	0,168	351,8	4,90	731
6	0,175	0,150	211,0	6,44	731
7	0,150	0,133	135,7	1,37	540
8	0,150	0,108	49,6	2,95	540

Из приведенных таблиц следует, что значение относительного изменения прогиба уменьшается с ростом количества приложенных циклов. Максимальная нагрузка уменьшается, что вызвано увеличением ширины пятна контакта сферического индентора с материалом. Значения упругих модулей также уменьшается, что вызвано деградацией свойств рассматриваемого композита.

Таблица 2.

Геометрические и механические характеристики 27-го цикла

№	$v_{нач}(x)$	$v(x)$	$P, Н$	$q_{max}, МПа$	$E, МПа$
1	0	0,017	130,4	1,91	642
2	0	0,040	365,0	3,64	642
3	0,040	0,054	456,9	1,68	543
4	0,040	0,085	701,2	3,65	543
5	0,074	0,060	538,8	1,31	632
6	0,074	0,049	380,4	2,05	632
7	0,038	0,025	146,4	1,39	499
8	0,038	-0,002	49,5	2,79	499

Таблица 3.

Геометрические и механические характеристики 54-го цикла

№	$v_{нач}(x)$	$v(x)$	$P, Н$	$q_{max}, МПа$	$E, МПа$
1	0	0,025	200,2	3,66	489
2	0	0,043	355,0	4,69	489
3	0,043	0,074	507,8	2,79	461
4	0,043	0,111	661,1	4,99	461
5	0,138	0,122	540,9	3,46	683
6	0,138	0,094	224,0	5,7	683
7	0,083	0,052	72,3	1,40	367
8	0,083	0,042	49,0	1,83	367

Заключение.

Проанализированы деформационно-прочностные свойства асфальтобетона в условиях циклического трехточечного изгиба призматического образца. Установлено, что использование упругопластической модели деформирования позволяет адекватно описать деформационные характеристики асфальтобетона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веренько, В.А. Дорожные композитные материалы. Структура и механические свойства / В.А. Веренько. – Мн.: Наука и техника, 1993. – 246 с.
2. Малышев, А.А. Исследование влияния характеристик структуры на деформативность асфальтобетонного слоя / А.А. Малышев // Известия вузов. Строительство. – 2004. – № 6. – С. 74-78.
3. Богуславский, А.М. Основы реологии асфальтобетона / А.М. Богуславский, Л.А. Богуславский. – М.: Высшая школа, 1972. – 321 с.
4. Черноус Д.А., Шилько С.В., Кравченко С.Е. Мезомеханический подход к описанию деформационно-прочностных свойств асфальтобетона // Автомобильные дороги и мосты. – 2009. – Т. 3, № 1. – С. 49-55.
5. Шилько, С.В. Механика адаптивных композитов и биоматериалов / С.В. Шилько, Ю.М. Плескачевский // Материалы, технологии, инструмент. – 2003. – № 4. – С. 5–16.
6. Кравченко С.Е. О связи деградации структуры и гистерезисных потерь при циклическом нагружении асфальтобетона // Автомобильные дороги и мосты. – 2009. – Т. 3, № 2. – С. 5-9.
7. Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов. Элементарная теория и задачи. Т.1 / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1965. – 365 с.
8. Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов. Более сложные вопросы теории и задачи. Т.2 / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1965. – 480 с.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ С УЧЕТОМ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ УСИЛИЙ

Ермоченко С. А.

The goal of this study is to clear up the influence of the tangential strains at the strain-stress state of the rehabilitated tympanic membrane. The tangential displacement and rotation about longitudinal axis of the prosthesis base has been taken into account under simulation. The reconstructed tympanic membrane has being modeled as isotropic elastic annular plat. As a method for solving equations of isotropic plate, the analytic method has been chosen.

Введение.

Реконструкция колебательной системы среднего уха человека применяется в хирургической практике в случае повреждения некоторых компонентов среднего уха [1]. В оториноларингологии известны несколько техник реконструкции среднего уха, применяемых в зависимости от вида и степени патологии [2]. В некоторых случаях при повреждении тимпанальной мембраны используются следующие способы реконструкции [3]:

1. полная замена поврежденной тимпанальной мембраны на хрящевой имплантат;
2. наложение на поврежденную тимпанальную мембрану хрящевого имплантата.

Простейший случай полной замены тимпанальной мембраны хрящевым имплантатом ранее рассмотрен в работе [4]. Различные случаи наложения хрящевого имплантата на остатки поврежденной мембраны описаны в работах [5, 6]. Однако, в указанных работах применялась упрощенная модель, в которой не принимались во внимание тангенциальные силы, возникающие в деформированной пластине.

Механико-математическая модель тимпанальной мембраны

Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как тонкая (толщиной h) изотропная круглая пластина (с модулем упругости Юнга E и коэффициентом Пуассона ν). Радиус пластины a .

На пластину устанавливается круглое основание протеза b , которое прогибает пластину. Таким образом, пластина находится в напряженно-деформированном состоянии, а возникающие усилия позволяют удерживать введенный в полость среднего уха протез до его естественного срачивания с тканями имплантата. На контуре сопряжения пластины с основанием протеза примем условия жесткой заделки. На внешнем контуре соединения протеза с тимпанальным кольцом примем условия упругой заделки [7], при этом тимпанальное кольцо моделируется распределенными по всему контуру линейными и торсионными пружинами с модулями упругости k_l и k_t соответственно.

Для определения деформаций пластины введем систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была перпендикулярна плоскости пластины, т. O – центр пластины. Основание протеза, установленное в центр пластины, прогибает пластину, при этом центр основания протеза смещается в точку с координатами $(x_p; y_p; w_p)$. Кроме того, основание протеза совершает повороты относительно осей координат на углы $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ соответственно. Цель исследования – определить силы и моменты, действующие со стороны деформированной пластины на основание протеза при известных деформациях (т.е. при заданном смещении и поворотах основания протеза).

Рассмотрим цилиндрическую систему $Or\varphi z$ координат, связанную с введенной декартовой системой координат. Обозначим вектор смещения точки пластины в системе координат $Or\varphi z$ через u_1, u_2, w . Соотношения упругости рассмотрим в виде, приведенном в [8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_1}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + P_s = 0, \\ r \frac{\partial H}{\partial r} + 2H + r Q_2 + \frac{M_2}{\partial \varphi} = 0, \\ r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \\ r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где:

P_s – давление, возникающее в полости среднего уха в послеоперационный период [1];

$$M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_2 = D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$H = D \left(\frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1-\nu}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \text{моменты относительно осей координат};$$

$$T_1 = K \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u_1 + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right), \quad T_2 = K \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{r} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) - \text{мембранные усилия};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2} - \text{жесткость пластины}; \quad Q_1, Q_2 - \text{перерезывающие силы}.$$

Из первых двух уравнений системы можно выразить перерезывающие усилия следующим образом:

$$Q_1 = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2)$$

$$Q_2 = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right). \quad (3)$$

Тогда первое уравнение системы сводится к уравнению относительно нормального прогиба пластины w :

$$D \Delta^2 w = P_s, \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Используя выражения мембранных усилий через тангенциальные смещения u_1 и u_2 , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} r \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{r} u_1 + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-\nu}{2r} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{1-\nu}{2} r \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2r} u_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-\nu}{2r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза в случае жесткой заделки запишутся в виде:

$$w|_{r=b} = w_p + b \sin \theta_x \sin \varphi + b \sin \theta_y \cos \varphi; \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin \theta_x \sin \varphi + \sin \theta_y \cos \varphi; \quad (7)$$

$$u_1|_{r=b} = \frac{b}{2} (\cos \theta_x + \cos \theta_y + 2 \cos \theta_z - 4) + u_p \cos \varphi_p \cos \varphi + u_p \sin \varphi_p \sin \varphi + \frac{b}{2} (\cos \theta_y - \cos \theta_x) \cos 2\varphi; \quad (8)$$

$$u_2|_{r=b} = b \sin \theta_z + u_p \sin \varphi_p \cos \varphi - u_p \cos \varphi_p \sin \varphi + \frac{b}{2} (\cos \theta_x - \cos \theta_y) \sin 2\varphi; \quad (9)$$

где $u_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$, $\cos \varphi_p = x_p/u_p$, $\sin \varphi_p = y_p/u_p$.

На внешнем контуре в случае упругой заделки граничные условия запишутся в виде:

$$\left(k_t w + Q_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)_{r=a} = 0, \quad (10)$$

$$\left(k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1 \right)_{r=a} = 0, \quad (11)$$

$$u_1|_{r=a} = 0, \quad (12)$$

$$u_2|_{r=a} = 0, \quad (13)$$

Решение уравнений (4), (5) будем искать в виде разложений по тригонометрическим функциям на основании вида граничных условий (6)–(13):

$$w = w_0 + w_1^c \cos \varphi + w_1^s \sin \varphi, \quad (14)$$

$$u_1 = u_{1,0} + u_{1,1}^c \cos \varphi + u_{1,1}^s \sin \varphi + u_{1,2}^c \cos 2\varphi \quad (15)$$

$$u_2 = u_{2,0} + u_{2,1}^c \cos \varphi + u_{2,1}^s \sin \varphi + u_{2,2}^s \sin 2\varphi \quad (16)$$

Частные решения полученных уравнений имеют вид:

$$w_0 = A_{0,1} r^2 + A_{0,2} r^2 \ln r + A_{0,3} \ln r + A_{0,4} + \frac{P_s}{64D} r^4, \quad (17)$$

$$w_1^c = A_{1,1} r + A_{1,2} r \ln r + A_{1,3} r^3 + A_{1,4} \frac{1}{r}, \quad (18)$$

$$w_1^s = A_{1,5} r + A_{1,6} r \ln r + A_{1,7} r^3 + A_{1,8} \frac{1}{r}, \quad (19)$$

$$u_{1,0} = B_{0,1} r + B_{0,2} \frac{1}{r}, \quad u_{2,0} = B_{0,3} r + B_{0,4} \frac{1}{r}, \quad (20)$$

$$u_{1,1}^c = (1-3\nu)B_{1,1} r^2 + B_{1,2} \frac{1}{r^2} + B_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - B_{1,3} (1-\nu^2) - B_{1,4}, \quad (21)$$

$$u_{2,1}^s = (5+\nu)B_{1,1} r^2 + B_{1,2} \frac{1}{r^2} - B_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - 2B_{1,3} (1+\nu) + B_{1,4}, \quad (22)$$

$$u_{1,1}^s = (1-3\nu)B_{1,5} r^2 + B_{1,6} \frac{1}{r^2} + B_{1,7} (3-\nu)^2 \ln r - B_{1,7} (1-\nu^2) - B_{1,8}, \quad (23)$$

$$u_{2,1}^c = -(5+\nu)B_{1,5} r^2 - B_{1,6} \frac{1}{r^2} + B_{1,7} (3-\nu)^2 \ln r + 2B_{1,7} (1+\nu) - B_{1,8}, \quad (24)$$

$$u_{1,2}^c = -B_{2,1} r + B_{2,2} \frac{1}{r^3} - 2\nu B_{2,3} r^3 + 2B_{2,4} \frac{1}{r}, \quad (25)$$

$$u_{2,2}^s = B_{2,1} r + B_{2,2} \frac{1}{r^3} + (3+\nu)B_{2,3} r^3 - (1-\nu)B_{2,4} \frac{1}{r}, \quad (26)$$

где константы $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ определяются из граничных условий (6)–(13).

Полученные решения описывают деформацию реконструированной тимпанальной мембраны. На основании построенных решений выразим теперь силу $\mathbf{F}_{tm}(F_{tm}^x, F_{tm}^y, F_{tm}^z)$ и момент $\mathbf{M}_{tm}(M_{tm}^x, M_{tm}^y, M_{tm}^z)$, действующие со стороны пластины на основание протеза, которые характеризуют напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны, вызванное перемещением и поворотом основания протеза:

$$F_{tm}^x = \left(\int_0^{2\pi} r(T_1 \cos \varphi - S \sin \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (27)$$

$$F_{tm}^y = \left(\int_0^{2\pi} r(T_1 \sin \varphi + S \cos \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (28)$$

$$F_{tm}^z = \left(\int_0^{2\pi} rQ_1 d\varphi \right)_{r=b}, \quad (29)$$

$$M_{tm}^x = \left(\int_0^{2\pi} r(rQ_1 \sin \varphi + M_1 \cos \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (30)$$

$$M_{tm}^y = \left(\int_0^{2\pi} r(rQ_1 \cos \varphi - M_1 \sin \varphi) d\varphi \right)_{r=b}, \quad (31)$$

$$M_{tm}^z = \left(\int_0^{2\pi} r(rS + H) d\varphi \right)_{r=b}. \quad (32)$$

Результаты и численные расчеты.

Для дальнейшего исследования напряженно-деформированного состояния рассмотрим следующие параметры:

$F_n = |F_{tm}^z|$ – нормальная составляющая силы, действующей со стороны пластины на основание протеза;

$F_t = \sqrt{(F_{tm}^x)^2 + (F_{tm}^y)^2}$ – тангенциальная составляющая силы, действующей со стороны пластины на основание протеза;

$M_n = |M_{tm}^z|$ – момент, закручивающий основание протеза вокруг оси, перпендикулярной плоскости пластины;

$M_t = \sqrt{(M_{tm}^x)^2 + (M_{tm}^y)^2}$ – момент, закручивающий основание протеза вокруг оси, лежащей в плоскости пластины. Положение данной оси определяется углами θ_x , θ_y , и описывается уравнением: $x \cos \theta_x \sin \theta_y - y \sin \theta_x = 0$.

Исследуем зависимость рассмотренных параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние реконструированной тимпанальной мембраны, от вида деформации внутреннего контура. Из симметричности пластины следует, что только при нормальном прогибе пластины суммарный момент M_t равен нулю, также только при повороте основания протеза на некоторый угол силы равны нулю.

Таким образом, можно рассматривать введенные параметры как функции: $F_n(w_p)$, $F_t(u_p, \varphi_p)$, $M_n(\theta_z)$, $M_t(\theta_x, \theta_y)$. Кроме этого, так как F_t и M_t являются величинами соответствующих векторов, и направление действия этих векторов в данном случае является несущественным, можно рассматривать, например, $\varphi_p = 0$, $\theta_x = 0$, $\theta_y = \theta$. Таким образом, рассмотрим функции $F_n(w_p)$, $F_t(u_p)$, $M_n(\theta_z)$, $M_t(\theta)$.

Все вычисления производились при помощи пакета прикладных программ Maple при следующих числовых значениях параметров: $h = 0,3$ мм; $\nu = 0,4$; $E = 3,4$ Н/мм²; $a = 5$ мм; $k_l = 0,075$ Н/мм²; $k_t = 6,5 \times 10^{-5}$ Н; $b = 1$ мм.

Приведем графики зависимостей сил (рис. 1) и моментов (рис. 2) от перемещений и поворотов основания протеза при различных значениях толщины хрящевого имплантата:

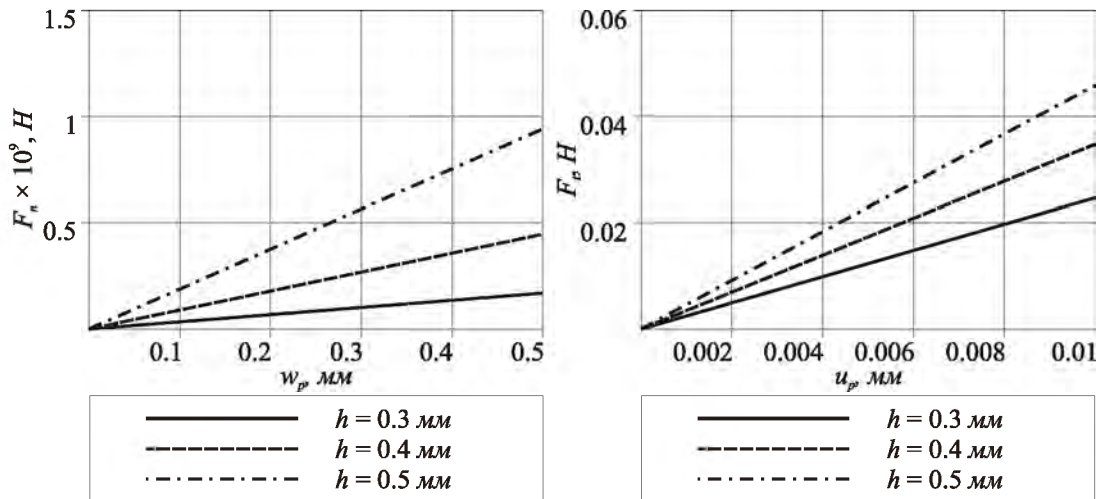


Рис. 1. Зависимость сил от смещения центра основания протеза.

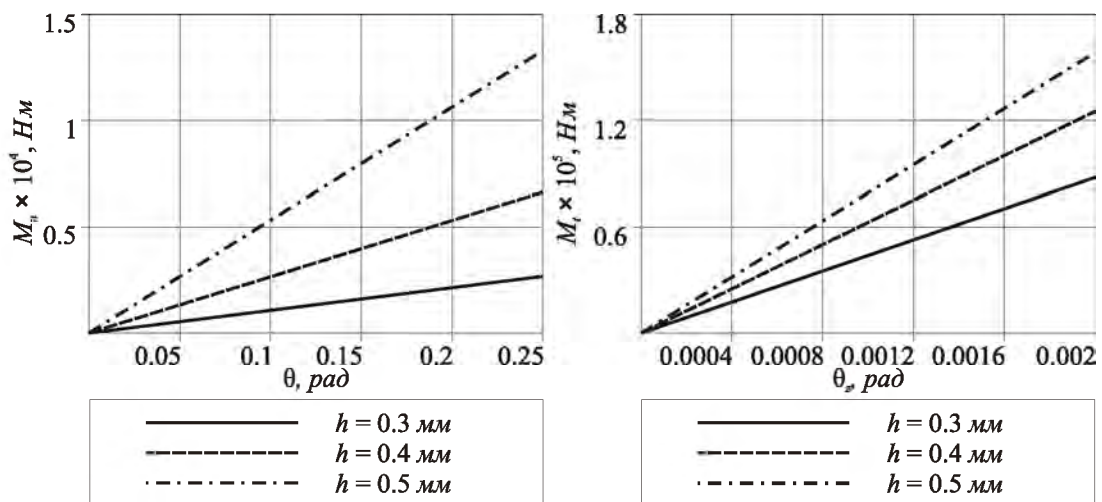


Рис. 2. Зависимость моментов от поворотов основания протеза.

Приведенные графики показывают степень зависимости напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны от толщины хрящевого имплантата. Анализируя полученные результаты можно сделать следующий вывод: тангенциальное перемещение и поворот на несколько порядков меньше нормальных перемещения и поворота при одинаковых усилиях и моментах, действующих в соответствующих направлениях. Однако, для использования упрощенной модели без учета тангенциальных перемещений и поворотов необходимо

дополнительное исследование силы трения, возникающей между хрящевым имплантатом и основанием протеза.

Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях характеристик реконструированного среднего уха.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hüttenbrink, K.-B.* Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. *Eiber, A.* On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer / A. Eiber, H.-G. Freitag, G. Schimanski, H. P. Zenner // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 297-308.
3. *Murbe, D.* Assessment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe, Th. Zahnert, M. Bornitz, K.-B. Hüttenbrink // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 321-329.
4. *Mikhasev, G.* Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Journal of Biomechanics: Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 July–4 August 2006. 2006, Vol. 39, Supplement 1. – P. S389.
5. *Ermochenko, S.* Finite Difference Method in Research of the Strain-Stress State of the Reconstructed Middle Ear / S. Ermochenko, G. Mikhasev // Proceedings of the Int. Conf. on Computational Biomechanics and Biology, Sept. 10–13, 2007, Plzen, Czech Republic, University of West Bohemia. – P. 101-103.
6. *Ермоченко, С.А.* Расчет напряженно-деформированного состояния тимпанальной мембраны в случае ее реконструкции по технологии “large island” / Международный научно-технический журнал Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Выпуск 24. – С. 93-100
7. *Koike, T.* Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309-320.
8. *Товстик, П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

**ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОМ СЛОЕ**

Гончарова С.В.

It was spent the research of the wave phenomenon in the thermoelastic layer by means of two operator functions.

Рассмотрим задачу о распространении плоской волны в неограниченном упругом слое толщиной $2h$. Волна движется вдоль слоя в положительном направлении x и является гармонической по времени. Мы имеем здесь дело с плоским деформированным состоянием. Волновое движение описывается при помощи двух функций Φ и Ψ , посредством формул [1]

$$u = \partial_1 \Phi - \partial_2 \Psi, \quad v = \partial_2 \Phi + \partial_1 \Psi \quad (1)$$

Напряжения связаны с функциями Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{G} &= (\gamma_2 \partial_2^2 + \gamma \partial_1^2) \Phi - 2 \partial_1 \partial_2 \Psi; \\ \frac{\sigma_{22}}{G} &= (\gamma_2 \partial_1^2 + \gamma \partial_2^2) \Phi + 2 \partial_1 \partial_2 \Psi; \\ \frac{\sigma_{12}}{G} &= 2 \partial_1 \partial_2 \Phi + (\partial_1^2 - \partial_2^2) \Psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$; $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2 = \gamma - 2$, ν - коэффициент Пуассона;

G - модуль поперечной упругости.

Волновые функции и температура должны удовлетворять уравнениям [1]:

$$(\Delta_1 \Delta_3 - \eta m \partial_t \Delta) \Phi = 0; \quad \Delta_2 \Psi = 0; \quad \theta = \frac{1}{m} \Delta_1 \Phi, \quad (3)$$

где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\Delta_\alpha = \Delta - \frac{1}{C_\alpha^2} \partial_t^2$, $\alpha = 1, 2$; $\Delta_3 = \Delta - \frac{1}{\kappa} \partial_t^2$, κ, n, m - термодинамические коэффициенты; C_1 и C_2 - скорости продольной и поперечной волн соответственно. Уравнение для функции Φ можно записать в виде:

$$(\Delta - D_1)(\Delta - D_2) \Phi = 0,$$

$$\text{где } D_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a}}{2} \partial_t, \quad D_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a}}{2} \partial_t; \quad b = \frac{1}{\kappa} + nm + \frac{1}{C_1^2} \partial_t, \quad a = \frac{4}{\kappa C_1^2} \partial_t. \quad (4)$$

Для симметричного типа колебаний, соответствующего растяжению-сжатию упругого слоя (задача А), волновые функции представим в виде:

$$\Phi = \left[\frac{A \cos(y\sqrt{\nabla_1})}{\sin(h\sqrt{\nabla_1})} + \frac{B \cos(y\sqrt{\nabla_2})}{\sin(h\sqrt{\nabla_2})} \right] f(x, t); \quad \Psi = \frac{C \sin(y\sqrt{\nabla_3})}{\cos(h\sqrt{\nabla_3})} f(x, t), \quad (6)$$

где $\nabla_1 = \partial_1^2 - D_1$; $\nabla_2 = \partial_1^2 - D_2$; $\nabla_3 = \partial_1^2 - \frac{1}{C_2^2} \partial_t^2$.

Считая поверхность слоя, на которой поддерживается постоянная температура, свободной от напряжений, приходим к граничным условиям вида:

$$\theta = T - T_0 = 0; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{для } y = \pm h \quad (7)$$

Используя краевые условия (7) и учитывая соотношения (2), (3) и (6), получаем систему трех операторных уравнений

$$\begin{aligned} & \left[A(\gamma_2 \partial_1^2 - \gamma \nabla_1) \operatorname{tg}(h\sqrt{\nabla_1}) + B(\gamma_2 \partial_1^2 - \gamma \nabla_2) \operatorname{tg}(h\sqrt{\nabla_2}) + 2C \partial_1 \sqrt{\nabla_3} \operatorname{tg}(h\sqrt{\nabla_3}) \right] * f(x, t) = 0 \\ & \left[-2\partial_1 \sqrt{\nabla_1} A - 2\partial_1 \sqrt{\nabla_2} B + (\partial_1^2 + \nabla_3) C \right] * f(x, t) = 0 \\ & \left[\left(\partial_1^2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 - \nabla_1 \right) A + \left(\partial_1^2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 - \nabla_2 \right) B \right] * f(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решим полученную систему, определяя неизвестные операторы из третьей и второй строк.

$$\begin{aligned} A &= - \left(\partial_1^2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 - \nabla_2 \right) = - \left(D_1 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 \right); \\ B &= \partial_1^2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 - \nabla_1 = D_2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2; \\ C &= \frac{2\partial_1}{\partial_1^2 + \nabla_3} \left[\left(D_1 - \frac{1}{C_1^2} \right) \sqrt{\nabla_2} - \left(D_2 - \frac{1}{C_1^2} \right) \sqrt{\nabla_1} \right]. \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений A , B и C в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(D_2 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 \right) (\gamma_2 \partial_1^2 - \gamma \nabla_2) \operatorname{tg}(h\sqrt{\nabla_2}) - \left(D_1 - \frac{1}{C_1^2} \partial_t^2 \right) (\gamma_2 \partial_1^2 - \gamma \nabla_1) \operatorname{tg}(h\sqrt{\nabla_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{4\partial_1^2 \sqrt{\nabla_3}}{\partial_1^2 + \nabla_3} \left[\sqrt{\nabla_2} \left(D_1 - \frac{1}{C_1^2} \right) - \sqrt{\nabla_1} \left(D_2 - \frac{1}{C_1^2} \right) \right] \right\} * f(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что стоящее в фигурных скобках выражение с точностью до множителя совпадает с определителем исходной системы.

Принимая в (9) $f(x, t) = \exp[i(\omega t - \alpha x)]$ и вводя математическое понятие оператора от функции, можно получить характеристическое трансцендентное уравнение для определения неизвестного коэффициента α , содержащего фазовую скорость волны.

Заметим, что значению $\eta = 0$ соответствует упругая волна, т.е. рассматриваемая задача является в этом случае классической задачей эластодинамики о распространении волн Лэмба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. // Изд-во "Мир", М.-1970 - 256 с.

**КОНЕЧНО - ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ В СИСТЕМЕ «ШТИФТ – КОРЕНЬ ЗУБА»
ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ.**

Белодед Л. В., Юркевич К. С., Босяков С. М.

In the present paper results of finite-element calculation stress-deformed conditions of the fang arising at action of concentrated loading on cylindrical or conic posts, introduced in a root are submitted. Calculations are carried out by the example of a canine for two types of contact between a post and a fabric of a fang.

Под термином корневой штифт в стоматологии понимается любой элемент, отлитый или промышленно изготовленный, завинченный или зафиксированный цементом, который помещается в корневом канале зуба. Применение корневых штифтов необходимо для укрепления и поддержки культи зуба путем прочного ее соединения с корнем. Вне зависимости от материала изготовления штифтов существуют общие биомеханические принципы и закономерности, которые учитываются практикующими стоматологами. Ключевыми моментами при применении корневых штифтов являются их форма, длина (глубина погружения в корень), диаметр, активность введения. Целью настоящей работы является численный анализ напряженно-деформированного состояния корня зуба с внедренным коническим или цилиндрическим штифтом, возникающего при действии на штифт сосредоточенной нагрузки.

Расчет полей напряжений выполнялся для корня клыка, форма которого представляла собой эллиптический параболоид. Полагалось, что в ходе протезирования коронка зуба спиливается до основания корня. Высота корня составляла 18 мм, большая и малая полуоси эллипса в основании параболоида равны соответственно 3,8 и 2,8 мм. Высота конических и цилиндрических штифтов принималась равной 12 мм. Конический штифт имел форму кругового параболоида с радиусом основания 1,3 мм. Радиус основания цилиндрического штифта также составлял 1,3 мм. Материал корня зуба характеризовался упругими постоянными дентина с модулем упругости $E = 14.7$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.31$ [1]. В качестве упругих постоянных для штифтовой вкладки использовались постоянные, характеризующие свойства стали: модуль упругости $E = 200$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Разработка трехмерной твердотельной параметризованной модели корня зуба и штифтовой вкладки выполнялась в CAD – системе Solid Works. Посредством формата *igs*, построенная модель импортировалась в конечно – элементный программный комплекс ANSYS Workbench. Дискретная модель получена путем разбиения геометрии на тетраэдры. Область контакта поверхностей корня и штифта покрывалась более густой конечно – элементной сеткой по сравнению с другими частями модели с целью получения более корректных результатов в интересующей нас области. Расчет напряженно-деформируемого состояния проводился для контактных случаев Bonded и Frictional. Контакт типа Bonded соответствует случаю склейки двух поверхностей и не допускает скольжения либо взаимного проникновения [2]. Моделирование с применением контакта типа Frictional склейки двух поверхностей осуществлялось с достаточно большим коэффициентом трения, что соответствует случаю проскальзывания поверхностей друг относительно друга. В нашем расчетном случае коэффициент трения принимался равным 0.95. Граничные условия соответствовали случаю жесткого закрепления внешней поверхности корня зуба. К штифту

прикладывалась вертикальная, горизонтальная и наклоненная под углом 45° к поверхности штифта сосредоточенная сила. Для всех случаев нагружения модуль силы составлял 100 Н.

В результате вычислительного эксперимента получены поля напряжений в корне зуба и штифтовой вкладке. В частности, на рис. 1 и 2 представлены распределения эквивалентных напряжений в корне зуба для трех типов нагрузок и различных видов контакта.

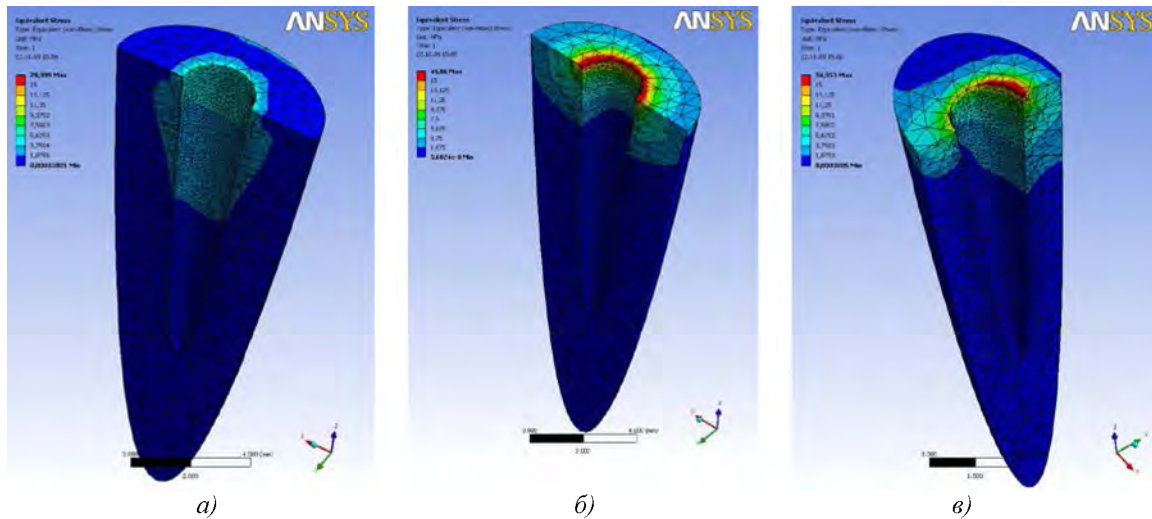


Рис. 1. Распределения напряжений в корне зуба, возникающих при действии на конический штифт вертикальной (а), горизонтальной (б) и наклонной (в) сосредоточенной силы для контакта типа Bonded

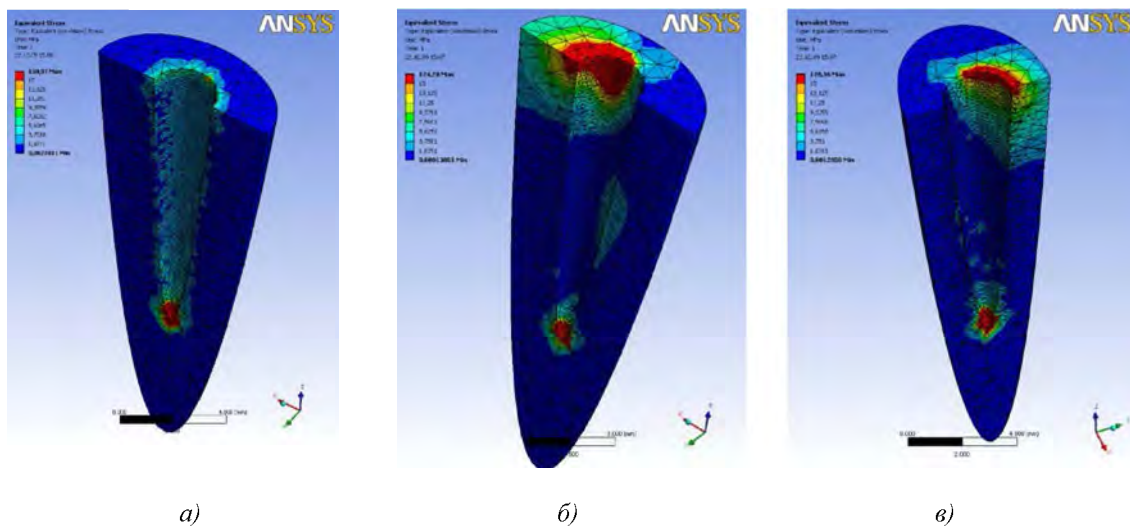


Рис. 2. Распределения напряжений в корне зуба, возникающих при действии на конический штифт вертикальной (а), горизонтальной (б) и наклонной (в) сосредоточенной силы для контакта типа Frictional

Представленные диаграммы эквивалентных напряжений для штифтовой вкладки в форме кругового параболоида позволяют сделать вывод о том, что при идеальной склейке концентратором напряжений является кромка корня. Максимальное значение напряжений (23,5 МПа) достигается в случае наклонной нагрузки. В случае контакта с трением зоной максимальных напряжений является нижняя область контакта штифта и корня зуба, причем такая закономерность просматривается

для всех типов нагружения. Максимальное напряжение величиной 87,5 МПа наблюдалось в случае горизонтальной нагрузки. Это обстоятельство указывает на то, что при критических нагрузках возможен разлом корня именно в этой области. В то же время следует учитывать напряжения, возникающие на кромке зуба при горизонтальной нагрузке и нагрузке под углом, которые также имеют большие значения. Эти зоны содержат опасные объемы, в которых возможно возникновение микротрещин и разрушение корня зуба. При этом теряется целостность конструкции, уменьшаются зоны сцеплений между штифтом и корнем зуба, что приводит к полному разрыву контакта.

Качественный анализ полей напряжений в корне зуба при использовании цилиндрической вкладки показывает, что при склейке с контактом первого типа распределение напряжений аналогично случаю, в котором использовалась коническая штифтовая вкладка. Результаты распределения напряжений в корне зуба представлены на рис. 3.

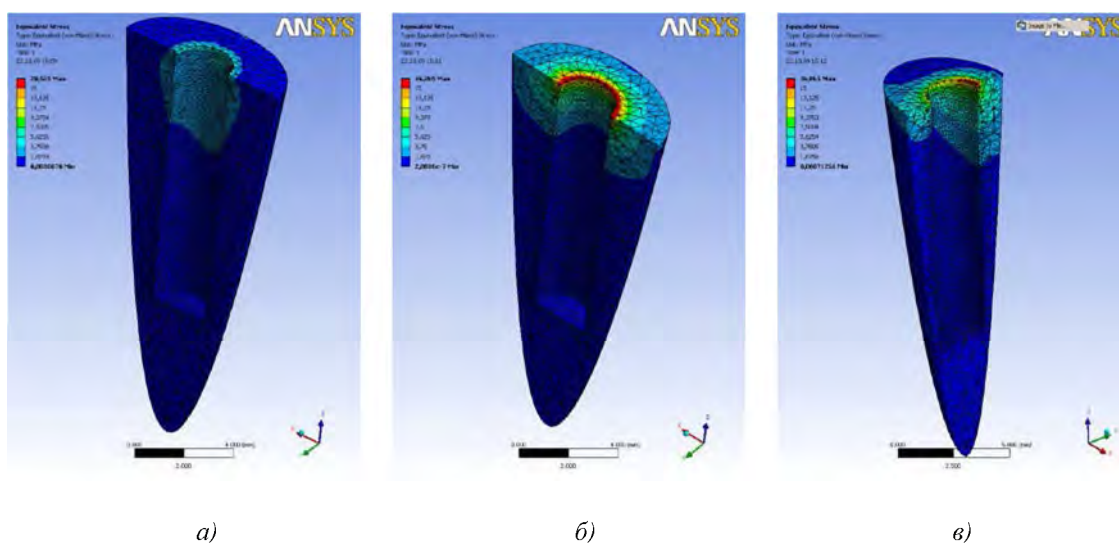


Рис. 3. Распределения напряжений в корне зуба, возникающих при действии на цилиндрический штифт вертикальной (а), горизонтальной (б) и наклонной (в) сосредоточенной силы для контакта типа Bonded

Максимальная величина эквивалентных напряжений (23,3 МПа) зафиксирована при горизонтальной нагрузке и практически совпадает со значением, полученным для конического штифта.

При использовании контакта с трением зоной максимальных напряжений является кромка корня. Соответствующие распределения напряжений показаны на рис. 4. В нижней части контакта штифта и корня, за счет увеличения контактной площади, не наблюдалось больших значений напряжений, как это было в случае с коническим штифтом. Наибольшее значение напряжений 40,2 МПа выявлено при наклонной нагрузке. Заметим, что во всех диаграммах зоны, обозначенные красным цветом, соответствуют областям, эквивалентные напряжения в которых превышают величину равную 15 МПа.

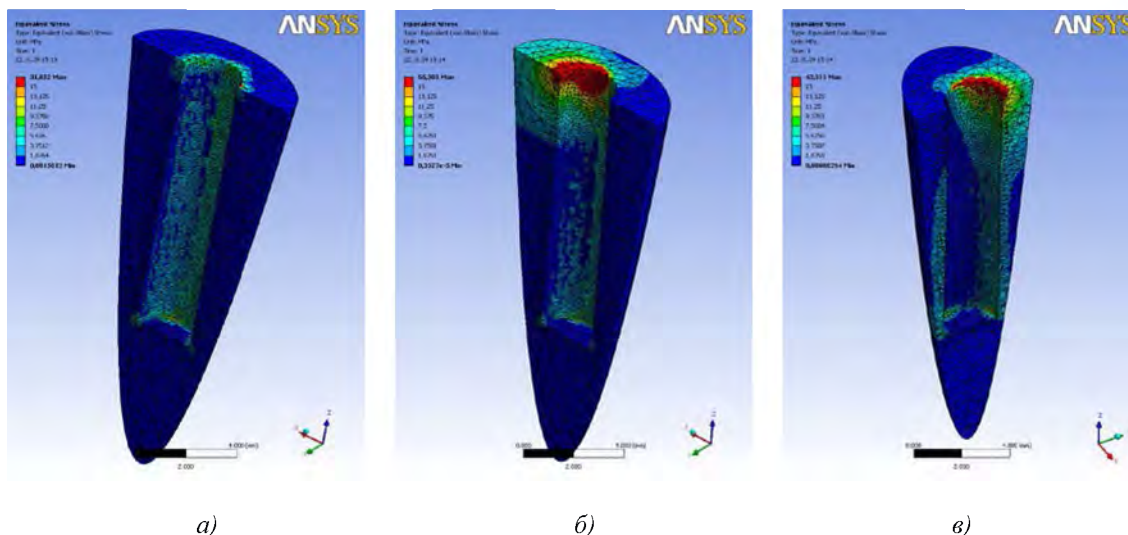


Рис. 4. Распределения напряжений в корне зуба, возникающих при действии на цилиндрический штифт вертикальной (а), горизонтальной (б) и наклонной (в) сосредоточенной силы для контакта типа *Frictional*

Следует отметить, что численные результаты для обоих типов штифтов являются практически идентичными в случае идеальной склейки. Тем не менее, при контакте с трением количественные и качественные результаты различны. Величины напряжений при использовании цилиндрической штифтовой вкладки уменьшаются вдвое. Кроме этого, отсутствует концентратор напряжений в нижней области контакта корня и цилиндрического штифта по сравнению с конической вкладкой. Данный факт указывает на уменьшение вероятности раскола корня зуба при использовании цилиндрического типа штифтов.

Полученные результаты подтверждают наиболее часто встречающиеся в практике случаи раскола корня зуба и отсоединения штифта от поверхности корня и могут быть использованы в ортопедической стоматологии при выборе оптимального типа штифтов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуйко А. Н., Вовк В. Е. Особенности биомеханики в стоматологии. – Харьков: Прапор, 2006. – 304 с.
2. ANSYS, Inc. Theory Reference. – Canonsburg, 2004. – 1067 p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПАР ТРЕНИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Авсиевич А.М., Реут Л.Е., Николаев В.А., Адаменко Д.В.

The features of parts surface tensions of rotary pair in leverage are considered. The methods of damage tension calculation are shown.

Функционирование вращательной пары в рычажном механизме обуславливает существенные особенности кинематики относительного перемещения звеньев по сравнению с абстрактным сопряжением «вал – втулка». Реакция между звеньями определяется при стандартном динамическом анализе как равнодействующая внешних сил, сил тяжести и инерционных нагрузок. В общем случае внешние силы и инерционные нагрузки переменны по величине и направлению, также и звенья изменяют свое положение относительно друг друга.

Эти факторы обуславливают переменность величины и направления результирующей внешних сил и, как следствие, приводят к изменению величины и направления реакции между ними. В результате имеет место взаимное обкатывание вала и втулки. Вращательная пара представляет собой сопряжение наружной и внутренней цилиндрических поверхностей с зазором. В таких условиях контакт поверхностей происходит в секторе, ограниченном углом контакта, величина которого согласно исследованиям [1] составляет при минимальном зазоре не более 100° . Поэтому в каждый момент времени усилие между звеньями воспринимается локальными участками, прилегающими к точке приложения реакции.

Проведя динамический анализ для множества положений механизма для каждого i -го элемента поверхности контакта можно определить зависимость контактного давления от обобщенной координаты механизма φ . Определив зависимости угловых перемещений звеньев пары от обобщенной координаты, далее, исключая параметр φ , для i -го элемента поверхности звена можно получить зависимость давления от углового пути трения. Каждый элемент поверхностей трения испытывает циклически изменяющиеся напряжения, причем однократная смена напряжений происходит от нуля до максимального сжатия. В таких условиях контактные напряжения между валом и втулкой определяются по формуле (2)

$$\sigma = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \times \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}} \quad (1)$$

где E_1 и E_2 – модуль Юнга материалов втулки и вала соответственно; R_1 и R_2 – радиус вала и внутренний радиус втулки соответственно; q – интенсивность распределенной нагрузки на длине контакта. Период воздействия определяют как $T = 2\pi/\omega$, где ω – угловая скорость вращения вала.

При этом опасной является не точка контакта, а точка, расположенная под контактным участком на глубине $0,4b$ (b – ширина площадки контакта), в которой главные нормальные напряжения принимают следующие значения:

$$\sigma_1 = -0,18\sigma \quad \sigma_2 = -0,288\sigma \quad \sigma_3 = -0,78\sigma \quad (3)$$

Эти напряжения изменяются циклически, многократно повторяясь в точках контакта через период времени T в течение всего процесса работы механизма. Такой цикл нагружения, для которого однократная смена напряжений происходит от нуля до максимального сжатия ($\sigma_{\max} = 0$ – растяжение и $\sigma_{\min} = \sigma < 0$ – сжатие), называется

знакопостоянным и пульсирующим (отнулевым). Характеристиками такого цикла являются /2/:

- коэффициент асимметрии $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -\infty$ ($-\infty \leq r \leq +\infty$);
- среднее напряжение цикла $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\min}}{2}$;
- амплитуда цикла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{|\sigma_{\min}|}{2}$;

Предел усталости (или предел выносливости) материала для рассматриваемого цикла обозначается $\sigma_r = \sigma_{-\infty}$, где значение $|\sigma_{\min}| = \sigma$ – наибольшее сжимающее напряжение – рассчитывается по формуле (1).

Сопротивление материалов действующим нагрузкам, систематически изменяющихся во времени, существенно отличается от сопротивления тех же материалов статическому действию нагрузок. Материал под действием циклически изменяющихся напряжений разрушается при более низких напряжениях, чем предел его прочности и даже предел текучести, и это связано с усталостью материала, которая проявляется в появлении и развитии усталостной трещины, приводящей в конечном итоге к разрушению детали.

Усталостная трещина представляет собой острый надрез, у дна которой создается объемное напряженное состояние, которое усугубляется уже существующим объемным напряженным состоянием под контактным участком с напряжениями, определяемыми по формулам (3). И именно объемный характер напряженного состояния обуславливает хрупкий, без остаточных деформаций, характер разрушения при циклических нагрузках. При этом усталостное разрушение не зависит от закона изменения напряжений внутри цикла и от частоты изменения напряжений, а определяется только значением наибольшего сжимающего напряжения (1).

Расчеты на усталостную прочность при циклических нагрузках сводятся к определению предела выносливости материала и установлению запаса его усталости при данных условиях эксплуатации детали. При этом условием усталостной прочности является /3/

$$\sigma_{\max}^{\text{Д}} \leq \frac{\sigma_{-\infty}}{n_r}, \quad (4)$$

где $\sigma_{\max}^{\text{Д}}$ – наибольшие рабочие напряжения в детали, равные контактным сжимающим напряжениям, определяемым по формуле (1);

$\sigma_{-\infty}$ – предел выносливости материала для данного пульсирующего цикла;

n_r – коэффициент запаса усталостной прочности.

Наиболее опасным с точки зрения усталостной прочности является симметричный цикл – повторно-переменное растяжение и сжатие – с коэффициентом асимметрии $r = -1$, и соответственно предел выносливости для данного цикла σ_{-1} имеет наименьшее значение для любого материала по сравнению с другими циклами. Именно этот цикл чаще всего воспроизводится экспериментально для определения значения σ_{-1} . Кроме того, на основании многочисленных опытных данных установлена зависимость между пределом выносливости σ_{-1} и пределом прочности σ_A материала, которая для деформаций растяжения-сжатия составляет $\sigma_{-1} = 0,28\sigma_B$.

Для определения предела выносливости материала для любого другого цикла, в том числе и для пульсирующего цикла с $\sigma_{-\infty}$, необходимо проводить отдельный эксперимент для конкретного материала с заданием конкретных условий работы и с соответствующим коэффициентом асимметрии.

Однако на основании многочисленных экспериментов и накопленных обширных опытных данных построены диаграммы, позволяющие проводить оценку усталостной прочности детали из конкретного материала для любого асимметричного цикла нагружения.

Таким графоаналитическим методом является диаграмма предельных амплитуд (диаграмма Хейга) [3], построенная в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ (рис.1). Пульсирующему циклу на этой диаграмме соответствует прямая OC , проведенная из начала координат под углом $\beta = 45^\circ$, так как согласно характеристикам отнулевого цикла, соответствующего условиям работы пары «втулка-вал»,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-r}{1+r} = 1.$$

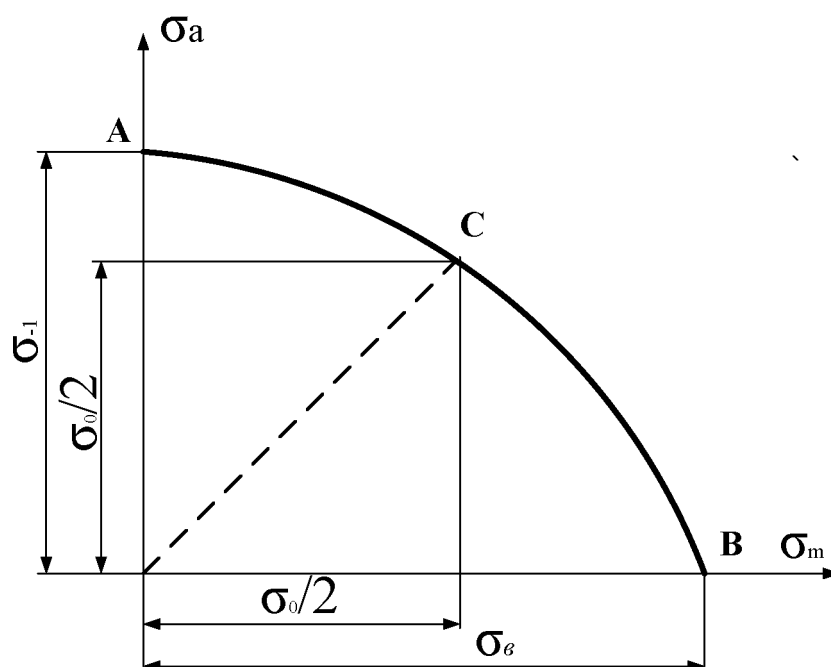


Рис. 1. Диаграмма предельных амплитуд (диаграмма Хейга)

Определив на основании формулы (1) значение максимального контактного напряжения детали $\sigma = \sigma_{\max}^D$ и рассчитав для этого значения величины $\sigma_a^D - \sigma_m^D$, исходя из диаграммы Хейга, можно установить: если точка с координатами значений $\sigma_a^D - \sigma_m^D$ лежит на луче OC ниже предельной кривой – данные рабочие напряжения являются безопасными в отношении усталостного разрушения. Точка C соответствует предельному состоянию данного цикла и предел выносливости в этом случае определяется как

$$\sigma_{-\infty} = \sigma_a^C + \sigma_m^C \quad (5)$$

При этом, коэффициент запаса усталостной прочности, с которым работает деталь, можно определить на основании формулы (4).

Однако для деталей, выполненных из пластичных материалов, кроме опасности усталостного разрушения присутствует опасность появления значительных пластических деформаций. Поэтому диаграмму следует разбить на четыре области (рис.2) и, подсчитав значение рабочих напряжений σ_{\max}^D по формуле (1), установить, в какую область они попадают.

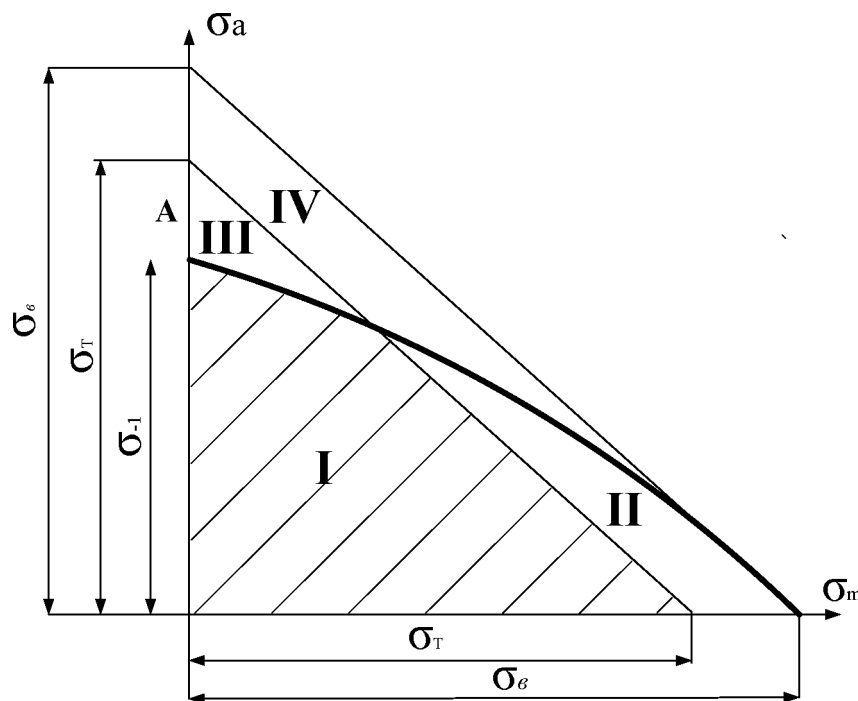


Рис. 2. Области напряжений по диаграмме Хейга

Область I – соответствует напряженному состоянию, при котором материал может работать неограниченно долго без разрушения от усталости и без появления пластических деформаций. Область II – соответствует появлению больших пластических деформаций (выше линии текучести), но без разрушения от усталости. Область III – соответствует разрушению от усталости (выше предельной кривой усталости), но без заметных пластических деформаций (ниже линии текучести). Область IV – соответствует появлению больших пластических деформаций с последующим разрушением от усталости.

При оценке усталостной прочности детали с использованием диаграммы Хейга следует помнить, что кривая построена на основании экспериментов, проведенных для стандартных образцов определенных размеров с правильной гладкой формой и хорошо обработанной поверхностью. Однако реальные детали конструкций отличаются по размерам и по обработке поверхности, они часто наделены концентраторами напряжений, что в значительной степени влияет на их усталостную прочность и снижает предел выносливости материала. Совокупность влияния всех факторов выражается в общем коэффициенте снижения предела выносливости материала K_{σ_D}

$$K_{\sigma_D} = K_{\sigma} \times \epsilon_M \times \epsilon_{II}, \quad (6)$$

где K_{σ} – эффективный коэффициент концентрации напряжений ($K_{\sigma} > 1$), зависит от формы концентратора и от механических свойств материала, определяется по формуле $K_{\sigma} = 1 + q(K_{\sigma}^T - 1)$, где $0 \leq q \leq 1$ – коэффициент чувствительности материала к

концентрации напряжений, зависящий от свойств материала; чем выше прочность стали, тем выше ее чувствительность к концентрации напряжений, поэтому применение высокопрочных сталей при переменных напряжениях не всегда целесообразно (для углеродистых сталей $q = 0,4 \div 0,8$); ϵ_M – масштабный фактор ($\epsilon_M > 1$) показывает, что с ростом размеров детали ее усталостная прочность снижается; ϵ_{II} – коэффициент качества поверхности ($\epsilon_{II} > 1$).

Вышеуказанные факторы, а также влияние коррозии, температуры, пауз и перегрузки значительно снижают предел выносливости реальной детали. А поэтому предел усталостной прочности реальной детали σ_r^D будет равен

$$\sigma_r^D = \frac{\sigma_r}{K_{\sigma_d}}. \quad (7)$$

Это обстоятельство следует учитывать при оценке усталостной прочности в реальных условиях работы деталей машин и механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круглыми границами. – Мн.: Технопринт, 2000. – 196 с.
2. Г.К. Татур. Общий курс сопротивления материалов. – Мн., «Вышэйшая школа», 1974. – 462 с.
3. Сопротивление материалов. Под ред. Г.С. Писаренко. – Киев, 1979. – 693 с.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И СИЛОВОЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА С ВХОДНЫМ ПОРШНЕМ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

The article is devoted to the features of the kinematic and power analysis of the mechanism which structure does not submit to Assur principle formation.

На рис. 1 представлена схема 6-звенного рычажного механизма, который используется в прессовой формовочной машине, применяемой в литейном производстве. Особенность этого механизма заключается в том, что заданным является относительное движение двух подвижных звеньев – поршня 2 и качающегося цилиндра 1 (относительная скорость V_{II} и ускорение a_{II}), а обобщенной координатой является переменное расстояние $l_{AB} = S$. В структурном отношении строение этого механизма не подчиняется принципу Ассур, согласно которому начальное звено механизма всегда образует кинематическую пару со стойкой.

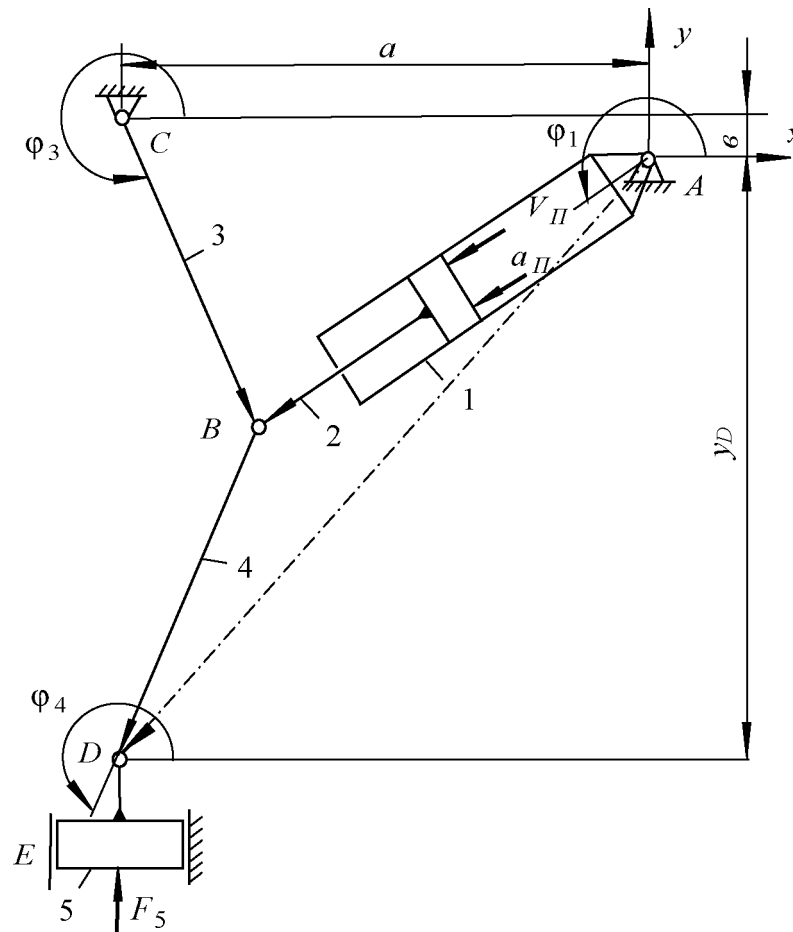


Рис. 1.

Определение кинематических характеристик группы звеньев 1, 2, 3 рассмотрено в работе [1]. Далее можно рассмотреть замкнутый контур $CBDC$ и применить к нему известную методику, например [2], используемую для кривошипно-ползунных механизмов, принимая в качестве обобщенной координаты угол поворота ϕ_3 звена

3. Однако можно решить задачи кинематики другим способом, не вводя вспомогательной координаты φ_3 . Для этого рассматриваем замкнутый контур $ABDA$, уравнение замкнутости которого в векторной форме имеет вид

$$\bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BD} - \bar{l}_{AD} = 0,$$

а в проекциях на оси координат X и Y

$$x_B + l_4 \cos \varphi_4 - x_D = 0, \quad (1)$$

$$y_B + l_4 \sin \varphi_4 - y_D = 0, \quad (2)$$

где $x_D = -a$. Из уравнения (1) определяется $\cos \varphi_4$, затем $\sin \varphi_4 = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_4}$, после чего однозначно находится угол φ_4 . Затем дважды дифференцируем уравнение (1) и (2) по обобщенной координате S и находим аналоги скоростей $\varphi_4' = \frac{d\varphi_4}{dS}$

и $y_D' = \frac{dy_D}{dS}$ и аналоги ускорений $\varphi_4'' = \frac{d^2\varphi_4}{dS^2}$, $y_D'' = \frac{d^2y_D}{dS^2}$ в следующем виде:

$$\varphi_4' = \frac{x_B'}{l_4 \sin \varphi_4};$$

$$y_D' = y_B' + l_4 \varphi_4' \cos \varphi_4;$$

$$\varphi_4'' = \frac{x_B'' - l_4 (\varphi_4')^2 \cos \varphi_4}{l_4 \sin \varphi_4};$$

$$y_D'' = y_B'' + l_4 \varphi_4'' \cos \varphi_4 - l_4 (\varphi_4')^2 \sin \varphi_4.$$

Значения x_B , y_B и производных x_B' , x_B'' , y_B' , y_B'' определяются при анализе кинематики звеньев 1, 2, 3.

По заданным V_{II} и a_{II} определяются скорости и ускорения звеньев и точек, в том числе центров масс звеньев, необходимые для выполнения силового расчета механизма. Например,

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \varphi_4' V_{II}, & V_D &= y_D' V_{II}, \\ \varepsilon_4 &= \varphi_4'' V_{II}^2 + \varphi_4' a_{II}, & a_D &= y_D'' V_{II}^2 + y_D' a_{II}. \end{aligned}$$

Кинестатический силовой анализ механизма начинается с исследования группы звеньев 4 и 5. Заданной является внешняя сила полезного сопротивления F_5 , приложенная к ползуну 5. Расчетная схема этой группы звеньев показана на рис. 2, а. Для определения реакций в кинематических парах R_{43} , R_{50} , R_{45} может быть применена методика [2]. Силы инерции и моменты сил инерции для всех звеньев найдутся известным способом.

Далее рассматриваем звено 3 (рис. 2, б) и группу звеньев 1 и 2 (рис. 2, в). Составляем уравнения моментов $\sum M_C = 0$ для звена 3 и $\sum M_A = 0$ для звеньев 1 и 2:

$$\begin{aligned} R_{34}^y (x_B - x_C) + R_{32}^y (x_B - x_C) + (F_{u3}^y - G_3)(x_{S3} - x_C) - \\ - R_{34}^x (y_B - y_C) - R_{32}^x (y_B - y_C) - \\ - F_{u3}^x (y_{S3} - y_C) + M_{u3} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

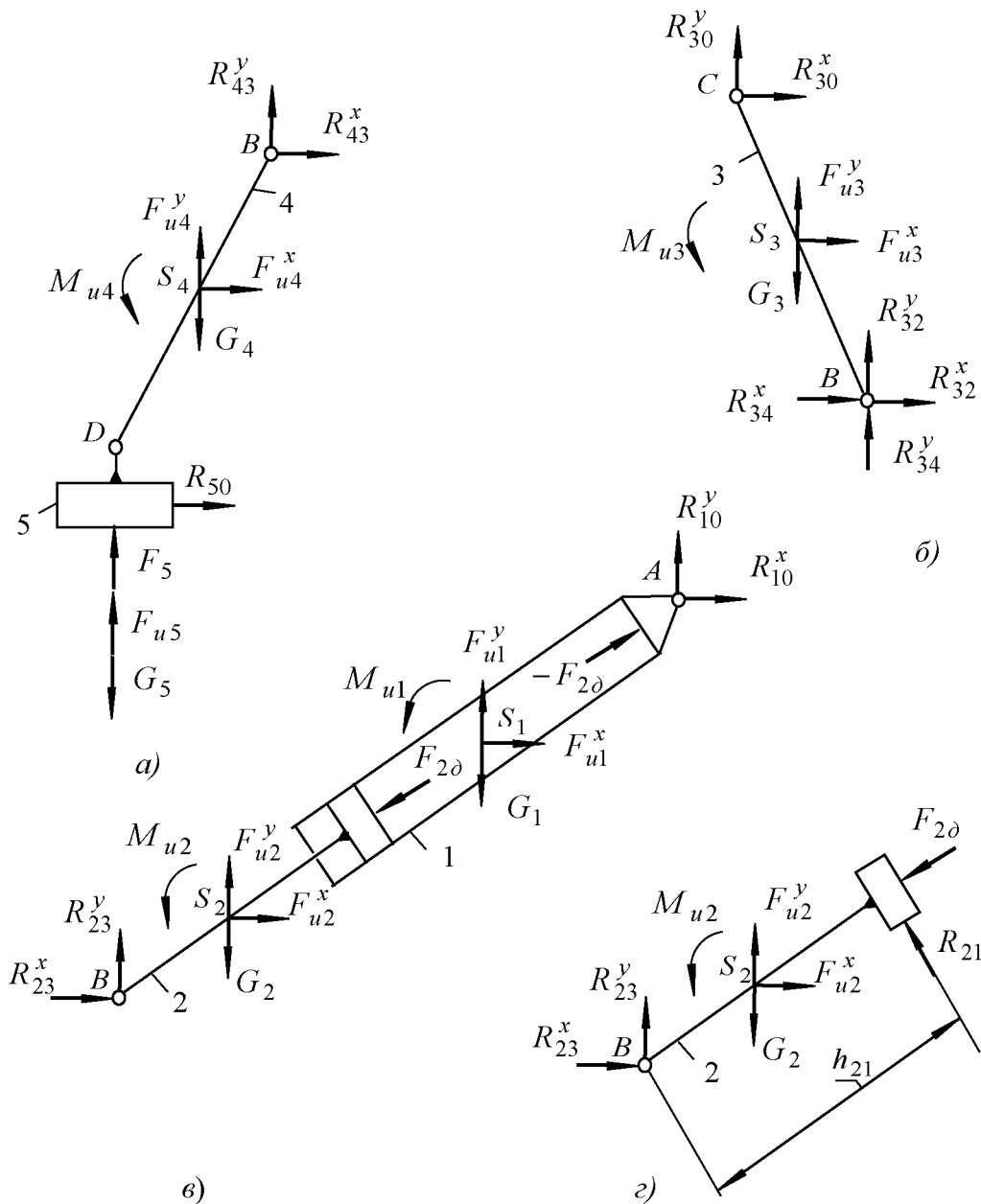


Рис. 2.

$$R_{23}^y x_B + (F_{u2}^y - G_2) x_{S2} + (F_{u1}^y - G_1) x_{S1} - R_{23}^x y_B - F_{u2}^x y_{S2} - F_{u1}^x y_{S1} + M_{u1} + M_{u2} = 0, \quad (4)$$

где $R_{23}^x = -R_{32}^x$, $R_{23}^y = -R_{32}^y$, $R_{34}^x = -R_{43}^x$, $R_{34}^y = -R_{43}^y$.

Из системы уравнений (3) и (4) определяем неизвестные компоненты R_{32}^x , R_{32}^y и полную реакцию $R_{32} = \sqrt{(R_{32}^x)^2 + (R_{32}^y)^2}$. Направление вектора \bar{R}_{32} определяется углом $\varphi_{R_{32}}$, который находится из соотношений

$$\cos \varphi_{R_{32}} = \frac{R_{32}^x}{R_{32}}, \quad \sin \varphi_{R_{32}} = \frac{R_{32}^y}{R_{32}}.$$

Реакция R_{30} в проекциях R_{30}^x и R_{30}^y определяется из уравнений $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$, составленных для звена 3:

$$F_{u3}^x + R_{32}^x + R_{34}^x + R_{30}^x = 0,$$

$$F_{u3}^y - G_3 + R_{32}^y + R_{34}^y + R_{30}^y = 0.$$

Реакция R_{10} в проекциях R_{10}^x и R_{10}^y определяется из уравнений $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$, составленных для звеньев 1 и 2 совместно:

$$R_{23}^x + F_{u1}^x + F_{u2}^x + R_{10}^x = 0,$$

$$R_{23}^y + F_{u1}^y - G_1 + F_{u2}^y - G_2 + R_{10}^y = 0.$$

Полные реакции R_{30} и R_{10} и их направления определяются так же, как это выполнено для реакции R_{32} .

В заключение рассматривается звено 2 (рис. 2 г), для которого составляем уравнения проекций сил $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$:

$$R_{23}^x + F_{u2}^x + R_{21} \cos(\varphi_1 - 90^\circ) + F_{2\partial} \cos \varphi_1 = 0, \quad (5)$$

$$R_{23}^y + F_{u2}^y - G_2 + R_{21} \sin(\varphi_1 - 90^\circ) + F_{2\partial} \sin \varphi_1 = 0. \quad (6)$$

Из системы уравнений (5) и (6) определяются реакция R_{21} и движущая сила $F_{2\partial}$, действующая на поршень 2 и обеспечивающая принятый закон движения механизма (V_{II} и a_{II}).

Плечо h_{21} реакции R_{21} находится из уравнения

$$\sum M_B = (F_{u2}^y - G_1)(x_{S2} - x_B) - F_{u2}^x (y_{S2} - y_B) + R_{21} h_{21} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Анципорович, П.П. Кинематика рычажных механизмов с входным поршнем / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская // Машиностроение. – Минск, 2009. – Вып. 25.
2. Динамика машин и механизмов в установившемся режиме движения / П.П. Анципорович [и др.]. – 5-е изд. – Минск: БНТУ, 2008. – 42 с.
3. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механики машин / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2002. – 411 с.

**ПРИВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ К ОБЩЕИЗВЕСТНЫМ
ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ.**

Акимов В.А.

It was shown that the use of the operator method for definition of coefficient in orthogonal series reduces to notorious formulas.

Покажем теперь, что посредством преобразований операторный метод в ортогональных рядах сводится к общеизвестным интегральным формулам для определения коэффициентов исходных разложений.

Итак, для нечетной функции $\phi(z)$, являющейся «собственной» функцией оператора d_x^2 , для вещественных значений можно записать [1]:

$$\phi(\mu x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k \phi'(a_k)} \cdot \frac{\phi(\mu)}{1 - \mu^2 / a_k^2} \phi(a_k x) \quad (1)$$

Известно, что при $a \leq x \leq b$ этот ряд сходится равномерно. Пусть, кроме того, $\phi(z)$ удовлетворяет условиям обобщенной ортогональности:

$$\int_a^b q(x) \phi(a_k x) \phi(a_p x) dx = \begin{cases} M(a_k) \cdot p \text{ Ц } k = p \\ 0 \cdot p \text{ Ц } k \neq p \end{cases} \quad (2)$$

где $q(x)$ некоторая «весовая» функция.

Умножая (1) на $q(x) \phi(a_k x)$ и интегрируя в пределах (a, b) найдем [1]:

$$-\frac{a_k \phi'(a_k)}{2M(a_k)} \int_a^b q(x) \phi(\mu x) \phi(a_p x) dx = \frac{\phi(\mu)}{1 - \mu^2 / a_k^2} \quad (3)$$

а разлагая справа и слева по степеням μ :

$$\begin{aligned} & -\frac{a_k \phi'(a_k)}{2M(a_k)} \cdot \frac{\phi^{(2r+1)}(0)}{(2r+1)!} \int_a^b x^{2r+1} q(x) \phi(a_p x) dx = \\ & = \frac{1}{(2r+1)!} \left[\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \cdot \frac{\phi(\mu)}{1 - \mu^2 / a_k^2} \right]_{\mu=0} = \gamma_k^{(r)} \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, если $a_k = k$, то

$$\phi(\mu) = \mu \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{k^2} \right) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi}$$

Взяв $\phi(z) = \sin z$, найдем:

$$(-1)^{k-1} \cdot \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \mu x \sin kx dx = \frac{\sin \pi \mu}{\pi(1 - \mu^2 / k^2)}$$

так что

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(r)} &= (-1)^{k+r-1} \cdot \frac{k}{2\pi(2r+1)} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+1} \sin kx dx = \\ &= (-1)^{k+r} \cdot \frac{k^2}{2\pi(2r+2)} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+2} \cos kx dx \end{aligned} \quad (5)$$

Если $a_k = a_k^{(n)}$ положительные корни бесселевой функции $J_n(z)$ где n – вещественное число > -1 (при этом все корни a_k вещественны), то тогда

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\mu^2}{(a_k^{(n)})^2} \right] = \frac{2^n \Gamma(n+1) J_n(\mu)}{\mu^{n-1}}$$

где $\Gamma(n+1)$ - гамма функция от аргумента $n+1$ и

$$\begin{aligned} \mu^{1-n} \frac{2^n \Gamma(n+1) a_k^{(n)}}{J_{n+1}(a_k^{(n)})} \int_0^1 x J_n(\mu x) J_n(a_k^{(n)}) dx &= \frac{\varphi(\mu)}{B - \mu^2 / (a_k^{(n)})^2} \\ \gamma_k^{(r)} &= (-1)^r \frac{a_k^{(n)} \Gamma(n+1)}{J_{n+1}(a_k^{(n)}) 2^{2r} r! \Gamma(n+r+1)} \int_0^1 x^{n+2r+1} J_n(a_k^{(n)}) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь можно непосредственно установить требуемые соотношения.

1. Разложение в обыкновенный тригонометрический ряд Фурье. При этом

$$\begin{aligned} a_k &= K, \quad F_H(z) = \sin z, \quad F_r(z) = \cos z \\ F(z) &= F_H(z) + F_r(z) = \sin z + \cos z \end{aligned}$$

и

$$\varphi(\mu) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} \mu^{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} U_{2r+1} \mu^{2r+1}$$

Имеем

$$\frac{F(xz)}{\varphi(z)} = \pi \frac{\sin xz + \cos xz}{\sin \pi z}$$

что при $-\pi < x < \pi$ стремится к нулю равномерно с возрастанием круга C_n во всех его точках, кроме как в точках вещественной оси, где это отношение сохраняет конечную величину.

Тогда предел интеграла $J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(xz) dz}{(z-\mu)\varphi(z)}$ равен нулю, то ряды

$$T_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+1} \pi^{2r+1}, \quad T_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) \beta_{2r+2} \pi^{2r+1} \quad (7)$$

сходятся абсолютно. Подставляя в коэффициенты разложения исходной функции значения

$$\alpha_{2r} = \frac{(-1)^r}{(2r)!}, \quad \alpha_{2r+1} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}, \quad U_{2r+1} = \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r+1)!}$$

и пользуясь формулами (5), найдем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r} \frac{\pi^{2r+1}}{2r+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+1} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+1} \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ C_k &= \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+2} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+1} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \end{aligned} \quad (8)$$

причем порядок суммирования и интегрирования менять можно в силу сходимости рядов (7). Итак, получим известное разложение

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin kx + C_k \cos kx)$$

с коэффициентами (8).

2. Разложение в ряд Фурье-Бесселя.

Пусть теперь

$$\frac{F(x) + F(-x)}{2} = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^4} - \dots = F_r(x)$$

и требуется разложить функцию $f(x)$ в ряд вида

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(kx) \quad (9)$$

Приведенные выше формулы дают опять требуемое решение, справедливое при $-\pi < x < \pi$ и при условии, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+2} \frac{(2\pi)^{2r+2} [(r+1)!]^2}{(2r+1)!}$$

сходится абсолютно. Если воспользоваться, (5) и значением интеграла

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2r+1} \varphi d\varphi = \frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!}$$

то получим

$$A_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r} \pi^{2r} \frac{(2)^{2r} (r!)^2}{(2r+1)!} = \int_0^{2\pi} f(\pi \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = f(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U dU \int_0^{\pi/2} f'(U \sin \varphi) d\varphi dU$$

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U \cos kU dU \int_0^{\pi} f'(U \sin \varphi) d\varphi$$

Двойные интегралы дают обычную форму коэффициентов ряда Шлемильха (9).

Аналогично можно исследовать более общие разложения вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_n(kx)$$

где $J_n(kx)$ – Бесселева функция n-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт», 2003-101с.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ

Гончарова С.В.

In this article the distribution of waves in the elastic layer prisoner between planes $z = \pm h$ was under consideration.

Рассмотрим упругий слой толщиной $2h$, заключенный между плоскостями $z = \pm h$, свободными от напряжений. Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c . Плоская продольная волна распространяется в бесконечном пространстве со скоростью c_1 , поперечная волна – со скоростью c_2 . В упругом слое скорость волны будет отличной от c_1 и c_2 . Ограничение упругого пространства двумя плоскостями вызывает возмущения, влияющие на изменение фазовой скорости и напряженного состояния. ниже мы рассмотрим плоскую задачу: перемещения u и w будут независимыми от переменной y , а перемещение $v \equiv 0$.

Функцию $f(x, t)$, описывающую вынужденные колебания упругой среды представим в виде [1]

$$f(x, t) = c \exp[i(pt - fx)]$$

и подставим в ряды перемещений плоской задачи теории упругости [1].

Беря действительные части, получим

$$\begin{aligned} u &= Af \left(chzqsh^{-1}hq - \frac{2qS}{S^2 + f^2} chzSsh^{-1}hS \right) \sin(pt - fx) \\ w &= Aq \left(shzqsh^{-1}hq - \frac{2f^2}{S^2 + f^2} shzSsh^{-1}hS \right) \cos(pt - fx) \end{aligned} \quad (1)$$

где $q = \sqrt{f^2 - h^2}$, $S = \sqrt{f^2 - c^2}$, $p = \frac{P}{-1}$, $c = \frac{P}{c_2}$, $A = \frac{f^2 + S^2}{q} C$

$\frac{P}{2\pi}$ – частота, $\frac{2\pi}{f}$ – длина волны.

Условие $\sigma_{zz}(x, \pm h) = 0$ приводит к соотношению: $4Sf^2 cthhS = \frac{(f^2 + S^2)^2}{q} cthhq$ которое можно переписать в виде

$$\frac{thh\beta}{thhz} = \frac{4f^2 z\beta}{(f^2 + S^2)^2} \quad (2)$$

где f равно 2π , поделенному на длину волны, а β и z – две функции, определяемые уравнениями

$$\beta^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right), z^2 = f^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \quad (3)$$

Здесь $c = \frac{P}{f}$ – фазовая скорость волны, а c_1 и c_2 , как и ранее, скорости волн расширения и волн искажения в безграничной среде.

Надо заметить, что при $c > c_2$ величина β становится чисто мнимой, и если ее положить равной $i\beta_f$, то (4.44) можно переписать в виде

$$\frac{th(h\beta_r)}{th(hz)} = \frac{4f^2 z \beta}{(f^2 + \beta^2)^2}$$

Из (2) можно видеть, что если длина волны велика по сравнению с h , то βh и zh становятся малыми, так что гиперболические тангенсы можно заменить их аргументами, и (2) тогда дает

$$4fh2z^2 = (f^2 + \beta^2)^2$$

Подставляя сюда β^2 и z^2 из (3), получим $4f^4 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) = f^4 \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2$

откуда

$$c^2 = 4c_2^2 \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}$$

Но $c_1^2 = \frac{\gamma G}{\rho}$ и $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$, следовательно,

$$c^2 = \frac{4(\gamma-1)G}{\gamma\rho}, \quad c = 2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}} c_2 \quad (4)$$

что при $\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$ совпадает с результатом, полученным из элементарной теории

Если $\nu = \frac{1}{4}$ (то есть $\gamma = 3$), то $c_1^2 = 3c_2^2$ и тогда получим соотношение

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{3} c_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} c_2$$

Для очень коротких волн βh и zh становятся очень большими и их гиперболические тангенсы стремятся к единице, при этом уравнения (2) упрощаются:

$$(f^2 + \beta^2)^2 = 4f^2\beta z$$

Возводя в квадрат обе части и подставляя значения β и z из (3), получаем

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой характеристическое уравнение для поверхностных волн Рэлея [1].

Границу $z = h$ можно трактовать как границу упругого полупространства; периодическая волна по своему характеру приближается к поверхностной волне Рэлея.

Итак, плоские продольные волны в бесконечной пластинке могут распространяться со скоростью c , представленной формулой (4), когда длина волны Λ очень велика по сравнению с толщиной пластинки h , и со скоростью поверхностных волн Рэлея, когда длина волны очень мала в сравнении с толщиной. Для длин волн, сравненных с толщиной, имеет место дисперсия, скорость зависит от отношения длины волны к толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости- М. Издательство «Мир», 1975-672с.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОЙ ОСИ АВТОБУСОВ И АВТОМОБИЛЕЙ «МАЗ»

Гурвич Ю.А.

Complex of programs was developed for steerable axle parameters optimization. It consists of seven different programs intended to make a compromise between such output characteristics as stability, stabilization and safety motion, softness of motion, force at the driving wheel, tire attrition

Хорошо известно, что все задачи проектирования машин, их узлов и механизмов всегда многокритериальные и представляют собой задачи многокритериального синтеза. Однако, многие задачи проектирования машин и их узлов (например, задачи проектирования управляемых осей автомобилей, автобусов и всех колесных транспортных средств), несмотря на многокритериальность, до сих пор рассматриваются как однокритериальные. При этом оптимизируют лишь несколько параметров математического описания при каком-то одном фиксированном значении скорости машины, поочередно варьируя величину одного из параметров при неизменных значениях остальных. В расчетах, связанных с динамикой автомобиля, используют характеристики шин, полученные при статических испытаниях, и, в лучшем случае, – из экспериментальной зависимости «боковая сила от угла увода», несмотря на то, что должны использоваться динамические характеристики шин. В литературе отсутствуют адекватные практике критерии количественного определения устойчивости, безопасности, стабилизации движения машины (с учетом среднего времени реакции водителя) и т.д. Естественно, что все это не позволяет на стадии проектирования машин создать конструкцию с заранее заданными свойствами (выходными динамическими характеристиками или критериями: устойчивость, безопасность, стабилизация движения и плавность хода машины и т.д.), тем более во всем скоростном диапазоне движения машины. Поэтому до сих пор улучшать характеристики некоторых узлов автобусов и автомобилей «МАЗ» вынуждены не на стадии проектирования этих машин, а в процессе эксплуатации, путем проведения длительных и дорогостоящих экспериментов.

В последнее время для ускорения разработки и постановки на производство новых поколений высокоэффективных машин на колесном ходу, конструкторы стали успешно применять различные по сложности и объему расчетно-методические аппараты (РМА), которые с помощью ЭВМ еще на стадии проектирования помогают создавать машины с заранее заданными выходными характеристиками, соответствующими предъявляемым требованиям [1].

Все это послужило основанием для разработки новых методик и программ (нового РМА), позволяющих на стадии проектирования автобусов и автомобилей «МАЗ» исследовать их выходные характеристики. Разработка такого РМА осуществлялась в рамках Государственной научно-технической программы (ГНТП) «Машиностроение» по подпрограмме «Белавтотракторостроение» коллективом ученых: к.т.н., доцентами А.Ф. Андреевым, Ю.Е. Атамановым и другими [18].

Для оптимизации параметров управляемой оси разработан алгоритм и комплекс программ под общим интерфейсом, включающий 7 отдельных программ, реализующий компромисс между выходными характеристиками: устойчивостью, стабилизацией и безопасностью движения, плавностью хода, усилием на рулевом колесе, износом шин, исходя из двух разных критериев: нормы Гильберта и гипотезы усталостного износа. Для этого проведены исследования, начиная от формирования механико-математической модели управляемой оси до анализа влияния ее парамет-

ров на новые прикладные критерии колебательной и апериодической устойчивости, безопасности движения, стабилизации управляемых колес (с учетом среднего времени реакции водителя) во всем скоростном диапазоне движения машины [2,17,19]. С помощью комплекса программ на ЭВМ получены новые результаты и проведен их анализ.

Исследование по критерию «Устойчивость» движения управляемых колес.

Основное внимание в этой работе уделено новым критериям: плавности хода, усилию на рулевом колесе, износу шин, а также достижению компромисса между этими критериями и критерием «Устойчивость» движения, который в силу ряда причин является наиболее важным – «главным» критерием.

Очевидно, что если критерий «Устойчивость» движения машины будет «плохим», то у нее ухудшатся показатели устойчивости и безопасности движения, стабилизация управляемых колес будет недостаточной. Повышается утомляемость водителя, который все время будет пытаться исправлять траекторию движения. Управляемые колеса такого автомобиля при наезде на неровность будут возвращаться в нейтральное положение (если они вообще будут возвращаться!) очень медленно, другими словами автомобиль потеряет управляемость. Другое дело, когда критерий плавности хода и (или) износа шин (в зависимости от «ошибки» рулевой трапеции) будет недостаточно хорошим, при этом автомобиль не потеряет управляемости, будет совершать движение, но с чуть худшими выходными характеристиками.

Формализованное описание (система дифференциальных уравнений) движения, стабилизации управляемых колес во много раз информативнее – охватывает значительно большее число параметров и критериев, чем любое другое описание.

Следовательно, критерий «Устойчивость» является наиболее важным критерием, а исследования по этому критерию по праву расположены в статье на первом месте.

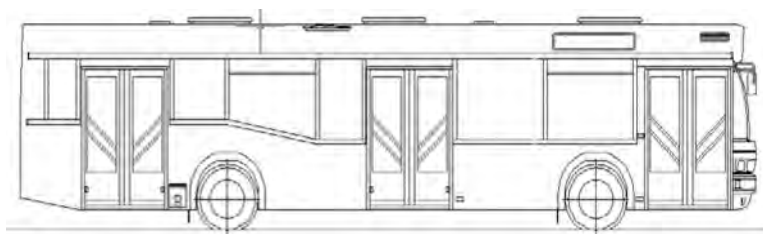


Рис. 1. Общий вид автобуса «МАЗ»

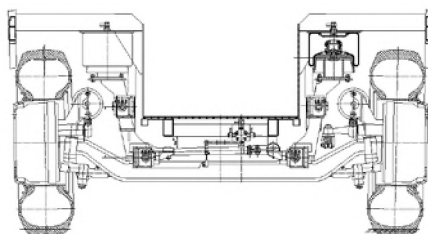


Рис. 2. Управляемая ось автобуса

Исследование по критерию «Устойчивость» проведено в два этапа:

На первом этапе реализовано решение и анализ системы дифференциальных уравнений движения управляемой оси автобуса.

Сначала из 9-ти степеней свободы, которыми обладает управляемая ось автобуса (рисунок 2), были обоснованно выбраны две степени свободы. Далее, используя аппарат аналитической механики и динамики неголономных систем, были выведены

дифференциальные уравнения движения и сформированы уравнения неголономных связей катящихся без скольжения управляемых колес. В результате получена система дифференциальных уравнений, описывающая малые колебания управляемой передней оси с элементами рулевого привода и подвески, колеса которой имеют две основные степени свободы.

На втором этапе реализованы некоторые теоретические и практические предположения к автоматизированному выбору параметров управляемой оси автобуса во всем скоростном диапазоне движения.

Программа «Устойчивость» (subroutine F2) позволяет варьировать от одного до всех параметров системы. Это сделано для определения влияния каждого параметра или совокупности параметров на критерий устойчивости.

Разработана методика, алгоритм и программа для ЭВМ многокритериального выбора параметров управляемой оси во всем скоростном диапазоне движения машины.

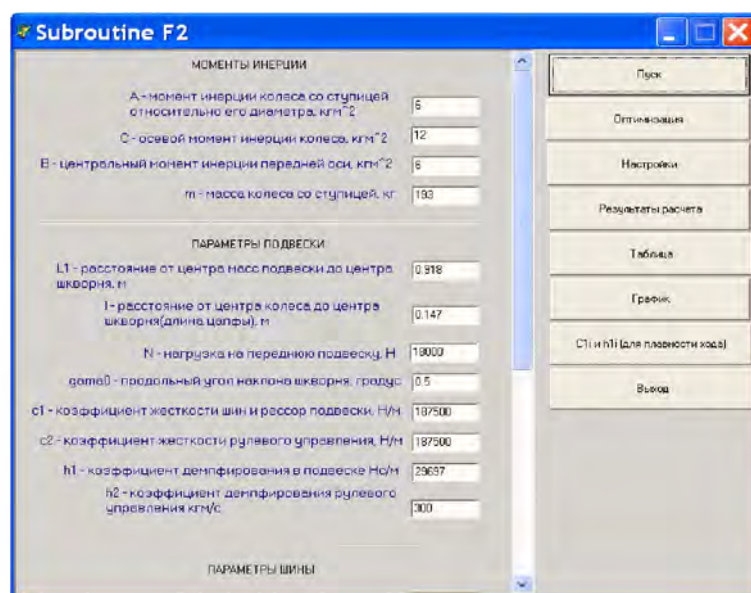


Рис. 3. Главная форма программы «Устойчивость»

№ Точки	Т.З.К.	V2=1.5.Tak	V3=2.Tak	V4=2.5.Tak	V5=3.Tak	V6=3.5.Tak	V7=4.Tak	V8=4.5.Tak	V9=5.Tak	V10=5.5.Tak	V11=6.Tak
1	0.41692	0.24224	0.2217	0.21668	0.22289	0.23947	0.26686	0.30718	0.36434	0.44478	0.55959
2	0.34019	0.27933	0.26472	0.15791	0.14996	0.14849	0.15225	0.16087	0.17477	0.1943	0.22043
3	0.19547	0.11788	0.09316	0.0759	0.06439	0.05766	0.0544	0.05248	0.05058	0.05298	0.06551
4	0.17828	555	555	555	555	555	555	555	555	555	555
5	555	0.35514	0.31762	0.299	0.2913	0.29051	0.29433	0.30112	0.30935	0.31799	0.32581
6	555	0.44563	0.43589	0.44698	0.47344	0.51334	0.56531	0.62747	0.69729	0.76967	0.8382
7	0.45486	0.28211	0.25117	0.24001	0.24452	0.26385	0.3006	0.36154	0.45254	0.64029	1.00588
8	0.15027	0.14614	0.11589	0.09666	555	0.05045	0.04765	0.04521	0.04436	0.04445	0.04538
9	0.32567	0.18045	0.14691	0.12744	0.11525	0.10742	0.10239	0.09921	0.09742	0.09649	0.09619
10	0.23653	0.23357	0.20216	0.14281	0.13909	0.14415	0.15889	0.19244	0.26288	0.43047	1.1142
11	0.20224	0.1908	0.15547	0.13257	0.09512	0.08775	0.08438	0.08581	0.09214	0.10393	0.12231
12	0.12409	555	555	555	0.06442	555	555	555	555	555	555
13	0.07707	0.06758	0.05875	0.05063	0.04387	0.03924	0.0369	0.03657	0.03671	0.03516	0.03344
14	555	0.32822	0.29123	0.27262	0.26426	0.26211	0.26382	0.26761	0.27212	0.27642	0.27964
15	555	555	555	0.12735	555	555	555	555	555	0.05662	0.05407
16	0.29898	0.16628	0.13917	0.12201	0.111	0.10407	0.09992	0.09769	0.09686	0.09704	0.0979
17	0.1363	0.16049	0.12548	0.10363	555	555	555	0.05143	0.04649	0.04729	0.04726

Рис. 4. Форма результатов расчета в виде таблицы колебательных движений управляемых колес

Минимум		Максимум
0,447	r	0,447
0,00069	Gamma0	0,00069
8	gamma	8
135430,50774	c1	135430,50774
27519,27893	c2	27519,27893
34079,77547	h1	34079,77547
840,88063	h2	840,88063
1	dv	1
53000	b	53000
90	al	90
19	bet	19
6	A	6
196,43375	m	196,43375
0,13828	l	0,13828
6	B	6
0,918	L1	0,918
18000	N	18000
0,6	si	0,6
0,2	ro	0,2
3	aa	3
0,1595	C	0,1595
0,0001	dt	0,0001

Количество точек: 55

Выполнить Отмена

Рис.5. Форма для задания параметров оптимизации

Вывод. Программа «Устойчивость, стабилизация, безопасность движения,...» (сокращенно «Устойчивость») обеспечивает многокритериальную оптимизацию параметров управляемой оси во всем скоростном диапазоне движения автобусов и автомобилей «МАЗ» по критериям: отсутствие автоколебаний управляемых колес, достаточной стабилизации и необходимой безопасности движения, учета среднего времени реакции водителя при колебательных и аперриодических движениях управляемых колес.

Исследование плавности хода автобуса.

В данной работе исследование плавности хода автобуса проводится с целью проверки соответствия характеристик подвески (жесткости передних упругих элементов и демпфирования в передней подвеске) выбранных по предлагаемым критериям: обеспечения устойчивости движения, управляемости, отсутствие колебания управляемых колес, санитарно – гигиеническим требованиям, требованиям к плавности хода по асфальтобетонной дороге во всем скоростном диапазоне.

Оценочные критерии плавности хода автобуса характеризуют воздействие колебаний на водителя и пассажиров. Допустимый уровень колебаний для организма человека ограничен. Он воспринимает колебания по-разному в зависимости от их частоты. В зоне низких частот восприятие колебаний пропорционально ускорениям, в зоне средних частот – скоростям, а в зоне высоких частот – перемещениям.

При исследовании влияния колебаний на человека различают следующие виды вибрации: общая, локальная и фоновая [3]. *Общая вибрация* – вибрация передающаяся через опорные поверхности на тело стоящего или сидящего человека. *Локальная вибрация* – вибрация, передающаяся через руки человека, воздействующая на ноги сидящего человека, контактирующие с вибрирующими поверхностями. *Фоновая вибрация* – вибрация, регистрируемая в точке измерения и не связанная с исследуемым источником. При проверке плавности хода автобуса нас интересует только общая вибрация.

Наиболее простым оценочным критерием плавности хода автомобиля может служить частота собственных колебаний кузова. Экспериментально установлено, что условием, хорошей плавности хода является совпадение собственных частот колебаний автомобиля со средней частотой шагов (60...90 в мин.) человека, что соответствует колебаниям с частотой 1...1,5 Гц.

Основными оценочными показателями плавности хода автомобиля являются уровни вибронегруженности водителя, пассажиров, грузов и характерных элементов шасси и кузова. Оценка уровня вибронегруженности производится по среднеквадратическим значениям ускорений колебаний (виброускорений) или скоростей колебаний (виброскоростей) в вертикальном и горизонтальном направлениях.

В санитарных правилах и нормах ощущения человека при колебаниях оцениваются по среднеквадратической величине ускорений колебаний, измеряемые в октавных полосах частот или их логарифмические уровни.

Для исследования плавности хода автобуса при движении по неровностям дороги используются различные расчетные схемы и описывающие их механико-математические модели: пространственные и плоские (в зависимости от задачи ис-

следования). Однако в практике исследования колебаний двухосных автомобилей наибольшее распространение получили плоские расчетные схемы: трехмассовые и двухмассовые, позволяющие получить достаточную для практики информацию о колебаниях поддресоренных и неподдресоренных масс, чтобы затем судить о плавности хода автомобиля [4... 8].

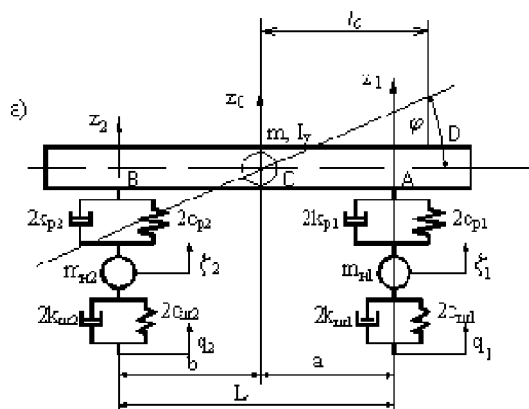


Рис. 6. Трехмассовая расчетная схема, применяемая при анализе плавности хода автомобилей (без учета водителя)

Было проведено сравнение результатов исследования колебаний поддресоренной и неподдресоренной массы передней и задней частей автобуса полученных на трехмассовой и двухмассовой механико-математических моделях.

Результаты расчетов перемещения поддресоренной массы передней части автобуса, ускорения поддресоренной массы передней части автобуса, перемещения неподдресоренной массы задней части автобуса, ускорения неподдресоренной массы задней части автобуса по различным механико-математическим моделям для некоторых параметров передней и задней частей автобуса полностью совпали (средняя ошибка составляет 0,0%).

Расхождение остальных результатов расчетов четырех наблюдаемых параметров по трехмассовой и двухмассовой моделям составило от 33% до 40%.

В результате, для проверки плавности хода автобуса с выбранными параметрами подвески, по критериям отсутствия колебаний управляемых колес, обеспечения устойчивости движения и управляемости нами использовалась трехмассовая механико-математическая модель, обладающая рядом преимуществ перед двухмассовой.

Анализ результатов исследования колебаний передней части кузова автобуса при различной жесткости передней подвески и постоянном демпфировании показал (рисунок 7), что с уменьшением жесткости упругих элементов передней подвески уменьшается амплитуда среднеквадратических ускорений и одновременно уменьшается резонансная частота как в области низкочастотного, так и в области высокочастотного резонанса.

Снижение жесткости передней подвески приводит к уменьшению амплитуды перемещений поддресоренной и неподдресоренных масс в области низкочастотного резонанса, причем его область смещается в сторону уменьшения резонансной частоты возмущения, как и ускорений.

В области высокочастотного резонанса максимальное значение среднеквадратических ускорений с увеличением жесткости подвески увеличивается не столь значительно, как при высокочастотном резонансе, причем область высокочастотного резонанса с увеличением жесткости передней подвески смещается в сторону возрастания резонансной частоты возмущения.

Снижение жесткости передней подвески автобуса сопровождается более быстрым возрастанием перемещений неподдресоренных масс в области высокочастотного резонанса. Следовательно, улучшается плавность хода, так как заметно снижаются среднеквадратические ускорения передней части автобуса, а также перемещения передней части кузова.

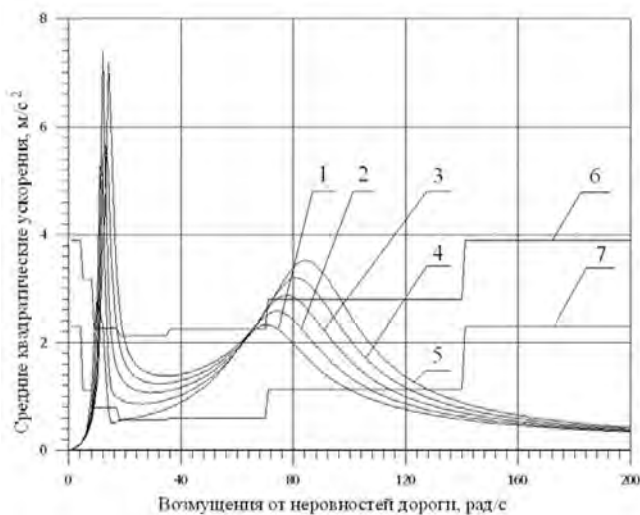


Рис. 7. Зависимость колебаний точки подрессоренной массы автобуса над передним мостом от жесткости передней подвески и постоянного демпфирования в подвеске; 1 - $c_p = 600000 \text{ Н/м}$; 2 - $c_p = 900000 \text{ Н/м}$; 3 - $c_p = 1200000 \text{ Н/м}$; 4 - $c_p = 1500000 \text{ Н/м}$; 5 - $c_p = 1800000 \text{ Н/м}$; 6 - нормативная кривая при 1 часе воздействия; 7 - нормативная кривая при 8 часовом воздействии; $k_D = 16000 \text{ Н.с/м}$

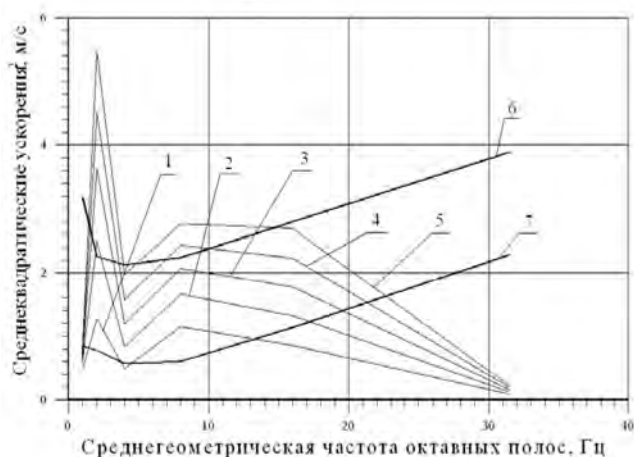


Рис. 8. Зависимость среднеквадратических ускорений точки подрессоренной массы автобуса над передним мостом в зависимости от возмущения при различной жесткости и постоянном демпфировании передней подвески; 1 - $c_p = 600000 \text{ Н/м}$; 2 - $c_p = 900000 \text{ Н/м}$; 3 - $c_p = 1200000 \text{ Н/м}$; 4 - $c_p = 1500000 \text{ Н/м}$; 5 - $c_p = 1800000 \text{ Н/м}$; 6 - нормативная кривая при 1 часе воздействия; 7 - нормативная кривая при 8 часовом воздействии; $k_D = 16000 \text{ Н.с/м}$

Однако снижение жесткости передней подвески неблагоприятно влияет на перемещение неподрессоренных масс в области высокочастотного резонанса, что может ухудшить устойчивость движения автобуса и его управляемость.

Таким образом, при короткой неровности равной 0,5 м автобус будет находиться в диапазоне частот возмущения 1...17 Гц 2,83 с, при движении по длинной неровности равной 2 м он будет находиться в неблагоприятном диапазоне частот возмущений 5,1 с, что вполне приемлемо для водителя.

Следовательно, время воздействия колебаний при резонансных частотах возмущения весьма кратковременно и не может сказаться на утомляемости водителя при 8 часовом рабочем дне и, тем более, при движении автобуса по маршруту в течение 1 часа.

Оценка плавности хода автобуса в соответствии с ГОСТ [9-10] и сравнение колебаний при различных параметрах передней подвески, полученные ранее результаты расчетов на рисунках 7 и 8, представлены в виде ломаных линий соединяющих точки, ординаты которых равны значениям среднеквадратических ускорений в октавных полосах, а абсциссы – среднегеометрическим частотам. На этих же графиках нанесены предельно допустимые ускорения при 8 часовом и 1 часовом воздействии.

Сопоставление расчетных среднеквадратических ускорений с допустимыми ускорениями, позволяет судить о плавности хода автобуса, а также установить наиболее неблагоприятные диапазоны частот колебаний.

Для сравнения колебаний точки подрессоренной массы автобуса над передним мостом при различных параметрах передней подвески определялись площади под расчетными и нормированными кривыми ускорений. Лучшим принимался вариант передней подвески, у которого площадь под кривой ускорений и отношения к пло-

цади под нормированными кривыми при 8 часовом и 1 часовом воздействии меньше.

Исследованиями установлено, что автобус «МАЗ» по критериям плавности хода отвечает требованиям международного стандарта ISO 2631 и санитарным правилам и нормам Республики Беларусь.

Совместное исследование устойчивости и плавности хода

Данная программа предназначена для исследования плавности хода автобуса и колебаний точки поддрессоренной массы над передней осью и неподдрессоренной массы передней оси на трехмассовой модели. Оценка плавности хода автобуса осуществляется по значениям среднеквадратических ускорений, полученных при различных величинах коэффициентов жесткости и демпфирования передней подвески, вычисленных по программе «Устойчивость», путем сравнения с нормативными значениями среднеквадратических ускорений при 8 часовом и 1 часе воздействия. Так осуществляется компромисс двух критериев.

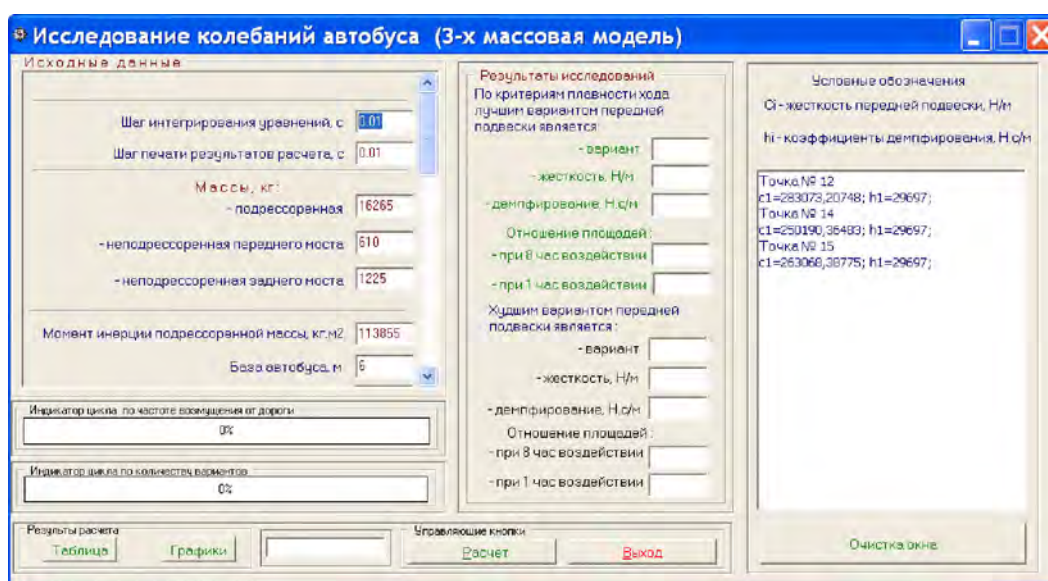


Рис.9. Главная форма программы определения характеристик плавности хода совместно с учетом критерия «Устойчивость»

Расчет оптимальных параметров рулевой трапеции для семейства автомобилей с разными базами.

Для автомобилей «МАЗ», имеющих отличающиеся друг от друга базы M_j (размер M_j в мм, а j – число баз машин) 3300, 3550, 3600, 3950, 4100, 4800, 4900, 5010, 5400 и т. д. используется только одна рулевая трапеция (причём параметры её не являются оптимальными, хотя бы для одной из баз M_j машины), что наверняка вызывает повышенный износ шин у некоторых машин из этого ряда (если не у каждой из машин!).

В связи с этим была поставлена задача: «Разработать новую методику многокритериальной оптимизации значений параметров такой рулевой трапеции, которая будет оптимальной для целого ряда машин, имеющих разные базы».

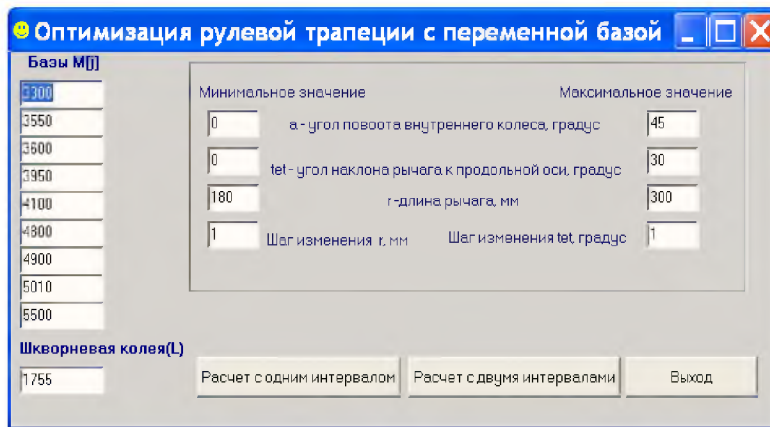


Рис.10. Главная форма программы оптимизации рулевой трапеции с переменной базой

Подчеркнём, что задача определения оптимальных параметров рулевой трапеции по критерию износа шин из однокритериальной задачи нелинейного программирования (при постоянных величинах шкворневой колеи L и базы машины M) переходит в многокритериальную задачу с числом критериев на число j большим, чем у однокритериальной задачи. Это резко усложнило решение задачи. Потребовался новый математический аппарат, в котором использовалось множество Парето и т. д.

Для реализации этой задачи выполнено следующее:

1. Разработана механико-математическая модель рулевой трапеции для машин с различными базами. Обоснован новый критерий оптимальности – норма Гильберта.
2. Разработаны методика, алгоритм и комплекс программ многокритериальной оптимизации параметров оптимальной рулевой трапеции для ряда машин с различными базами M_j (с одним или с двумя интервалами) [11].

В результате многокритериальной оптимизации параметров рулевой трапеции конструктору предлагается одна из точек Парето. Причем, каждой точке Парето соответствует своя совокупность геометрических (управляемых) параметров рулевой трапеции.

Pareto	номер	rast	krit	Tet	r	F1
1	1			0	180	158
2	1			1	180	138
3	2			2	180	122
4	3			3	180	107
5	4			4	180	941
5	5			5	180	816
7	6			6	180	702
8	7			7	180	596
9	8			8	180	500
10	9			9	180	420
11	10			10	180	342
12	11			11	180	277
13	12			12	180	216
14	13			13	180	158

Pareto	номер	rast	krit	Tet	r	F5.4
1	1			0	180	1104
2	1			1	180	956
3	2			2	180	822
4	3			3	180	701
5	4			4	180	592
5	5			5	180	494
7	6			6	180	406
8	7			7	180	328
9	8			8	180	260
10	9			9	180	201
11	10			10	180	150
12	11			11	180	107
13	12			12	180	72,7
14	13			13	180	45,6

Рис.11. Форма результатов расчета параметров рулевой трапеции с переменной базой разбитой на 2 интервала

Выводы.

1. Впервые разработана программа многокритериальной оптимизации значений параметров такой рулевой трапеции, которая будет оптимальной для целого ряда машин, имеющих разные базы.

2. Расчеты показали, что целесообразно разбить весь диапазон баз на два диапазона. В соответствии с этим придется выполнять два вида различных рулевых трапеций.

3. Теоретически, весь диапазон баз можно разбить на 3 диапазона, но при этом полученная выгода (по критерию износа шин), не соизмерима с затратами.

4. Расчеты показали, что точки Парето чувствительны к изменению угла наклона продольного рычага рулевой трапеции к продольной оси, но слабо чувствительны к длине продольного рычага.

Расчет оптимальных параметров рулевой трапеции для семейства автомобилей с разными базой и колесей.

Задача определения оптимальных параметров рулевой трапеции по критерию износа шин (который формализован в виде нормы Гильберта) из однокритериальной задачи нелинейного программирования (при постоянных величинах шкворневой колеи L и базы машины M) переходит в многокритериальную задачу с числом критериев в $i*j$ раз большим, чем у однокритериальной.

В отличие от предыдущей программы, где определена рациональная рулевая трапеция для целого ряда машин имеющих разные базы, сложность данной программы возрастёт в j раз. Это резко усложняет решение задачи.

Рис.12. Главная форма программы оптимизации рулевой трапеции с переменной базой и колеей

Парето	Номер	Расстояние	beta	r	5000<2000	5000<2500	5000<3000	6000<2000	6000<2500	6000<3000
*	46	166,01	15	300	7,221	51,967	172,853	28,872	9,023	56,921
*	39	165,265	15	280	7,031	53,928	175,978	26,888	9,39	58,608
*	32	172,967	15	260	6,925	55,917	179,108	25,012	9,802	60,312
*	25	176,201	15	240	6,899	57,931	182,242	23,24	10,256	62,033
*	18	179,861	15	220	6,85	59,97	185,379	21,569	10,751	63,769
*	11	183,604	15	200	7,075	62,033	188,519	19,994	11,286	65,52
*	4	187,448	15	180	7,271	64,118	191,662	18,513	11,86	67,286
*	5	271,702	20	180	74,266	10,378	32,693	167,117	50,347	9,363
*	12	285,644	20	200	79,499	11,205	31,004	175,079	53,62	9,894
*	19	300,207	20	220	85,01	12,16	29,374	183,366	57,053	10,507
*	26	315,416	20	240	90,816	13,246	27,804	191,993	60,649	11,206
*	33	331,294	20	260	96,927	14,469	26,298	200,973	64,415	11,992
*	40	347,966	20	280	103,357	15,833	24,859	210,322	68,356	12,869
*	47	365,161	20	300	110,121	17,344	23,486	220,054	72,479	13,84
*	45	662,527	10	300	100,772	279,219	506,032	32,454	129,447	279,23

Рис.13. Форма результатов расчета параметров рулевой трапеции с переменной базой и колеей

Потребовался новый математический аппарат во много раз более сложный, чем для ранее реализованных задач, в котором использован алгоритм многокритериальной оптимизации, базирующийся на выделении множества Парето при переменных M_i и L_j .

Для реализации этой задачи выполнено следующее:

1) Разработана механико-математическая модель рулевой трапеции для машин с различными базами и колеями. Обоснован критерий оптимальности – норма Гильберта.

2) Разработаны методика, алгоритм и комплекс программ многокритериальной оптимизации параметров оптимальной рулевой трапеции для ряда машин с различными базами M_j и колеями L_j [12].

Выводы.

1. Впервые разработана программа многокритериальной оптимизации значений параметров такой рулевой трапеции, которая является рациональной для целого ряда машин, имеющих разные базы M_i и колеи L_j .

2. Ряд численных экспериментов, проведенных с использованием реальных значений входных параметров (где база менялась от 3300мм до 5500мм) показал, что целесообразно проектировать несколько рулевых трапеций, каждая из которых будет соответствовать своему диапазону соотношений база-колея.

Метод определения сил, действующих на элементы рулевого управления.

Возрастающий объем автоперевозок требует большого внимания к безопасности движения. В обеспечении безопасности движения значительную роль выполняют стабилизирующие моменты на поворотных цапфах автомобиля, которые увеличиваются с уменьшением радиуса поворота и таким образом способствуют ощущению водителем дороги через рулевое управление. Устойчивое управление колесами возможно лишь тогда, когда стабилизирующие моменты при криволинейном движении способствуют установке рулевого управления в нейтральное положение.

Исходные данные

ПАРАМЕТРЫ РУЛЕВОЙ ТРАПЕЦИИ	
Расстояние между осями шкворней в плоскости рулевой трапеции, м	1.778
Длина рычага рулевой трапеции, м	0.388
Угол установки рычага рулевой трапеции, градус	11.22

ПАРАМЕТРЫ УСТАНОВКИ УПРАВЛЯЕМЫХ КОЛЕС	
Угол продольного наклона шкворня, градус	3
Угол поперечного наклона шкворня, градус	5
Угол развала управляемых колес, градус	1
Длина поворотной цапфы, м	0.147

ПАРАМЕТРЫ РУЛЕВОГО ПРИВОДА ОТ РУЛЕВОЙ ТРАПЕЦИИ К РУЛЕВОМУ КОЛЕСУ	
Расстояние между осями рычагов рычажного привода, м	
Первого четырехзвенника	0.851
Второго четырехзвенника	0.468
Длина рычагов рычажного привода, м	
Рычаг 1	0.247
Рычаг 2	0.425
Рычаг 3	0.349

Buttons: Расчет, Смена, Выход

Рис.14. Главная форма программы по расчету усилия на рулевом колесе

Однако усилие, прикладываемое к рулевому колесу для осуществления маневра не должно превышать нормированного значения. В соответствии с требованиями ОСТ 27.001.487-99 усилие, прикладываемое водителем к рулевому колесу, не должно превышать 220 Н при движении с исправным усилителем рулевого управления и 450 Н при неработающем усилителе.

На эксплуатационные качества рулевого управления влияют кинематические параметры рулевого механизма, рулевого привода, установочные параметры управляемых колес, схема привода ведущих колес и характеристики шины, связывающие кинематические параметры кругового движения автомобиля с силами на колесах. Выполнение требований к рулевому управлению определяют при проведении приемочных испытаний.

Чтобы при конструировании получить представление об ожидаемых качествах рулевого управления, целесообразно математическое исследование. Это исследование должно показать, в каком направлении можно достигнуть улучшения качеств рулевого управления.

Программа «Усилие на рулевом колесе» позволяет определить различные силовые характеристики при повороте автобуса в процессе движения и повороте рулевого колеса стоящего на месте автобуса. Для этого разработана новая методика, позволяющая еще на стадии проектирования машины с достаточной для практики точностью рассчитать усилие на рулевом колесе (без усилителя руля).

Основным механизмом рулевого привода является шарнирный четырехзвеной. Этот механизм используется в качестве рулевой трапеции в составе рулевого привода от рулевого механизма к рулевой трапеции (рис. 15).

Задача определения скоростей и передаточных отношений сводится к совместному решению уравнений проекций на оси координат контуров, образованных звеньями механизмов с последующим дифференцированием этих уравнений.

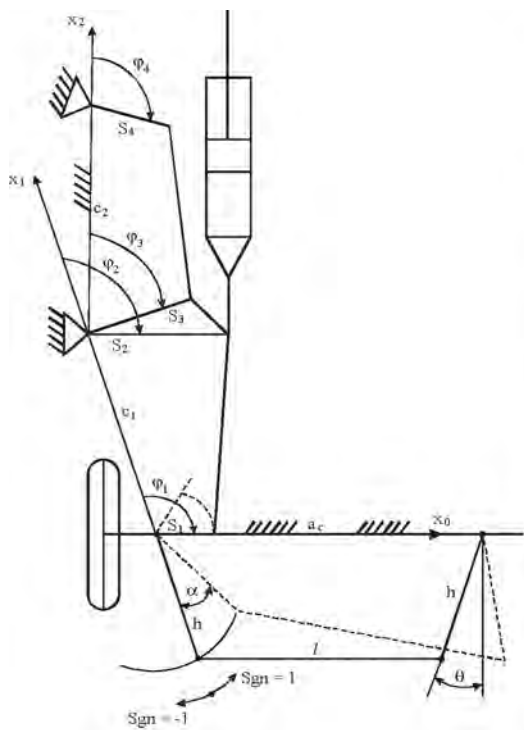


Рис.15. Кинематическая схема рулевого привода

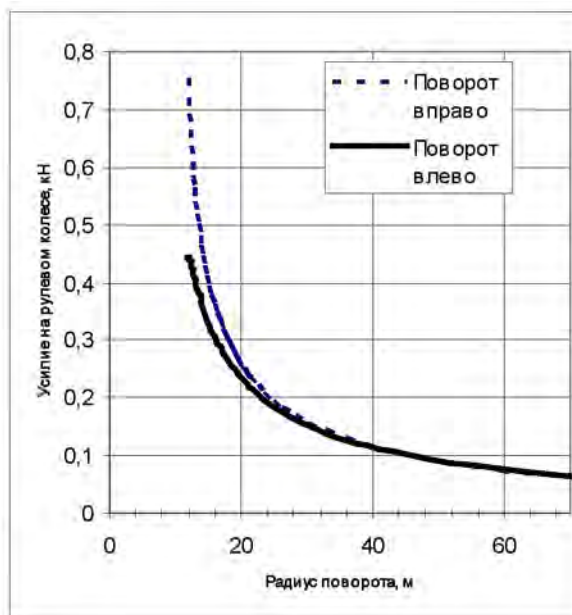


Рис.16. Зависимость усилия на рулевом колесе от радиуса горизонтальной проходимости автобуса «МАЗ» полной массой 18т при круговом движении со скоростью 10 км/ч

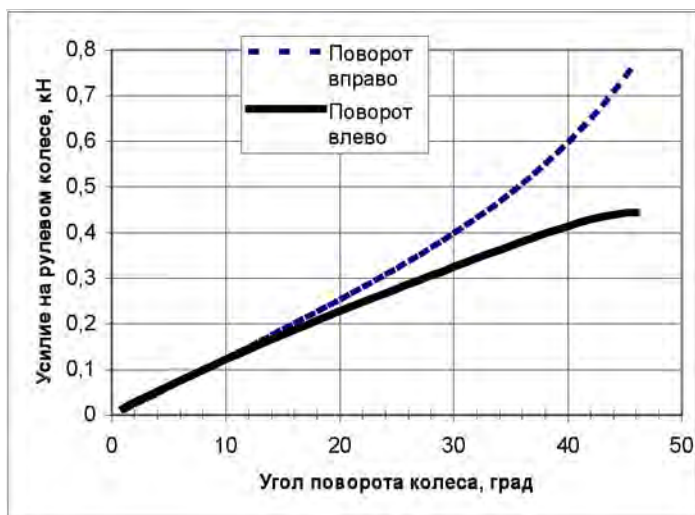


Рис.17. Зависимость усилия на рулевом колесе от угла поворота внутреннего колеса автобуса «МАЗ» полной массой 18т при круговом движении со скоростью 10 км/ч

Метод расчета параметров кругового движения колесной машины [13] излагается без упрощающих допущений об углах увода, используемых обычно в теории поворота колесных машин [14, 15].

На рисунке 16 приведена графическая зависимость усилия на рулевом колесе от радиуса горизонтальной проходимости при левом и правом повороте (1 – влево, 2 – вправо).

На рисунке 17 приведены зависимости усилия F_B на рулевом колесе от угла α_1 поворота внутреннего колеса и значений угла α_2 внешнего колеса, автобуса «МАЗ» полной массой 18т при круговом движении.

Выводы.

1. Разработан расчетный метод определения сил и моментов, действующих в контакте колес с дорогой при круговом движении автомобиля.
2. Для уменьшения разницы усилий на рулевом колесе при его повороте «влево - вправо» необходимо изменить передаточное отношение рычажных механизмов.
3. На основе разработанного метода расчета сил и моментов, действующих на каждое колесо машины, усовершенствован способ расчета стабилизирующих моментов на поворотных цапфах управляемых колес.
4. Разработана и адаптирована к автобусу «МАЗ» методика, алгоритм и программа для ЭВМ, позволяющая впервые на стадии проектирования автобуса (или уже у спроектированного автобуса) определить усилие на рулевом колесе при неработающем усилителе.

Исследование износа шин управляемой оси, исходя из концепции усталостного износа

В эксплуатации иногда наблюдается повышенный износ шин управляемых колес, который часто связывают с параметрами установки управляемых колес (схождением и развалом). Однако, при жесткой балке управляемого моста значения величин схождения и развала малы.

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы указать на еще одну причину повышенного износа шин, а именно, на ошибку рулевой трапеции.

Наиболее типичный случай истирания шины – усталостный износ.

Машина схематизируется одномассовой пространственной моделью с системой координат, зафиксированной в центре масс. Ось x системы координат направлена вперед вдоль продольной оси машины, а z – вниз перпендикулярно к дороге.

Выполненные расчеты показали, что усилие, прикладываемое водителем к рулевому колесу автобуса «МАЗ», при неработающем усилителе и габаритном радиусе поворота $R_c \geq 12$ м, не превышает нормированного значения 500 Н.

При рассмотрении механизма усталостного разрушения принимается, что выступы поверхности дороги внедряются в поверхность беговой дорожки шины и обуславливают напряжения и деформации в пятне контакта, зависящие от условий нагружения, свойств материалов трущихся поверхностей и размеров неровностей.

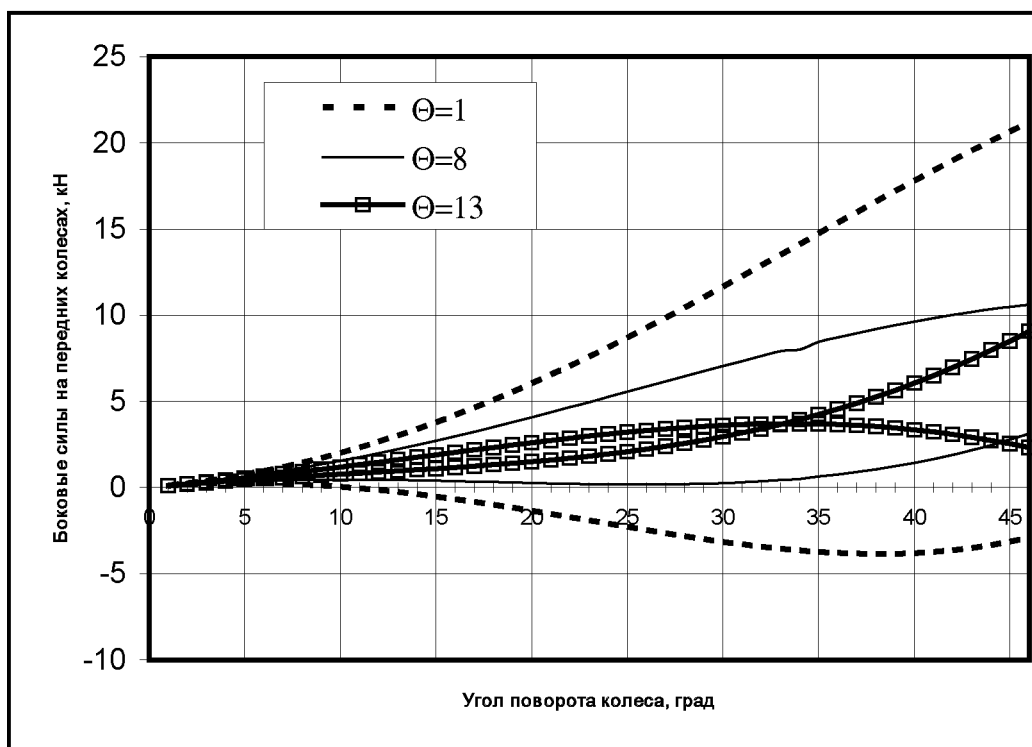


Рис.18. Зависимость боковых сил от угла поворота колес управляемой оси, при трех разных значениях углов установки рычага рулевой трапеции θ (верхний график для внешнего колеса, нижний график для внутреннего колеса) — — — ($\theta=1^\circ$); — · — · — ($\theta=8^\circ$); — — — — ($\theta=13^\circ$)

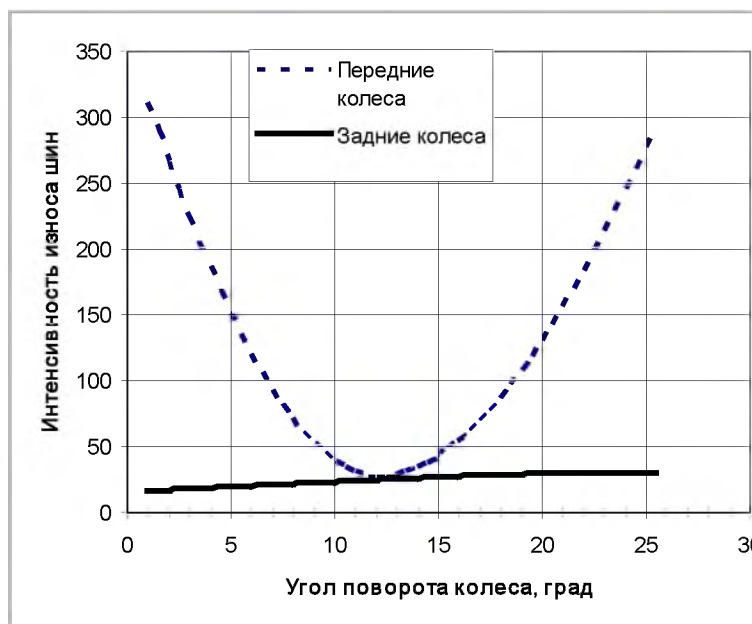


Рис.19. Зависимость коэффициента интенсивности износа шин от угла установки рычага рулевой трапеции (θ); — — — передних колес; — — — задних колес

На основе теории усталостного износа в [16] была выведена формула интенсивности износа J шин при действии на колесо в плоскости контакта шины с дорогой сил любого направления:

$$J = CF^m,$$

где C – коэффициент интенсивности износа. Исследование влияния боковой силы на износ шин проводилось в НАМИ [16] на одноосном прицепе, колеса которого были установлены со сходимением.

Аналогичные результаты были получены и для шин другого размера, в том числе и для шин типа P .

Выводы.

1. Предложена методика, алгоритм и программа для ЭВМ «Износ шин», которая позволяет определить расчетным путем количественную характеристику интенсивности износа шин в зависимости от параметров поворота автобуса, исходя из критерия, основанного на концепции усталостного износа шин.

2. Установлено, что среднеквадратическая ошибка рулевой трапеции также является критерием износа шин.

3. Уменьшение ошибки рулевой трапеции соответствует уменьшению износа шин управляемых колес (и, наоборот) по любому из двух критериев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич Ю.А. Практические, научные и методические предпосылки введения многокритериального синтеза и других прогрессивных технологий обучения в статику, кинематику и динамику. Теоретическая и прикладная механика: сб. науч. трудов. Мн.: УП «Технопринт», 2003. -252с.
2. Гурвич Ю.А. Новые прикладные критерии колебательной и апериодической устойчивости движения колес транспортных средств. Актуальные проблемы в динамике и прочности в теоретической и прикладной механике: Сб. науч. тр. – Мн.: 2001. с.148-162.
3. Сборник официальных документов по медицине труда и производственной санитарии Республики Беларусь. Мн.: 2003. с. 3-24.
4. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение, 1972.- 392с.
5. Яценко Н.Н., Прутчиков О.К. Плавность хода грузовых автомобилей. М.: Транспорт, 1967. -164 с.
6. Успенский И. Н., Мельников А. А. Проектирование подвески автомобиля. М.: Машиностроение, 1976. -168 с.
7. Литвинов А.С., Фаробин Я. Е. Автомобиль: Теория эксплуатационных свойств. М.: Машиностроение, 1989.- 240 с.
8. Гришкевич А. И. Автомобили: Теория. Мн.: Высшая школа., 1986.- 208 с.
9. ГОСТ 12.1.012 – 90 Вибрационная безопасность. Общие требования.
10. Международный стандарт ISO 2631 «Вибрация, передаваемая человеческому телу».
11. Разработать алгоритм и программу расчета рулевой трапеции автобусов в зависимости от величины колесной базы. Руководитель Ю. А. Гурвич.- № ГР 20012549,20012550/07.07.2001 Бел ИСА; инв. № ГНТП Р-05808729.12-2002 ГП МАЗ.
12. Исследование автоколебаний и стабилизации управляемых колес рулевого привода автобусов и автомобилей. Руководитель Ю. А. Гурвич.- № ГР 20012549,20012550/07.07.2001 Бел ИСА ; инв. № ГНТП И-5808729.95-2002 ГП МАЗ.

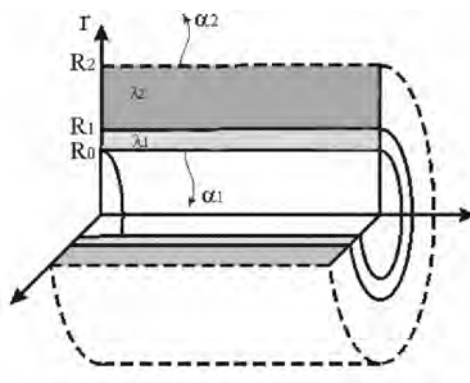
13. Андреев А.Ф. Исследование движения колесной машины с большими углами поворота управляемых колес// Конструирование и эксплуатация автомобилей и тракторов. Мн., 1991. Вып.6, с. 60-66.
14. Андреев А.Ф., Лефаров А. Х. Статическая поворотливость полноприводных колесных машин с дифференциальным межосевым приводом// Автотракторостроение: расчеты и исследования агрегатов автомобилей, тракторов и их двигателей. – Мн.: Высшая школа 1978, с 71 – 73.
15. Фаробин Я.Е. Теория поворота транспортных машин – М.: Машиностроение, 1970. – 176 с.
16. Кнороз В. И., Кленников Е. В. Шины и колеса. – М.: Машиностроение, 1975. – 184 с.
17. Гурвич Ю.А. Экспериментально-аналитический метод определения динамических характеристик шин в эксплуатационных режимах движения транспортных средств. Теоретическая прикладная механика. - Мн.: 2006, с.72-76.
18. Провести исследование рулевого привода базовых моделей автобусов и автомобилей, исходя из совокупности характеристик машин (автоколебания и стабилизация управляемых колес, устойчивость и безопасность движения, плавность хода, усилие на рулевом колесе, износ шин и др.) на основе разработанной теории получения динамических характеристик шин. Руководитель Ю. А. Гурвич.- № ГР 20012549,20012550/07.07.2001 Бел ИСА; инв. № ГНТП НИР 05808729.12-2005 ГП МАЗ.
19. Гурвич Ю.А., Сырокваш Ю.Д. Прикладные критерии устойчивости движения управляемых колес транспортных средств. Автомобильная промышленность. М.: 2005, -с.23-27.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА

Куликов И.С., Глембоцкий А.В., Левчук А.В.

The problem on calculation of the deflected mode of a cylindrical fuel element is considered. The fuel element is loaded with all deformation kinds except plasticity one as it isn't allowed in the fuel element case. This problem is reduced to equation system which is solved with the Mathematica software suite.

Рассмотрим тепловыделяющий элемент, который состоит из топливного сердечника, представляющего собой цилиндр, и цилиндрической оболочки. При постановке задачи сделаем следующие допущения: поле температур в твэле осесимметрично; твэл бесконечно длинный, имеет место обобщённая плоская деформация; топливо представляет собой гомогенную среду с осреднёнными по объёму свойствами; между топливным сердечником и оболочкой существует контакт; в течении всей кампании ядерный реактор работает в стационарном режиме.



Разрез твэла

При введённых допущениях напряжённо-деформируемое состояние цилиндрического твэла можно описать следующей системой уравнений [2] :

1. Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11}^{(i)} - \sigma_{22}^{(i)}}{r} = 0; \quad (1)$$

2. Соотношения Коши

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{22}^{(i)} = \frac{u_1^{(i)}}{r}, \quad \varepsilon_{33}^{(i)} = const; \quad (2)$$

3. Физические уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(i)} &= \frac{1}{E^{(i)}} [\sigma_{11}^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_{22}^{(i)} + \sigma_{33}^{(i)})] + \varepsilon_{11}^{n(i)} \\ \varepsilon_{22}^{(i)} &= \frac{1}{E^{(i)}} [\sigma_{22}^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_{11}^{(i)} + \sigma_{33}^{(i)})] + \varepsilon_{22}^{n(i)} \\ \varepsilon_{33}^{(i)} &= \frac{1}{E^{(i)}} [\sigma_{33}^{(i)} - \nu^{(i)} (\sigma_{11}^{(i)} + \sigma_{22}^{(i)})] + \varepsilon_{33}^{n(i)} \end{aligned} \quad (3)$$

где $j = 1, 2, 3$, $I = 1, 2$ – номер материала (1 – топливный сердечник, 2 – оболочка).

$$\text{где } \varepsilon^{(i)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}^{(i)} + \varepsilon_{22}^{(i)} + \varepsilon_{33}^{(i)}), \quad \varepsilon^{n(i)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}^{n(i)} + \varepsilon_{22}^{n(i)} + \varepsilon_{33}^{n(i)}).$$

Поставленную задачу будем решать аналитически. Выразим из физических уравнений (3) напряжения $\sigma_{11}^{(i)}$, $\sigma_{22}^{(i)}$ и $\sigma_{33}^{(i)}$ через деформации, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon_{11}^{(i)} - \varepsilon_{11}^{n(i)}) + \frac{3\nu^{(i)}E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{n(i)}), \\ \sigma_{22}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon_{22}^{(i)} - \varepsilon_{22}^{n(i)}) + \frac{3\nu^{(i)}E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{n(i)}), \\ \sigma_{33}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon_{33}^{(i)} - \varepsilon_{33}^{n(i)}) + \frac{3\nu^{(i)}E^{(i)}}{(1+\nu^{(i)})(1-2\nu^{(i)})} \cdot (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{n(i)}), \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) с учётом соотношений Коши (2) подставляем в уравнение равновесия (1) и проделав преобразования, получим следующее уравнение равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{u_1^{(i)}}{r^2} &= \frac{(1-2\nu^{(i)})}{(1-\nu^{(i)})} \frac{1}{r} (\varepsilon_{11}^{n(i)} - \varepsilon_{22}^{n(i)}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\varepsilon_{11}^{n(i)} + \frac{\nu^{(i)}}{(1-\nu^{(i)})} (\varepsilon_{22}^{n(i)} + \varepsilon_{33}^{n(i)}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Проинтегрировав дважды дифференциальное уравнение (5) получим выражение для определения перемещений (6).

$$u_1^{(i)} = \frac{(1-2\nu^{(i)})}{(1-\nu^{(i)})} \frac{1}{r} \int_{a^{(i)}}^r r \cdot K(r)^{(i)} dr + \frac{1}{r} \int_{a^{(i)}}^r r \cdot L(r)^{(i)} dr + \frac{c_1^{(i)} r}{2} + \frac{c_2^{(i)}}{r}, \quad (6)$$

$$\text{где } K(r)^{(i)} = \int_{a^{(i)}}^r \frac{1}{r} (\varepsilon_{11}^{n(i)} - \varepsilon_{22}^{n(i)}) dr, \quad L(r)^{(i)} = \varepsilon_{11}^{n(i)} + \frac{\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)}} (\varepsilon_{22}^{n(i)} + \varepsilon_{33}^{n(i)}).$$

В интегралах, входящих в уравнения перемещений (6) $a^{(i)}$ – внутренний радиус топливного сердечника или оболочки, в зависимости от индекса i .

Неупругие деформации $\varepsilon_{jj}^{n(i)}$ определим из выражений:

$$\varepsilon_{jj}^{n(i)} = \alpha^{(i)} T^{(i)} + \frac{1}{3} S^{(i)} + \varepsilon_{jj}^{c(i)}, \quad (7)$$

где температурное поле T , набухание S топлива и оболочки считаются известными функциями радиуса r :

$$\begin{aligned} T^{(1)}(r) &= T_a + \frac{q}{4 \cdot \lambda_1} \cdot (R_1^2 - r^2), \\ T^{(2)}(r) &= T_a + \frac{q}{4 \cdot \lambda_2} \cdot (R_2^2 - r^2), \end{aligned} \quad (8)$$

если в начале кампании реактора существует зазор между топливным сердечником и оболочкой, то температурное поле T в оболочке следует определять по формуле:

$$T^{(2)}(r) = (T_b - T_a) \cdot \frac{\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + T_b, \quad (8')$$

$$S^{(1)}(t) = K \cdot \beta \cdot t,$$

$$S^{(2)}(r, t) = 4.9 \cdot 10^{-51} \cdot (\phi \cdot t)^{1.71} \cdot 10^{\frac{1.549 \cdot 10^4}{T^{(2)}(r)} - \frac{5.98 \cdot 10^6}{(T^{(2)}(r))^2}} \quad (9)$$

Деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{c(i)}$ определяются по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kjn}^{c(i)} &= \varepsilon_{kjn-1}^{c(i)} + \dot{\varepsilon}_{kjn-1}^{c(i)} \cdot \Delta t, \\ \dot{\varepsilon}_{kjn-1}^{c(i)} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{un-1}^{c(i)}}{\sigma_{un-1}^{(i)}} (\sigma_{kjn-1}^{(i)} - \delta_{ij} \sigma_{n-1}^{(i)}), \\ \sigma_{kjn-1}^{(i)} &= \frac{1}{3} (\sigma_{11n-1}^{(i)} + \sigma_{22n-1}^{(i)} + \sigma_{33n-1}^{(i)}), \\ \sigma_{un-1}^{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11n-1}^{(i)} - \sigma_{22n-1}^{(i)})^2 + (\sigma_{22n-1}^{(i)} - \sigma_{33n-1}^{(i)})^2 + (\sigma_{33n-1}^{(i)} - \sigma_{11n-1}^{(i)})^2}, \\ \dot{\varepsilon}_{un-1}^{c(i)} &= f(\sigma_u^{(i)}, t). \end{aligned} \quad (10)$$

В нашем случае закон ползучести будет иметь вид $\dot{\varepsilon}_u^c = A \cdot (\sigma_u)^m$.

В формулах (10) n – шаг по времени.

Константы $C_1^{(i)}$ и $C_2^{(i)}$ в уравнениях (6), а также $\varepsilon_{33}^{(i)}$ найдём из граничных условий.

Рассмотри два случая. В первом случае топливный сердечник представляет собой сплошной цилиндр, а во втором случае – полый цилиндр.

Для твэла с топливным сердечником в виде сплошного цилиндра граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= 0 \text{ при } r = 0, \\ u_1^{(1)} &= u_1^{(2)} \text{ при } r = R_1, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^{(2)} \text{ при } r = R_1, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= -P_n \text{ при } r = R_2, \\ 2 \int_0^{R_1} \sigma_{33}^{(1)} r dr + 2 \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{33}^{(2)} r dr &= -P_n R_2^2, \\ \varepsilon_{33}^{(1)} &= \varepsilon_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для твэла с топливным сердечником в виде полого цилиндра граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= -P_V \text{ при } r = R_0, \\ u_1^{(1)} &= u_1^{(2)} \text{ при } r = R_1, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^{(2)} \text{ при } r = R_1, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= -P_n \text{ при } r = R_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$2 \int_{R_0}^{R_1} \sigma_{33}^{(1)} r dr + 2 \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{33}^{(2)} r dr = -P_n R_2^2,$$

$$\epsilon_{33}^{(1)} = \epsilon_{33}^{(2)}.$$

Для производства оболочек твэлов быстрых ядерных реакторов применяют сталь ОХ16Н15МЗБ. Эта сталь охрупчивается в центральной и верхней частях твэлов до такой степени, что относительное удлинение равняется нулю в интервале температур 20...720 °С. Прочность оболочки составляет всего лишь 100...200 МПа, что авторы объясняют повреждением оболочки вследствие коррозии по границам зерен под воздействием продуктов деления. Для подавления распухания оболочек сталь подвергают холодной деформации. В таком случае максимальное распухание при флюенсе $8,5 \cdot 10^{22}$ нейтрон/см² уменьшается в 20-30 раз по сравнению с распуханием стали в аустенизированном состоянии. В тоже время пластичность холоднотемпературной стали остается на достаточно удовлетворительном уровне (0,8% при флюенсе $8,5 \cdot 10^{22}$ нейтрон/см²), что не хуже, чем для этой же стали в аустенизированном состоянии.

В качестве топлива наиболее широко применяются диоксид урана (UO₂). Одним из основных параметров при разработке твэлов, является теплопроводность топливной композиции. В этом плане теплопроводность низкая и зависит от температуры и облучения, из-за чего в оксидном топливе возникают большие градиенты температуры (2000...3000 °С/см). Последние являются причиной быстрой перестройки структуры оксидного топлива, в котором в рабочем состоянии образуется три зоны: первоначальная зона, зона равноосных и столбчатых зерен, вследствие чего возникают трещины. Чтобы избежать вышеназванных проблем, было предложено использовать в качестве топливной композиции для твэлов быстрого реактора керметное топливо UO₂+WiCr или UO₂+Cr [2].

Нами были проведены расчёты твэла быстрого ядерного реактора с оболочкой из стали ОХ16Н15МЗБ и топливом UO₂+30%Cr.

Параметры твэла:

$R_0 = 0$ (для твэла со сплошным керметным топливным сердечником), $R_0 = 2,3$ мм (для твэла с полым керметным топливным сердечником), $R_1 = 2,7$ мм, $R_2 = 3,1$ мм, $P_n = 8$ МПа, $P_v = 1$ МПа; $\alpha^{(1)} = 18,3 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹, $\alpha^{(2)} = 16,1 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹, $T_a = 500$ °С, $T_b = 530$ °С, $\lambda^{(1)} = 12$ Вт/м·°С, $\lambda^{(2)} = 18$ Вт/м·°С, $q_v = 8,07 \cdot 10^8$ Вт/м³, $\phi = 2,81 \cdot 10^{19}$ нейтр/(см²·час), $\beta = 0,001\%$ /час, $K = 1$ [3].

Для решения задачи используем шаговый метод по времени, одновременно решая на каждом временном шаге систему уравнений (6)–(10) с учётом граничных условий (11) либо (12), в зависимости от вида топливного сердечника.

При решении задачи с топливным сердечником в виде сплошного цилиндра интегралы, входящие в уравнения (6), определялись численно. Для решения данной задачи применялась формула средних прямоугольников. Это связано с возникновением неопределённости при использовании других формул численного интегрирования [1].

При решении задачи с топливным сердечником в виде полого цилиндра применялся подход определения приближенной функции полиномом, который подбирается по методу, минимизирующему расстояние между графиком полнома и истинной кривой, усреднённое по всей длине.

Результаты расчёта представлены на рис. 1-6.

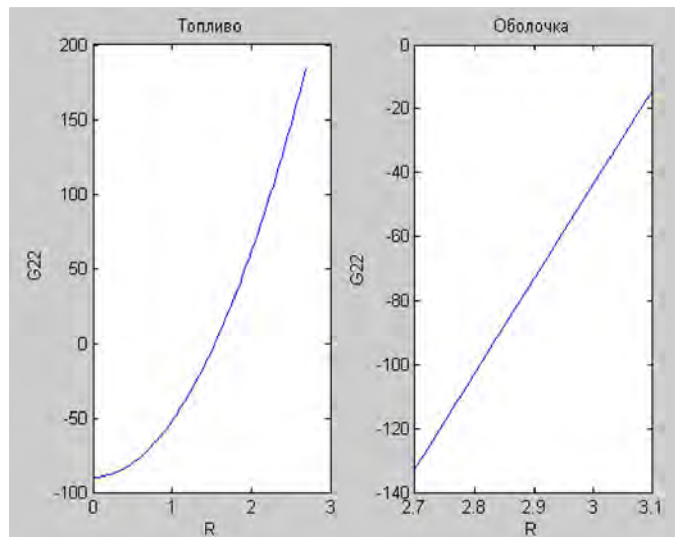


Рис. 1. График зависимости тангенциальных напряжений от радиуса в момент времени $t=0$ для твэла с топливным сердечником в виде сплошного цилиндра

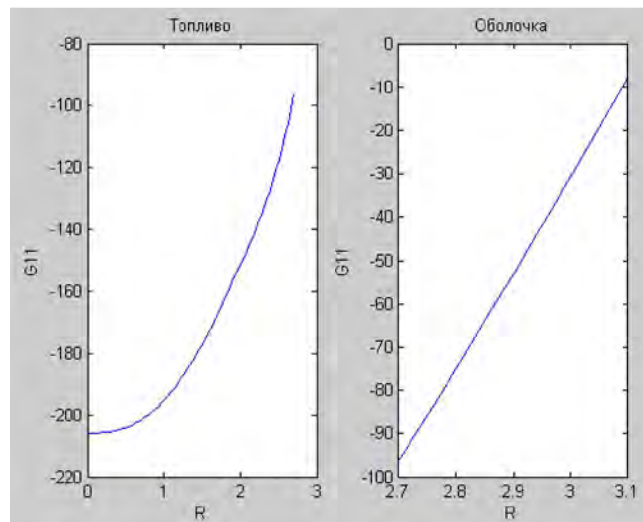


Рис. 2. График зависимости радиальных напряжений от радиуса в момент времени $t=2000$ часов для твэла с топливным сердечником в виде сплошного цилиндра

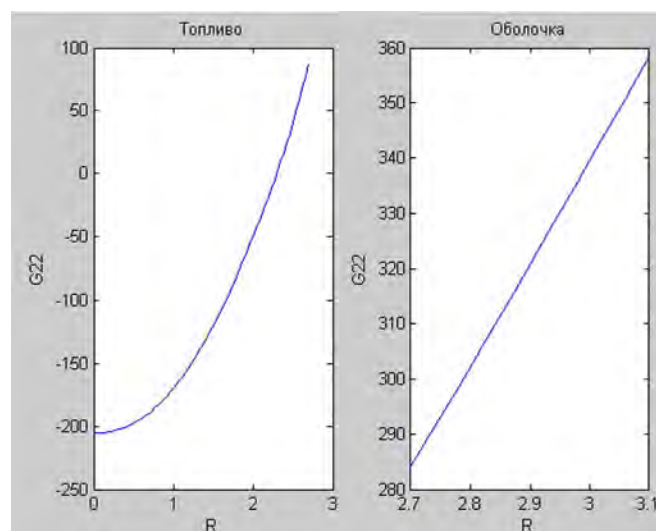


Рис. 3. График зависимости тангенциальных напряжений от радиуса в момент времени $t=2000$ часов для твэла с топливным сердечником в виде сплошного цилиндра

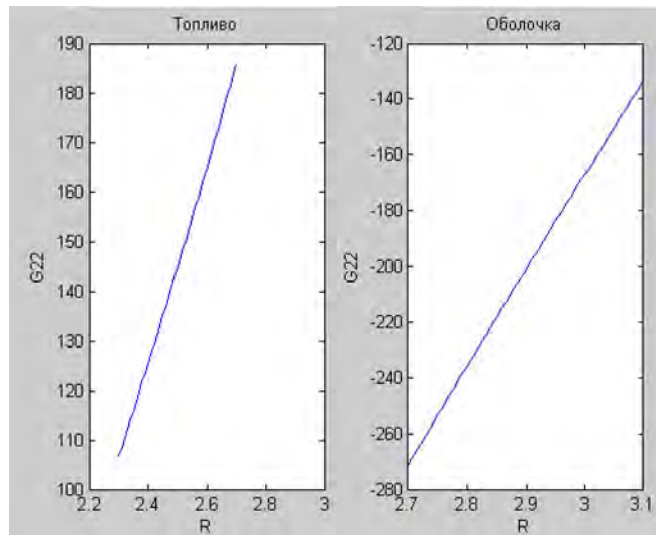


Рис. 4. График зависимости тангенциальных напряжений от радиуса в момент времени $t=0$ для твэла с топливным сердечником в виде полого цилиндра

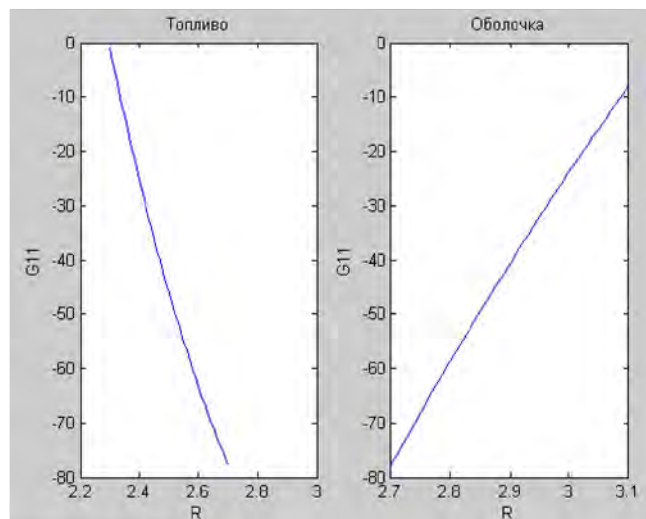


Рис. 5. График зависимости радиальных напряжений от радиуса в момент времени $t=2000$ часов для твэла с топливным сердечником в виде полого цилиндра

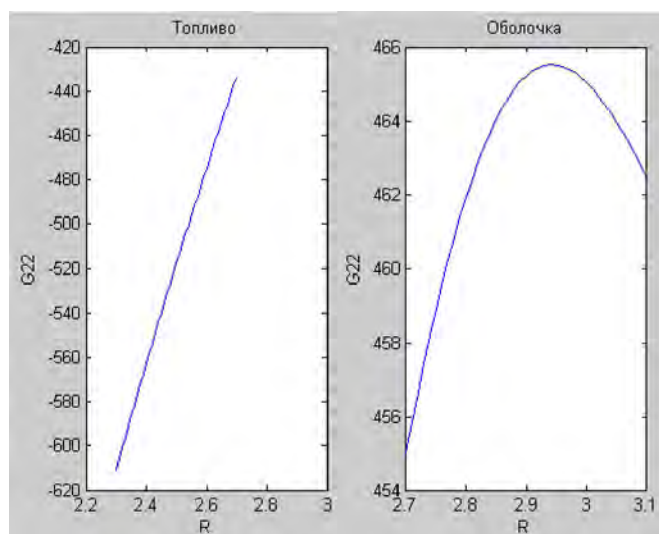


Рис. 6. График зависимости тангенциальных напряжений от радиуса в момент времени $t=2000$ часов для твэла с топливным сердечником в виде полого цилиндра

Вывод.

Проведённые расчёты свидетельствуют о том, что при данных параметрах с течением времени в оболочке твэла как с керметным топливным сердечником в виде сплошного цилиндра, так и с топливным сердечником в виде полого цилиндра возникают большие тангенциальные напряжения, которые могут привести к её разрушению. Так, к моменту времени кампании быстрого реактора 2000 часов (выгорание 2% тяжёлых атомов) напряжения могут достигнуть 360-460 МПа, что значительно превышает предел длительной прочности оболочки из стали ОХ16Н15МЗБ. Возникновение высоких напряжений можно объяснить взаимодействием топливного сердечника с оболочкой и неравномерным распуханием оболочки.

Представленное решение задачи в интегральной форме может служить тестовым при численном решении задач определения НДС тепловыделяющих элементов цилиндрической формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
2. Куликов И.С., Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. – Мн.: Наука и техника, 1990.
3. Куликов И.С., Тверковкин Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. – Мн.: Наука и техника, 1984.

О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАКЛИНИВАНИЯ В КУЛАЧКОВОМ МЕХАНИЗМЕ С ТАРЕЛЬЧАТЫМ ТОЛКАТЕЛЕМ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

The article is devoted to the research of influence of a friction and of geometrical sizes of the cam mechanism on its working capacity.

В кулачковом механизме с тарельчатым толкателем угол давления равен нулю во всех положениях механизма. Однако условия передачи сил могут оказаться неблагоприятными и в таком механизме, что может повлечь за собой заклинивание (самоторможение). Это, как будет показано далее, в первую очередь определяется величиной $x = A_0A$ (рис. 1, а).

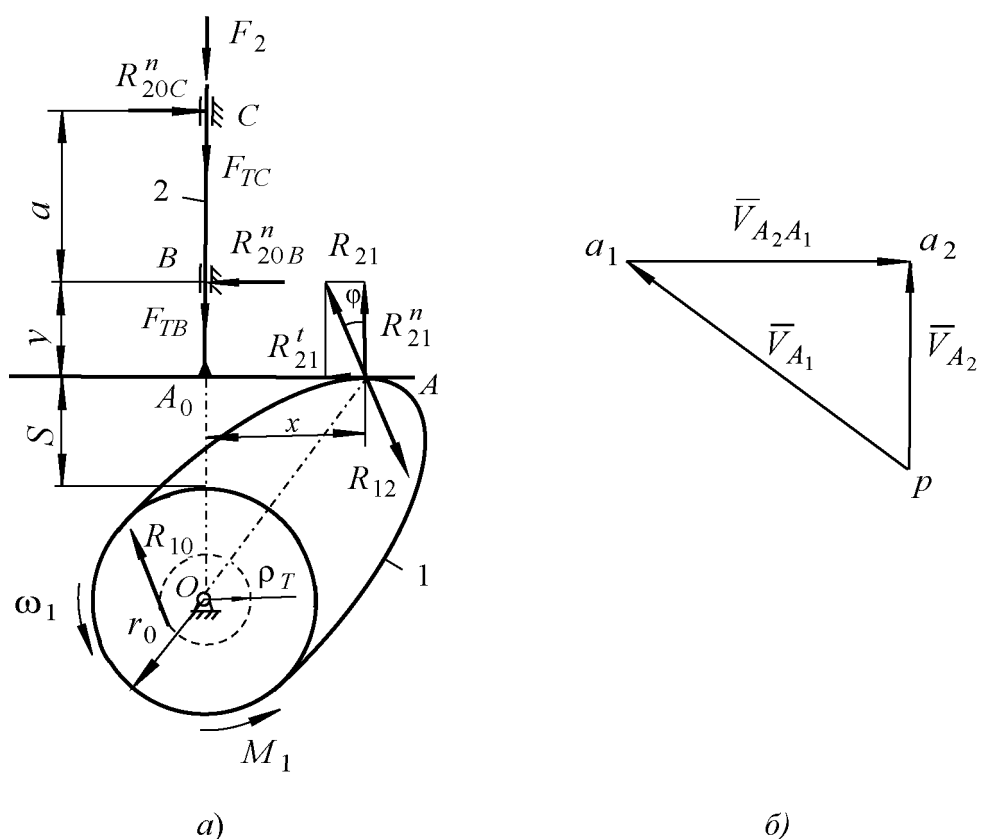


Рис. 1.

Рассмотрим картину силового нагружения механизма. При этом учитываем силы трения скольжения в поступательной и высшей парах. Вследствие перекоса толкатель 2 касается направляющих в точках B и C . К толкателю приложены следующие силы: F_2 – равнодействующая силы полезного сопротивления, упругости пружины, силы тяжести и силы инерции толкателя, R_{20B}^n и R_{20C}^n – нормальные реакции со стороны направляющих в точках B и C , F_{TB} и F_{TC} – силы трения скольжения, R_{21} – реакция со стороны кулачка 1. Для учета трения скольжения в высшей

паре реакция R_{21} отклонена от нормали на угол трения φ в сторону, противоположную относительной скорости $\bar{V}_{A_2A_1}$. Следовательно,

$$R_{21} = \sqrt{(R_{21}^n)^2 + (R_{21}^t)^2}.$$

Уравнения равновесия толкателя представим в следующем виде (при этом его толщиной пренебрегаем):

$$\sum M_B = R_{21}x \cos \varphi - R_{21}y \sin \varphi - R_{20C}^n a = 0,$$

откуда

$$R_{20C}^n = \frac{R_{21} \cos \varphi (x - y \operatorname{tg} \varphi)}{a}; \quad (1)$$

$$\sum M_C = R_{21}x \cos \varphi - R_{21}(a + y) \sin \varphi - R_{20B}^n a = 0,$$

откуда

$$R_{20B}^n = \frac{R_{21} \cos \varphi [x - (a + y) \operatorname{tg} \varphi]}{a}; \quad (2)$$

$$\sum F_y = R_{21} \cos \varphi - F_{TB} - F_{TC} - F_2 = 0, \quad (3)$$

причем

$$F_{TB} = f R_{20B}^n, \quad F_{TC} = f R_{20C}^n, \quad (4)$$

где f – коэффициент трения скольжения в поступательной паре.

Из подобия плана скоростей $p a_1 a_2$ (рис. 1, б) и треугольника OA_0A следует, что расстояние x равно аналогу скорости толкателя, т.е. $x = \frac{dS}{d\varphi_K}$, где $S(\varphi_K)$ – функция перемещения толкателя, φ_K – угол поворота кулачка (обобщенная координата механизма).

Фактическое направление нормальных реакций R_{20B}^n и R_{20C}^n может отличаться от показанного на рис. 1, а. Это зависит от соотношения геометрических параметров механизма. Если при определении указанных сил по формулам (1) и (2) получится знак «плюс», то выбранные направления являются правильными. Если же для какой-либо силы получится знак «минус», то направление этой силы следует, как обычно, изменить на противоположное и, кроме того, необходимо еще заново составить уравнения равновесия. Это связано с тем, что при изменении знака нормальной реакции изменится и знак силы трения, определяемой по формуле (4). В действительности сила трения своего направления не изменяет, так как она всегда направлена противоположно относительной скорости движения.

Возможны 3 случая решения задачи.

1) $x < y \operatorname{tg} \varphi$. В этом случае направления R_{20B}^n и R_{20C}^n изменяются на противоположные, так как согласно формулам (1) и (2) $R_{20B}^n < 0$ и $R_{20C}^n < 0$. Тогда реакция R_{21} , определяемая из уравнения (3), находится из зависимости

$$R_{21} = \frac{F_2}{\cos \varphi \left(1 + \frac{2fx}{a} \right) - f \sin \varphi \left(1 + \frac{2y}{a} \right)}. \quad (5)$$

При $x = y \operatorname{tg} \varphi$ $R_{20C}^n = 0$.

2) $y \operatorname{tg} \varphi < x < (a + y) \operatorname{tg} \varphi$. Направление R_{20B}^n изменяется на противоположное, а направление R_{20C}^n не изменяется. Реакция R_{21} определяется из зависимости

$$R_{21} = \frac{F_2}{\cos \varphi - f \sin \varphi}. \quad (6)$$

При $x = (a + y) \operatorname{tg} \varphi$ $R_{20B}^n = 0$.

3) $x > (a + y) \operatorname{tg} \varphi$. В этом случае направления R_{20B}^n и R_{20C}^n не изменяются и реакция R_{21} определяется из зависимости

$$R_{21} = \frac{F_2}{\cos \varphi \left(1 - \frac{2fx}{a} \right) + f \sin \varphi \left(1 + \frac{2y}{a} \right)}. \quad (7)$$

Анализ зависимостей (5), (6), (7) показывает, что заклинивание толкателя, когда $R_{21} \rightarrow \infty$, может иметь место только в случае $x > (a + y) \operatorname{tg} \varphi$. Полагая знаменатель в выражении R_{21} (7) равным нулю, получим условие незаклинивания в следующем виде:

$$x < \frac{a}{2f} + \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{a}{2} + y \right).$$

Уравновешивающий (движущий) момент M_1 , приложенный к кулачку 1 и определяемый из условия статического равновесия ($\sum M_O = 0$) без учета его силы тяжести, выражается формулой

$$M_1 = R_{10} \rho_T + R_{12}^n x + R_{12}^t (r_0 + S),$$

где ρ_T – радиус круга трения, $R_{12}^n = R_{21} \cos \varphi$, $R_{12}^t = R_{21} \sin \varphi$, причем $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$.

$\rho_T = f' r$, где f' – приведенный коэффициент трения во вращательной паре O , r – радиус цапфы вращательной пары.

Реакции R_{10} и R_{12} образуют пару сил, поэтому $R_{10} = R_{12}$.

В случае заклинивания уравновешивающий (движущий) момент M_1 стремится к бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов, Г.Г. Курс теории механизмов и машин / Г.Г. Баранов. – 5-е изд. – М.: Машиностроение, 1975. – 494 с.
2. Юдин, В.А. Теория механизмов и машин / В.А. Юдин, Л.В. Петрокас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1977. – 527 с.

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТКАНЕЙ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ОРГАНИЗМА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

Пронкевич С.А., Орловская А.А., Томило Е.В.

For reception of authentic results at modelling in ANSYS 12 physicommechanical properties of the basic fabrics of a human body - blood, a skin, muscles and bones are established. On the basis of the analysis of references all criteria necessary for computer modelling of real processes of ability to live of a complex biological organism are picked up

Введение.

Специалисты разных областей знаний, деятельность которых касается как изучения и коррекции органов и структур человеческого организма, так и создания имплантатов, сталкиваются в своей работе с необходимостью проанализировать поведение структур человеческого организма и элементов технических систем при различных внешних воздействиях. Значительной помощью в решении данных проблем является моделирование биологических объектов. Данный метод основан на построении и изучении их физических и математических моделей. Моделирование структур человеческого организма даёт возможность предсказать критические ситуации, выяснить механизмы формирования патологий, находить области допустимых изменений формы, механических свойств и характера функционирования этих биологических объектов.

Для компьютерного моделирования реальных биомеханических процессов с высокой степенью достоверности необходимо максимально точно задавать физико-механические свойства исследуемых материалов, таких как костная и мышечная ткани, кожа и кровь.

В данной работе представлены физико-математические модели таких структур биологических тканей, как компактная костная ткань, мышечная ткань, кровь и кожа. При моделировании были рассмотрены вопросы выбора вида и параметров модели, проведена работа по выяснению необходимых механических свойств рассматриваемой структуры. Основная сложность при исследовании напряжённо-деформированного состояния биологических объектов заключается в выборе адекватной модели для описания структуры биологических тканей, так как они состоят из множества разнородных структурных элементов и представляют собой композитный материал. Механические свойства биологической ткани отличаются от механических свойств каждого компонента в отдельности. Методы определения механических свойств биологических тканей аналогичны методам определения этих свойств у технических материалов.

Моделирование структуры крови.

Кровь – соединительная ткань организма, представляющая собой суспензию форменных элементов и особых жидких частиц. Данная система является изотропной жидкостью с вязкостью от 4 до 5 мПа·с. Она зависит от количества и свойств форменных элементов, содержания белков, гемоглобина и углекислоты. Вязкость крови повышается с увеличением содержания углекислоты, вызывающей разбухание эритроцитов и понижается с увеличением в крови содержания кислорода. Поэтому вязкость венозной крови больше, чем артериальной. Это необходимо учитывать при создании модели структуры конкретной крови. Кровь

можно считать несжимаемой жидкостью с постоянной плотностью, которая составляет в среднем $1,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

При моделировании в программном пакете ANSYS для начала необходимо выбрать тип решаемой задачи, что позволит активизировать те пункты меню, которые соответствуют указанному типу. Выбираем тип задачи, для моделирования структуры крови как вязкой изотропной жидкости - FLOTRAN CFD. Для выделенного типа задачи выбираем тип конечного элемента. Для данной структуры это 3D FLOTRAN 142. Далее задаём свойства материала, указывая конкретные константы (табл. 1)

Моделирование структуры поперечнополосатой мышцы.

Мышечная ткань – ткань, образованная клетками, содержащими сократительные элементы. Поперечнополосатые мышцы – это скелетная мускулатура и сердечная мышца. Скелетные мышцы поддерживают положение тела в пространстве, сердечные мышцы – непрерывный ток крови. Все мышцы работают по единому принципу. Мышечная ткань анизотропная и обладает упругими и вязкими свойствами.

Таблица 1

Физико-механические свойства крови

Наименование	Значение
Вязкость, мПа·с	4-5
Плотность, кг/м ³	$1,05 \cdot 10^3$
Теплоёмкость, Дж/кг·К	3600
Коэффициент теплопроводности, Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹	0,58

Модель мышцы можно представить в двух вариантах, состоящих из пружин и амортизатора. Первый вариант представлен на рис. 1.

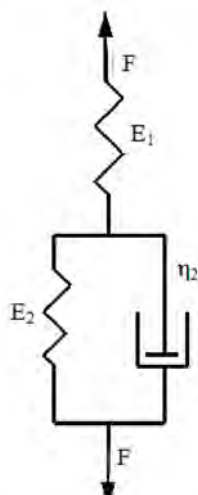


Рис. 1. Модель поперечнополосатой мышцы (вариант I)

Для данной модели справедливы уравнения:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 ; E_1 \varepsilon_1 = F ; F = E_2 \varepsilon_2 + \eta D \varepsilon_2 ; \varepsilon_1 = \frac{F}{E_1} ;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{F}{E_2} + \frac{F}{E_2 + \eta_2 D} ; DF + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} F = E_1 D \varepsilon + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} ; D = \frac{\partial}{\partial t}$$

Вторая модель представлена на рис. 2.

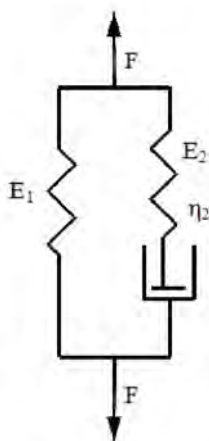


Рис. 2. Модель поперечнополосатой мышцы (вариант II)

Для неё справедливы уравнения:

$$F = F_1 + F_2 ; F_1 = E_1 \varepsilon ; \frac{1}{E} DF_2 + \frac{1}{\eta_2} F_2 = D\varepsilon ; F_2 = \frac{D\varepsilon}{\frac{\eta}{E_2} D + \frac{1}{\eta_2}} ;$$

$$DF + \frac{E_2}{\eta_2} F = (E_1 + E_2) D\varepsilon + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \varepsilon ; D = \frac{\partial}{\partial t}$$

Параллельные упругие элементы моделируются зависимостью между длиной пассивной мышцы и силой с которой она растягивается. Последовательные элементы позволяют более точно воспроизводить упругие свойства мышцы. В вязкоупругой модели учитываются нелинейные и упругие свойства мышцы.

Упругая деформация возникает и исчезает одновременно с нагрузкой и не сопровождается рассеиванием энергии. Для малых упругих деформаций справедлив закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

Для поперечнополосатой мышцы модуль упругости E равен $4\text{-}8 \cdot 10^4$ Па.

В случае вязкой среды, напряжения определяются скоростью деформации

$$\sigma_{\text{в}} = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} .$$

где η – коэффициент вязкости.

Для вязкоупругих состояний характерна зависимость ε от величины нагружения, причем при снятии нагрузки деформация самопроизвольно стремится к нулю через определенное время.

При моделировании в программном пакете ANSYS выбираем тип конечного элемента HYPER86, который в полной мере описывает свойства структуры поперечнополосатой мышцы. Данный тип применяется для гиперупругих твердотельных 3-D элементов, учитывает большие деформации и смещения. Затем задаём свойства материала, указывая конкретные константы (табл.2)

Таблица 2

Физико-механические свойства поперечнополосатой мышцы

Наименование	Значение
Плотность, кг/м ³	1100
Модуль упругости, Па	$4\text{-}8 \cdot 10^4$
Коэффициент Пуассона	0,49

Предел прочности, кПа	85
Удельная температуропроводность, м ² /с	1,649±0,037
Коэффициент теплопроводности, Вт·м ⁻¹ ·°С ⁻¹	0,45

Моделирование кожи.

Кожа является вязкоупругим однородным материалом с высокоэластическими свойствами, она хорошо растягивается и удлиняется.

Данная структура проявляет линейную зависимость между напряжениями и деформациями в диапазоне небольших деформаций, поэтому подчиняется закону Гука.

Величину E выбирают на основании данных для всего слоя кожи от 0,1 МПа до 0,5 МПа.

Для моделирования в ANSYS применяем тип конечного элемента VISCO88. Данный тип элементов применяется для плоской задачи с учётом геометрической нелинейности структуры кожи. Он учитывает качества вязкоупругих тканей, которым не свойственны большие деформации и смещения. Конкретные значения для свойств материала приведены в табл. 3.

Таблица 3

Физико-механические свойства кожи

Наименование	Значение
Модуль упругости, МПа	0,1 - 0,5
Коэффициент Пуассона	0.48
Предел прочности, МПа	21 (для 8 лет) 17 (для 95лет)
Удельная температуропроводность, м ² /с	1,764±0,039
Коэффициент поглощения теплового излучения	0,90
Приведённый коэффициент теплового излучения, Вт·м ⁻² ·К ⁻⁴	5,1·10 ⁻⁸

Моделирование компактной костной ткани.

Костная ткань является основным материалом опорно-двигательного аппарата. Композиционное строение кости придаёт ей нужные механические свойства: твёрдость, упругость и прочность. Зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ для компактной костной ткани имеет характерный вид, подобный аналогичной зависимости для твёрдого тела. При небольших деформациях выполняется закон Гука.

Волокна костной ткани претерпевают преимущественно упругие деформации, а матрица (остальная часть) – пластические деформации и хрупкое разрушение. Модуль упругости определяют по формуле

$$E = E_a \frac{V_a}{V} \left(1 + \frac{G_M V_M}{E_a V_a} \right),$$

где E_a – модуль упругости армирующих волокон; $V = V_a + V_M$ – общий объём, состоящий из арматуры V_a и матрицы V_M , G_M – модуль сдвига матрицы.

Прочность костей при сжатии достаточно высока, несущая способность при изгибе значительно меньше, прочность при кручении наиболее высока в 25-35 лет и после этого постепенно убывает.

Одним из основных факторов, наиболее существенно влияющих на свойства компактной костной ткани, является её влажность. От влагосодержания зависят модуль упругости, разрушающие напряжения и деформация, и значительно меняется вид кривой деформирования и характер разрушения. Структуре кости приближенно соответствует модель сочетающая последовательное соединение пружин

жины с моделью Кельвина–Фойхта. Для моделирования в ANSYS выбираем тип конечного элемента SOLID64, который применяется для анизотропных прочностных твердотельных 3-D элементов. Выбранный тип учитывает геометрические нелинейности структуры. Он не поддерживает больших деформаций в материале, но учитывает повышенную жёсткость. Затем задаём свойства материала, вводя конкретные константы (табл. 4)

Таблица 4

Физико-механические свойства костной ткани

Наименование	Значение
Плотность, кг/м ³	2400
Модуль упругости, ГПа	1-1,7
Модуль эластичности, ГПа	17-20
Коэффициент Пуассона	0,49
Предел прочности на сжатие, МПа	150-170
Предел прочности на растяжение, МПа	100-120

Для моделирования приведенных биологических объектов, с учётом их электропроводимости, представим конкретные значения их свойств (табл. 5).

Таблица 5

Электрические свойства

Биологическая ткань	Электрические свойства	Удельная электрическая проводимость, Ом/м	Электропроводимость при переменном токе, Ом·м
Кровь		0,6	2
Поперечнополосатая мышца		0,5	1,66
Кожа		10 ⁻⁵	10 ⁵
Компактная костная ткань		10 ⁻⁷	10 ⁷

Выводы.

Компьютерное моделирование в программном пакете ANSYS позволяет заменить экспериментальные исследования реального объекта изучением характеристик уменьшенной, математически и физически подобной модели с последующим переходом от параметров модели к соответствующим параметрам биологического объекта или конструкции, и отвечает интересам представителей многих специальностей – от математиков-теоретиков до практикующих врачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М: Машиностроение, 2004. – 506 с.
2. Бегун П.И., Афонин П.Н. Моделирование в биомеханике: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2004. – 390 с.
3. Ремизов А.Н., Максина А.Г., Потапенко А.Я. Медицинская и биологическая физика: Учеб. Для вузов. – М.: Дрофа. 2003. – 560 с.
4. Арсеньев Д.Г., Аранов В.Ю., Бауэр С.М. и др. Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике: Учеб. пособие (под ред. А.В. Зинковского и В.А. Пальмова): – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ДИСК-ЦИЛИНДР В УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗГИБА ЦИЛИНДРА

Щербаков С.С.

Field of stresses in the disk-cylinder active system is observed in the present paper. The field was obtained by superposing the field of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by bending of the cylinder. A significant change of the state of stress in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.

Постановка задачи

Для исследуемых в трибофатике силовых систем [1,2], характерно наличие как контактного взаимодействия между их элементами, так и объемного деформирования, вызванного действием неконтактных нагрузок.

Рассмотрим напряженное состояние системы ролик-вал (рис. 1), используемой при износоустойчивых испытаниях [1,2].

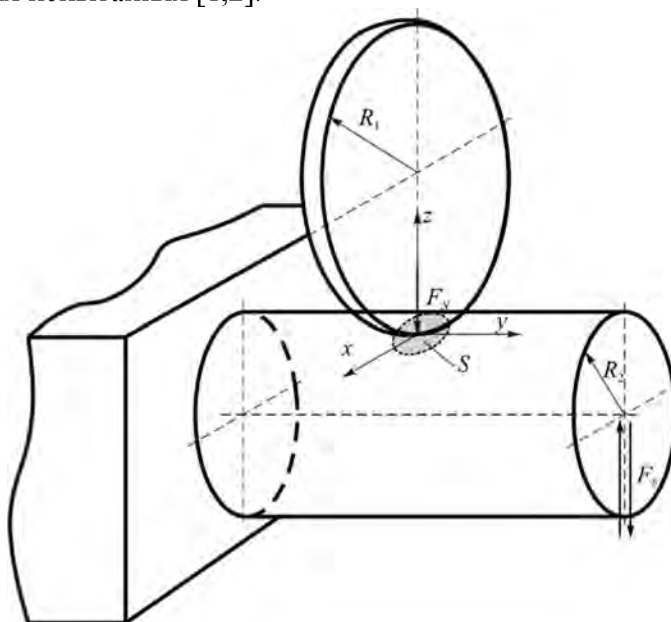


Рис. 1 – Схема системы диск-цилиндр

В данной силовой системе взаимодействующие тела в области контакта ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для описания контактного взаимодействия применима теория контакта Герца [3-5]. В соответствии с данной теорией принимается, что площадка контакта $S(x, y)$ имеет форму эллипса с большой a и малой b полуосями, давление $p(S)$ на площадке контакта распределено по эллиптическому закону [3-5]. Таким образом, трехмерное напряженно-деформированное состояние для случая эллиптического контакта с трением определяется для граничных условий следующего вида:

$$\sigma_{nn}^{(c)}|_S = p(F_c, S), \sigma_{n\tau}^{(c)}|_S = fp(F_c, S), \sigma_{ij}^{(c)}|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \text{ и } i, j = x, y, z \quad (1)$$

где $S(x, y)$ – площадка контакта, F_c – контактная сила, f – коэффициент трения, ρ – расстояние от центра контакта, $\sigma_{ij}^{(c)}$ – напряженное состояние при контакте, $n \perp S$, $\tau \parallel S$.

Кроме того консольно закрепленный вал изгибается неконтактной силой F_b (рисунк 1):

$$Q|_l = F_b \quad (2)$$

где Q – внутренние поперечное усилие, а l – длина вала.

Особенностью напряженного состояния системы ролик-вал данной является то, что если напряженное состояние ролика является чисто контактным, то в вале, помимо контактных напряжений, также действуют напряжения, обусловленные изгибающей силой F_b (изгиб от действия контактной нагрузки F_c учитывать не будем).

Напряженное состояние при контакте

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонентов напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [3-5 и др.]. Определение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

В силовой системе с учетом трения соприкасающихся тел имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами. В общем случае по площадке контакта распределены нормальные $p(x, y)$ и касательные $q(x, y)$ к поверхности контакта усилия. Напряженное состояние в области контакта σ_{ij} представим как суперпозиция напряженных состояний $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, обусловленных соответственно нагрузками $p(x, y)$ и $q(x, y)$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} \quad (3)$$

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $M(x, y, z)$ при $z < 0$ полупространства при действии на поверхность нормальных усилий $p(x, y)$ проводится численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(B)}$ из фундаментального решения задачи Буссинеска $\sigma_{ij}^{(B)}$ о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [6,7]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{s(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \quad (4)$$

где $p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$, $\left\{ (\xi, \eta) / \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

Решение Бусинеска, в соответствии с [3,4] имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(B)} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5}, \quad \sigma_{xy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\} \\ \sigma_{xz}^{(B)} &= -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \quad \sigma_{yz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Необходимо учесть, что на поверхности полупространства упругие напряжения $\sigma_{ij}^{(hs)}$ не определены. Это обусловлено тем, что для точек $z = 0$ поверхности полупространства интегралы из (4). не сходятся в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки.

Расчет напряжений в любой точке $M(x, y, 0)$ поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий $p(x, y)$ проводится в соответствии со следующей общей формулой [66]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$ – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области $S(x, y)$.

В явном виде выражения (6) на основании [3-6] следующие:

$$\frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} -\frac{b+2va}{a+b} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} -\frac{a+2vb}{a+b} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{P_0} = \begin{cases} -(1-2\nu) \frac{b}{ae^2} \left[\frac{y}{ae} \operatorname{arth} \left(\frac{ex}{a} \right) - \frac{x}{ae} \operatorname{arctg} \left(\frac{ae y}{b^2} \right) \right] = H(x, y) & \text{при } H(x, y) < 0, \\ 0 & \text{при } H(x, y) > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{P_0} = 0, \quad \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{P_0} = 0.$$

Таким образом, напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$ в формуле (3) с учетом (4)-(7) можно представить в таком виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Расчет напряженного состояния $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий $q(x, y)$, также выполняется численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(C)}$ из решения задачи Черрути $\sigma_{ij}^{(C)}$ для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [6, 7]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{s(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (9)$$

где $q(\xi, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}$.

Решение задачи о действии сосредоточенной касательной силы Q_x (направленной вдоль оси x) на поверхность полупространства имеет следующий явный вид [3,4]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^3}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{yy}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3xy^2}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[\frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{zz}^{(C)} &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5}, \\ \sigma_{xy}^{(C)} &= \frac{Q_x}{2\pi} \left\{ -\frac{3x^2y}{\rho^5} + (1-2\nu) \left[-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2} + \frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2} + \frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3} \right] \right\}, \\ \sigma_{xz}^{(C)} &= -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{x^2z}{\rho^5}, \sigma_{yz}^{(C)} = -\frac{3Q_x}{2\pi} \frac{xyz}{\rho^5},\end{aligned}\tag{10}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Формула (3) с учетом (8) примет вид

$$\sigma_{ij} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \vee_z \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)}\tag{11}$$

На рисунках 2 и 3 в соответствии с (11) представлены распределения нормальных и касательных напряжений, отнесенных к p_0 , при действии эллиптически распределенных нормальных $p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ и касательных $q(x, y) = fp_0(x, y)$ контактных усилий (коэффициент трения $f = 0,5$, $b/a = 0,5$). Из рисунков видно значительное отличие распределений $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)} + \sigma_{xz}^{(\tau)}$ от распределений $\sigma_{xx}^{(n)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)}$ за счет действия силы трения, вызывающей появление знакопеременных напряжений $\sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(\tau)}$.

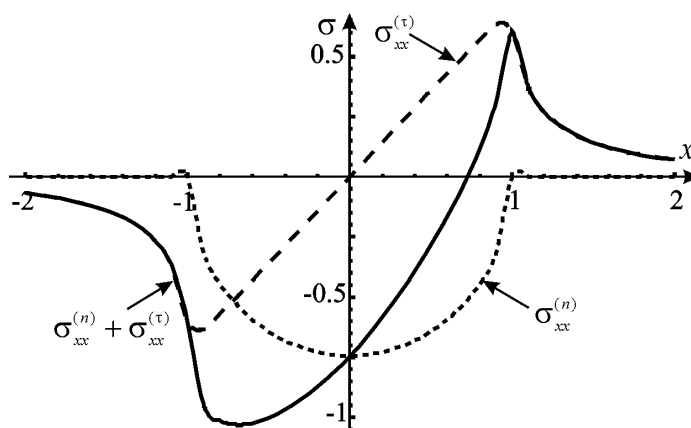


Рис. 2 – Распределение напряжений σ_{xx} на поверхности контакта при $z = 0, y = 0$

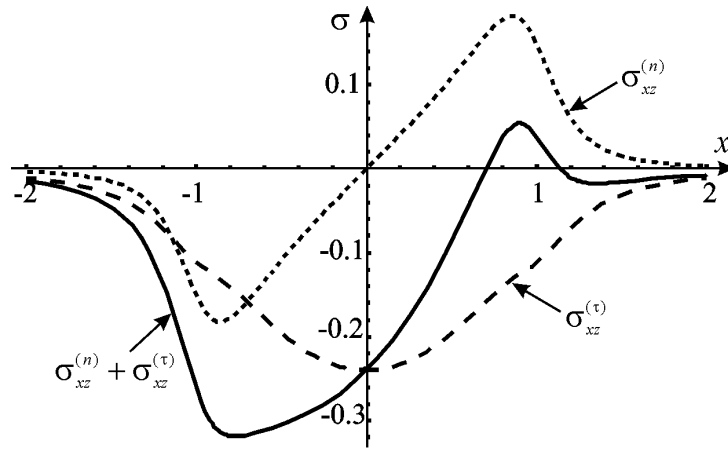


Рис. 3 – Распределение напряжений σ_{xz} под поверхностью контакта при $z=-0,3, y=0$

Объединенное напряженное состояние с учетом неконтактного изгиба

Напряженное состояние, вызванное действием силы F_b в плоскости $y=0$ (рисунок 1) определяется в соответствии с известными соотношениями [8, 9]:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(12r-x)z}{4(1+\nu)J}, \quad \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}(r^2-z^2), \quad \sigma_{xx}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = 0 \quad (12)$$

где $J = \frac{\pi R_2^4}{64}$, $F_b = 0.4p_0 \frac{4(1+\nu)J}{12r^2}$.

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением с учетом (8) и (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \vee_z \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[\iint_{S(\xi,\eta)} p(\xi,\eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi-x, \eta-y, z) d\xi d\eta \vee_z \sigma_{ij}^{(S)}(x,y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi,\eta)} q(\xi,\eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi-x, \eta-y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x,y,z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x,y,z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x,y,z). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку (13) строится как суперпозиция компонент $(\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)})$ напряжения, то имеется возможность анализа как общего, так и любого из частных случаев.

Рассмотрим, например, объединенное напряженное состояние вида

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(b)}. \quad (14)$$

Типичные примеры изменения поля локальных напряжений (деформаций), когда на него накладывается поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, представлены на рис. 4.

Из рис. 4 в видно, что хотя при $F_b < 0$ на верхней поверхности вала напряжения $\sigma_{xx}^{(b)} > 0$, однако в результате действия контактных сжимающих напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$ объединенные напряжения $\sigma_{xx}^{(n)} < \sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)} < 0$. Таким образом, с одной стороны опасные – приводящие к образованию магистральной трещины – растягивающие напряжения $\sigma_{xx}^{(b)}$ компенсируются сжимающими $\sigma_{xx}^{(n)}$.

Из рис. 4 в видно, что при $F_b > 0$ суперпозиция напряжений $\sigma_{xx}^{(b)} < 0$ и $\sigma_{xx}^{(n)} < 0$ приводит к увеличению сжимающих напряжений.

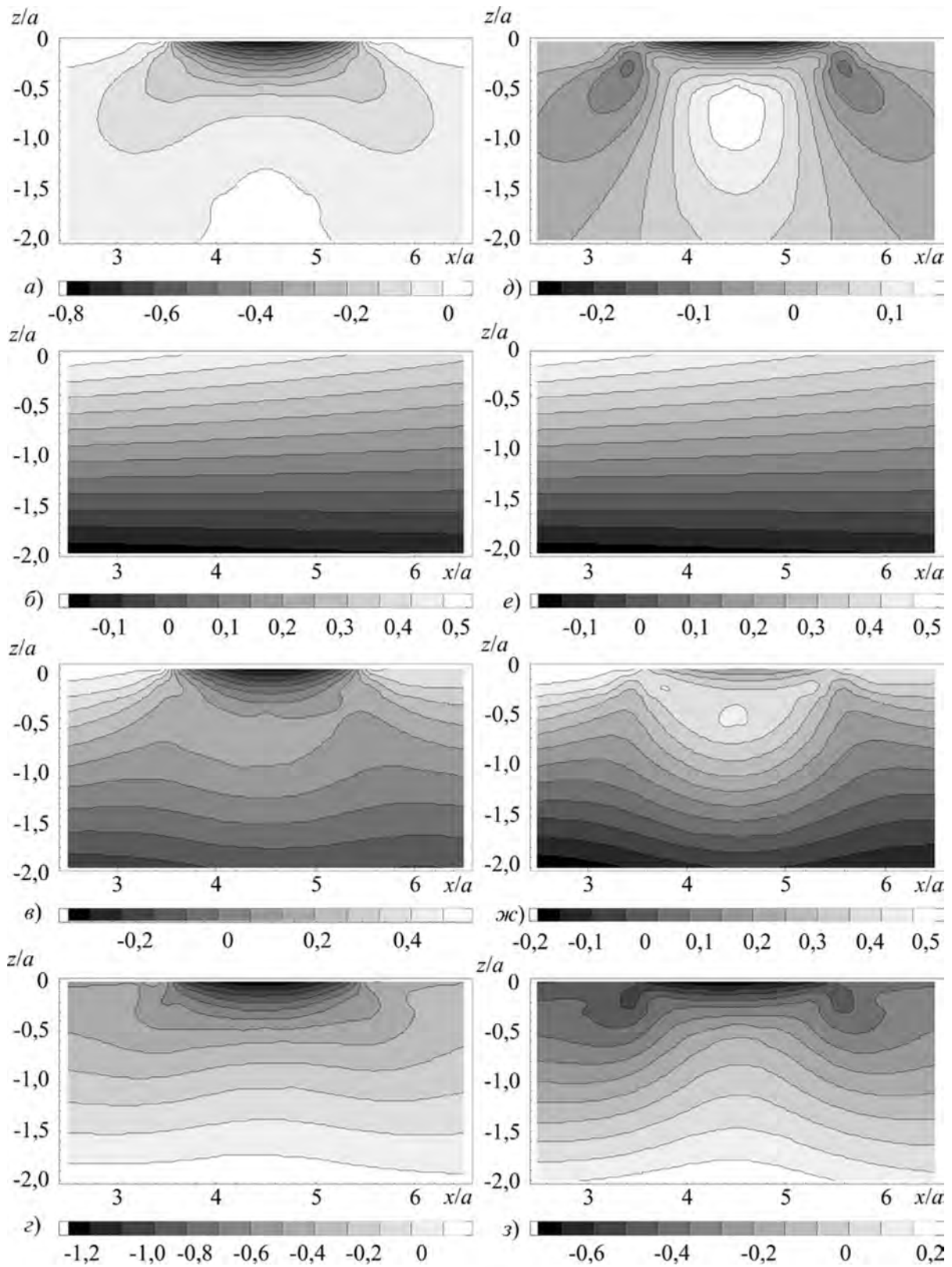


Рисунок 4 – Распределения напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$ (а), $\sigma_{xx}^{(b)}$ (б), $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)}$ ($F_b > 0$) (в), $\sigma_{xx}^{(n)} - \sigma_{xx}^{(b)}$ ($F_b < 0$) (з), отнесенных к p_0 , и деформаций $\epsilon_{xx}^{(n)}$ (д), $\epsilon_{xx}^{(b)}$ (е), $\epsilon_{xx}^{(n)} + \epsilon_{xx}^{(b)}$ ($F_b > 0$) (ж), $\epsilon_{xx}^{(n)} - \epsilon_{xx}^{(b)}$ ($F_b < 0$) (з), отнесенных к p_0 / E (E – модуль упругости), в окрестности контакта в плоскости $y = 0$ при $a / b = 0,5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sosnovskiy, L.A. *Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics)*/ L.A. Sosnovskiy. – Springer, 2004. – P. 424.
2. Сосновский, Л.А. *Механика износосталостного повреждения*. / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Johnson, K. L., “*Contact Mechanics*,” Cambridge University Press, 1985, 453 pp.
4. *Modern Tribology Handbook* / edited by Bharat Bhushan, CRC Press, 2000, – Vol. 1, – 765 pp.
5. Горячева, И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия* / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478с.
6. Журавков, М.А. *Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования* / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // *Вести НАНБ, сер. физ.-тех. н.*, 2008. – № 1. – С. 48–57.
7. Щербаков, С.С. *Трехмерное напряженно-деформированное состояние силовой системы диск-цилиндр в условиях контактного нагружения и объемного деформирования* / С.С. Щербаков // *X Белорусская математическая конференция: Тез. Докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3-7 ноября 2008 г. – Часть 2.* – Мн.: институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 152.
8. Тимошенко, С. П. *Теория упругости* / С. П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Работнов, Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов* / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. – 712 с.

РАЗРАБОТКА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ ТЕКСТИЛЬНЫХ ОТХОДОВ

Локтионов А.В., Жерносек С.В., Соколова А.С.

In this work the valuation of possibility of using non-woven fabrics flax Belarusian enterprises is given, the prospects of using textile waste and the calculation of kinematic parameters of the actuators in its processing are worded, the dynamics of interaction between needle sets with fibrous waste in the process of carding is explored, the calculation of kinematic parameters of the actuators is introduced.

Применение отходов текстильной промышленности позволяет решить проблемы рационального использования сырья, создания практически безотходных технологий, расширения ассортимента текстильных изделий и области применения нетканых полотен, уменьшения экономических потерь от накопления отходов, а также решения экологических проблем, связанных с их хранением и утилизацией. Нетканые материалы широко используются в различных отраслях: швейной, обувной, мебельной, медицинской, автомобильной, строительной и др.

Зарубежные производители для формирования нетканых материалов предлагают широкий спектр технологий и оборудования, во многих случаях отвечающих самым высоким требованиям. Высокая стоимость предлагаемого оборудования и сложность его адаптации к условиям отечественного производства являются предпосылкой разработки технологических аспектов формирования нетканых материалов из хлопковых, шерстяных волокнистых отходов, а также отходов химических волокон.

Для производства нетканых материалов и пряжи большой линейной плотности, применяются текстильные отходы различной природы, физико-механические свойства которых существенно влияют на качество и область применения готовых изделий. Текстильные отходы, пригодные для переработки в нетканые материалы и пряжу, а также изделия различного назначения образуются на разных этапах их производства и при переработке вторичных материальных ресурсов. В зависимости от состояния исходного сырья разрабатываются рекомендации по составу смесей для последующего технологического процесса их переработки.

В Республике Беларусь существуют благоприятные условия для широкого производства льна и изделий из него. Источниками сырья являются льноперерабатывающие предприятия, а также предприятия по получению и переработке химических волокон и нитей: ковровые объединения Бреста и Витебска, Пинское ПО «Полесье», Кобринская фабрика «Ручайка», ПКФ «Слоним», Оршанский льнокомбинат и другие; имеется большой опыт получения нетканых материалов. Однако, из-за отсутствия необходимых технологий и оборудования текстильные отходы не используются. При этом более 50% нетканых материалов, используемых промышленностью Беларуси, импортируется из-за рубежа. Предприятия-производители, используя местную сырьевую базу и при незначительной модернизации установленного оборудования, могут выпускать конкурентоспособную продукцию. Сегодня необходимо реструктуризировать ассортимент, выпускать тонкую, имеющую спрос у состоятельного населения, модную высококачественную льняную одежду и белье, обеспечить средний класс дешевыми льносодержащими тканями, более эффективно использовать отходы, образующиеся в процессе производства. Например, следует развивать возможности их нетекстильного использования – как нетканые материалы различного назначения, композиционные, тепло- и звукоизоляционные.

Особое значение в настоящее время во всем мире уделяется созданию новых синтетических волокон, обладающих уникальным сочетанием различных свойств. Российская компания C-Airlaid разработала технологию выработки целого ряда синтетических волокон, которые позволяют получать материалы с заданными физико-химическими характеристиками для швейной, обувной, мебельной, медицинской, автомобильной, строительной и др. отраслей.

Технологические отходы и вторичные материальные ресурсы составляют около 25% всего перерабатываемого в мире текстильного сырья. Необходимо дальнейшее совершенствование технологического процесса производства нетканых материалов, в частности, такого этапа, как кардочесание, при котором происходит разделение комплексов волокон на отдельные волокна, удаление сорных примесей и порочков, смешивание волокон и выравнивание волокнистого потока. Для получения качественного прочеса отходов, содержащих льняные волокна, необходимо исследовать исполнительные механизмы, осуществляющие переход волокон с приемного барабана на главный.

На рис. 1 представлена расчетная схема сил, действующих на волокно. Подвижная система координат (XOY) связана с вращающимся приемным барабаном 1.

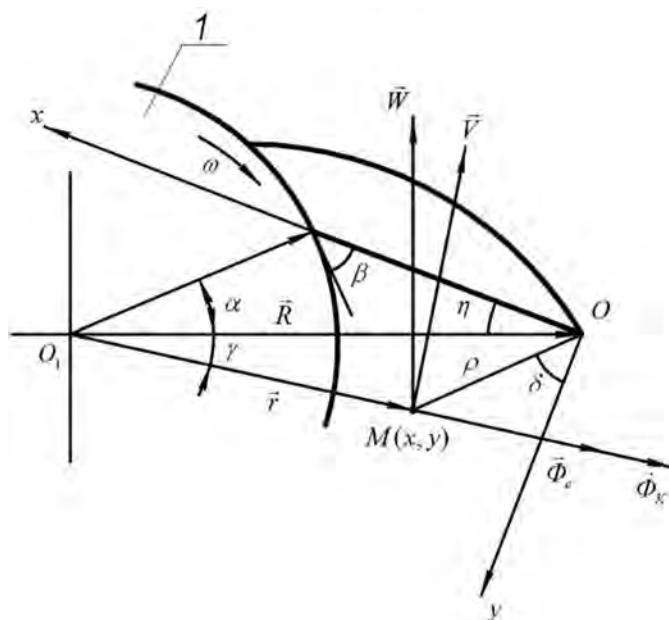


Рис. 1. Расчетная схема сил, действующих на волокно (точка M)

Движущееся волокно массы m рассматриваем как материальную точку M , текущие координаты которой определяются из выражений $x = \rho \sin \delta$, $y = \rho \cos \delta$, где ρ – радиус-вектор точки M , δ – угол между радиус-вектором точки M и осью OY . Дифференциальные уравнения относительного движения точки M для процесса кардочесания в проекции на оси координат XOY

$$\begin{cases} m\ddot{x} = W_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ m\ddot{y} = W_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sum \vec{F} = \vec{W}$ – сила давления воздушного потока; $\vec{\Phi}_e$ – переносная сила инерции; $\vec{\Phi}_k$ – сила инерции Кориолиса.

Давление воздушного потока \vec{W} находим из условия удержания волокна

зубьями приемного барабана (рис.2). На рис.2 $F_{тр} = \mu N$, где μ – коэффициент трения волокнистой массы о переднюю поверхность зуба гарнитуры; N – реакция передней поверхности зуба на волокнистую массу.

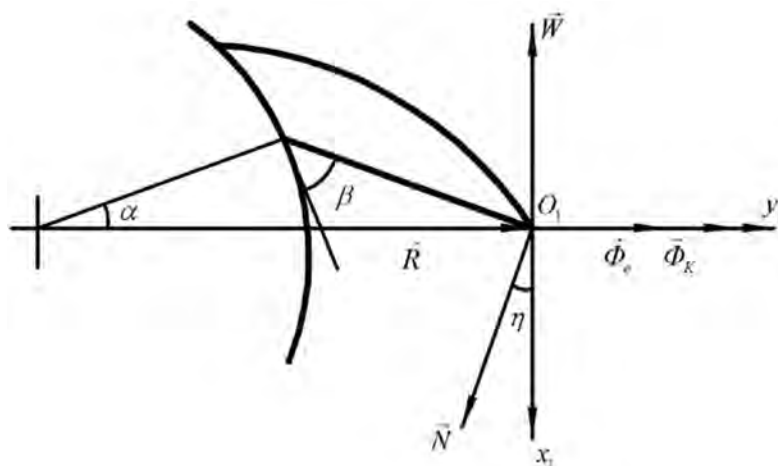


Рис. 2. Расчетная схема сил, действующих на зуб гарнитуры

При изучении процесса перехода волокон с главного на приемный барабан получена система дифференциальных уравнений, учитывающая зависимости координат x и y по оси зуба от угловой скорости ω приемного барабана, угла η , образуемого координатными осями, связанными с зубом и барабаном, коэффициента трения волокнистой массы μ о переднюю поверхность зуба гарнитуры и радиуса R вершины зуба гарнитуры[1]:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 x \cos \eta \sin \eta + \omega^2 y \cos^2 \eta + A, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{y} = \omega^2 y \cos \eta \sin \eta + \omega^2 x \sin^2 \eta + B, \end{cases} \quad (2)$$

где $A = -\frac{\mu\omega^2 R}{\sin \eta + \mu \cos \eta}$, $B = \frac{\omega^2 R}{\sin \eta + \mu \cos \eta}$, где μ – коэффициент трения волокнистой массы о переднюю поверхность зуба гарнитуры, η – угол между вектором \vec{N} и осью O_1X_1 , N – реакция передней поверхности зуба на волокнистую массу.

При решении системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (2) выполняются сложные математические расчеты по определению четырех постоянных интегрирования [1]. Необходимо разработать более простой и эффективный метод решения уравнений (2). Поэтому целесообразно иметь метод расчета кинематических механизмов, который позволил бы избежать сложных математических операций, в частности, нахождение постоянных интегрирования и получить математические модели рассматриваемого процесса, оценить степень влияния различных параметров оборудования (угол поворота, геометрия рабочих органов) и коэффициентов трения различных текстильных отходов на движение волокна. Предложен метод с использованием преобразований Лапласа, который удобен тем, что позволяет перейти от операции интегрирования к умножению, что значительно упрощает решение громоздких уравнений, в том числе и на ЭВМ.

Преобразованием Лапласа – это соотношение, ставящее функции вещественного переменного $x(t)$ в соответствие функцию комплексного переменного $X(s)$, где $s = \sigma + j\psi$ – комплексная переменная:

$$X(s) = L\{x(t)\},$$

где L – оператор Лапласа. При этом функция $x(t)$ называется оригиналом, а функция $X(s)$ – изображением.

Поскольку движение волокна определяется изменением координат X и Y во времени, положим, что в начальный момент времени волокно находится в точке с координатами $X = 0, Y = 0$. Входным параметром является координата Y , отражающая процесс растаскивания, а перемещение волокна по зубу задается, как выходной параметр, координатой X . Процесс расщипывания осуществляется в зависимости от движения волокна по зубу. Передаточные функции $W1$ и $W2$ в форме изображений Лапласа представляют дифференциальные уравнения, которые связывают текущие координаты X и Y материальной точки – элемента волокна [5].

По свойству о дифференцировании оригинала, дифференцирование функций \dot{x} и \dot{y} сводится к умножению функций $W1$ и $W2$ на комплексные переменные. После алгебраических преобразований система дифференциальных уравнений (2) имеет вид

$$\begin{cases} W1 = \frac{L^2 + 2\omega L - \omega^2 \cos \eta + \frac{\mu \omega^2 R}{\mu \cos \eta + \sin \eta}}{\omega^2 \cos^2 \eta}, \\ W2 = \frac{\omega^2 \sin^2 \eta}{L^2 + 2\omega L - \omega^2 \cos \eta \sin \eta - \frac{\omega^2 R}{\mu \cos \eta + \sin \eta}}. \end{cases} \quad (3)$$

Координаты X и Y определяются из уравнений [6]

$$X = \frac{W2}{1 - W1 \cdot W2}; Y = \frac{W1}{1 - W1 \cdot W2}. \quad (4)$$

При анализе полученных математических моделей (3) и (4) следует учитывать тот факт, что при измерениях физических процессов и явлений в реальных условиях возникает ситуация, когда применение упрощенных моделей не приводит к желаемому результату. Необходимо проводить анализ средних значений изучаемых физических параметров. Чтобы принятая математическая модель являлась адекватной, необходимо выделить область или множество, которое состоит лишь из тех значений выходных параметров изучаемой системы, погрешность которых не превышает предельно допустимых. Во многих задачах для этого целесообразно сужать интервал времени, который непосредственно отражает изучаемый физический процесс.

Процесс расщипывания характеризуется высокой интенсивностью. Силы, действующие очень короткий промежуток времени, в механике корректно рассматривать как силы, действующие мгновенно, но имеющие конечный импульс. При аналитическом описании данные силы представлены в виде импульсной функции, рассматриваемой в короткий промежуток времени. Выделим массу m непрерывно движущегося волокна, сосредоточенную в точке M пространства R_n . Начало координат совместим с положением точки M в начальный момент времени. Тогда силы, действующие на волокно, будут приложены в точке M . Их поведение в окрестности точки M представлено кусочно-непрерывной функцией σ_1 (рис. 3), действующей в промежуток времени t от θ до h , а в остальных случаях равной нулю [2].

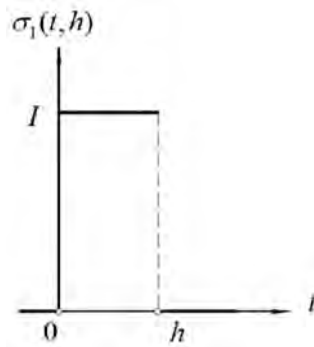


Рис. 3. Зависимость кусочно-непрерывной функции от времени

Кусочно-непрерывную функцию $\sigma_1(t, h)$ можно записать в виде:

$$\sigma_1(t, h) = \frac{1}{h} [\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I, & 0 \leq t \leq h, \\ 0, & h < t \end{cases} \quad (5)$$

где I – импульс функции $\sigma_1(t, h)$.

При $h \rightarrow 0$ функция $\delta(t)$ определяется как предел функции $\sigma_1(t, h)$:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1(t, h). \quad (6)$$

Функция $\delta(t)$ отражает характер действия мгновенных сил приложенных к точке M в короткий промежуток времени взаимодействия волокна и поверхности зуба. Данная функция является обобщенной и ее нельзя рассматривать как функцию, заданную общим определением математического анализа [4, 7]. На рис. 4 представлен график обобщенной функции $\delta(t)$, полученной при предельном переходе от кусочно-непрерывной функции σ_1 [3]:

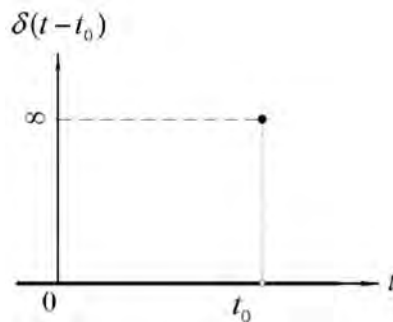


Рис. 4. Зависимость обобщенной функции $\delta(t)$ от времени

После подстановки уравнений (3) и (4) с учетом (6) в математический пакет MAPLE получены координаты X и Y при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,092 \sinh(-54,172t) e^{-4,49t}, \\ y(t) &= 0,08 \cdot \delta(2, t) + 0,718 \cdot \delta(1, t) - \\ &- 6379,171 \sinh(-54,172t) e^{-4,49t} + 190,785 \cdot \delta(t). \end{aligned} \quad (7)$$

При решении приняты следующие расчетные параметры: высота зуба пильчатой гарнитуры – 40 мм; угол наклона передней грани β – 60° ; радиус вершин зуба гарнитуры R – 103 мм; угол η между вектором \vec{N} и осью O_1X_1 – $28^\circ 50'$, угловая

скорость приемного барабана $\omega - 4,49 \text{ с}^{-1}$, коэффициент трения волокнистой массы о переднюю поверхность зуба гарнитуры $\mu - 0,7$.

Уравнения (7), характеризующие процесс расщипывания, имеют достаточно простой вид по сравнению с решением системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (2). Установлено, что функция $Y(t)$ возрастает несколько медленнее, чем функция $X(t)$. При этом волокно стремится оторваться от гарнитуры приемного барабана – значительно снижается интенсивность взаимодействия гарнитуры с волокном и, как следствие, интенсивность расщипывания волокнистых отходов в зоне приемного барабана. Для стабилизации процесса расщипывания целесообразно создать дополнительный воздушный поток, который направлял бы разрабатываемые волокна в рабочую зону приемного барабана.

Решая систему уравнений (7), получим уравнение траектории $s(t)$ при движении материальной точки M (волокна), которое имеет вид

$$s(t) = 0,08 \cdot \delta(2,t) + 0,718 \cdot \delta(1,t) + 6379,171 \cdot \sinh(54,172 \cdot t) \cdot \exp(-4,49 \cdot t) + 190,786 \cdot \delta(t). \quad (8)$$

График траектории движения волокна $s(t)$, заданной выражением (8), представлен на рис. 5

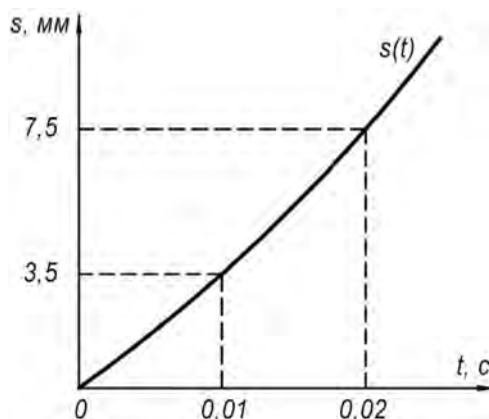


Рис. 5. Зависимость траектории $s(t)$ движения волокна от времени

Из графика (рис. 4) видно, что траектория движения точки M представляет собой возрастающую функцию, проходящую через точку $(0,0)$ и близкую к прямой.

Дифференцируя уравнения (7), получим проекции скорости на оси координат в виде

$$\begin{cases} v_x = 5 \cdot \cosh(54,172 \cdot t) \cdot \exp(-4,49 t) - 0,414 \cdot \sinh(54,172 \cdot t) \cdot \exp(-4,49 t), \\ v_y = 0,08 \cdot \delta(3,t) + 0,718 \cdot \delta(2,t) + 3,456 \cdot 10^5 \cdot \cosh(54,172 \cdot t) \cdot \exp(-4,49 t) - \\ - 28642,479 \cdot \sinh(54,172 \cdot t) \cdot \exp(-4,49 t) + 190,786 \cdot \delta(1,t). \end{cases} \quad (7)$$

При этом скорость точки M $v(t)$ определяется из выражения

$$v(t) = [25 + (0,078 \cdot \delta(3,t) + 0,718 \cdot \delta(2,t) + 345572,052 + 190,786 \cdot \delta(1,t))^2]^{1/2}. \quad (8)$$

Зависимость скорости движения волокна от времени представлена на рис. 6

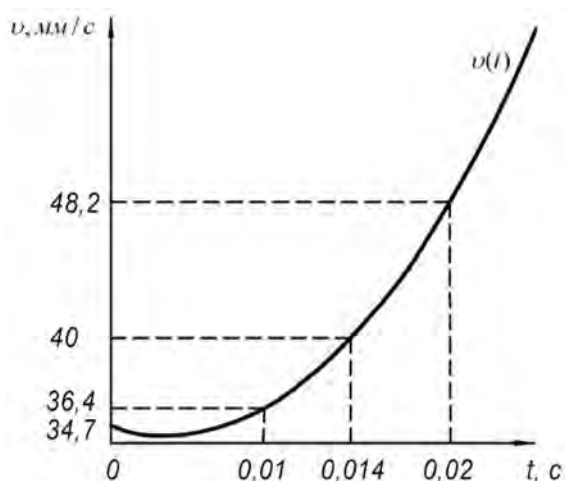


Рис. 6. Зависимость скорости движения волокна от времени

Из рис.6 зависимости скорости материальной точки M от времени t можно сделать вывод, что в начальный момент времени скорость волокна равна $v_0 = 34,7$ мм/с. Вид кривой $v(t)$ представляет часть параболы. Вначале график функции $v(t)$ является убывающим – скорость точки M несколько уменьшается. Этот промежуток характеризует время взаимодействия волокна и поверхности зуба. На данном отрезке времени существенное влияние оказывают силы трения волокна о металлическую поверхность зуба. В результате взаимодействия с зубом волокно приобретает значительную кинетическую энергию, выбрасывается из зоны разволокнения и с ускорением направляется в приемную зону.

С учетом (8), проекции ускорения точки M на оси координат определяются из уравнений

$$\begin{cases} a_x = 272.72 \cdot \sinh(54.172 \cdot t) \cdot \exp(-4.49 t) - 44.9 \cdot \cosh(54.172 \cdot t) \cdot \exp(-4.49 t), \\ a_y = 0.08 \cdot \delta(4, t) + 0.718 \cdot \delta(3, t) + 1.885 \cdot 10^7 \cdot \sinh(54.172 \cdot t) \cdot \exp(-4.49 t) - \\ - 3.103 \cdot 10^6 \cdot \cosh(54.172 \cdot t) \cdot \exp(-4.49 t) + 190.786 \cdot \delta(2, t). \end{cases} \quad (9)$$

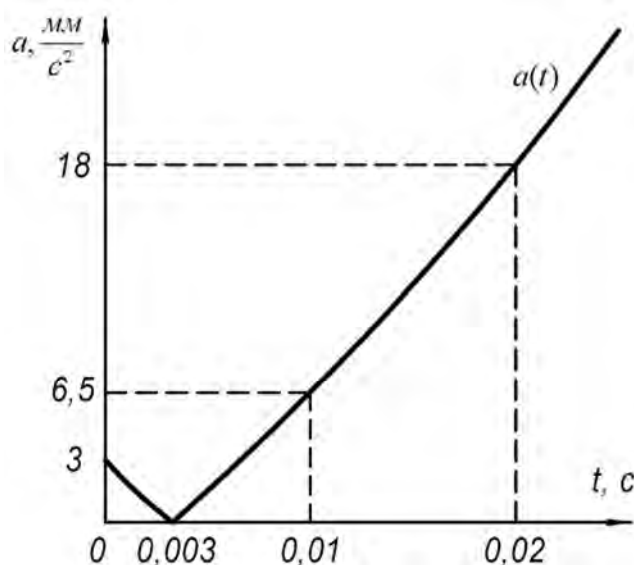


Рис. 7. График зависимости ускорения движения волокна от времени

Ускорение точки M от времени определяется из уравнения

$$\begin{aligned}
a(t) = & \{272.7195429 \cdot \sinh(54.17193557 t) \cdot \exp(-4.49 t) - 44.89985408 \cdot \\
& \cdot \cosh(54.17193557 t) \cdot \exp(-4.49 t)\}^2 + \{0.07997434730 \cdot \delta(5, t) + \\
& 0.7181696387 \cdot \delta(4, t) + 1.035015565 \cdot 10^9 \cdot \cosh(54.17193560 t) \cdot \exp(-4.49 t) - \\
& - 2.527399701 \cdot 10^8 \cdot \sinh(54.17193560 t) \cdot \exp(-4.49 t) + 190.7855020 \cdot \delta(3, t)\}^2]^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{10}$$

Зависимость ускорения движения волокна от времени представлена на рис. 7.

График $a(t)$ представляет собой ломаную кривую (рис. 7). Из рис. 7 следует, что в начальный момент времени ускорение волокна $a_0 = 3 \text{ мм} / \text{с}^2$. Затем функция $a(t)$ за короткий промежуток времени убывает до нуля (точка излома при $t = 0,003 \text{ с}$) и начинает возрастать. Сравнивая графики $v(t)$ и $a(t)$, можно отметить их одинаковое поведение в короткий отрезок времени скольжения волокна по поверхности зуба, где имеют место силы трения \bar{F}_{mp} волокна о переднюю поверхность зуба. Из графиков $v(t)$ и $a(t)$ следует, что в промежуток времени t от 0 до 0,003 с волокно скользит по поверхности зуба в направлении схода. Силы трения при этом стремятся удержать волокно. Максимальное значение сила трения \bar{F}_{mp} имеет в момент времени $t = 0,003 \text{ с}$. Затем волокно под действием значительного запаса энергии сходит с зуба, силы трения перестают оказывать влияние. Скорость и ускорение возрастают и материальная точка M (волокно) удаляется от поверхности зуба. На движение волокна при расщипывании влияют возникающие в зоне взаимодействия силы трения. На рис. 8 представлен график изменения силы трения в зависимости от угла η (рис. 2).

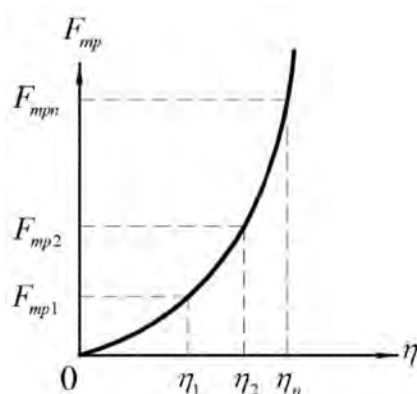


Рис. 8. График зависимости силы трения \bar{F}_{mp} от угла η

Следовательно, в процессе расщипывания при увеличении угла η (рис. 8) силы трения возрастают. Силы трения зависят не только от физических свойств соприкасающихся тел, но и от геометрических параметров зуба (рис. 1), в частности от угла η .

Выводы

1. Оценка и перспективы использования сырья в производстве нетканых материалов представляют интерес для предприятий Республики Беларусь, где имеется сырьевая база и заинтересованные потребители.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка с использованием постоянных интегрирования для расчета кинематических параметров исполнительных механизмов при переработке текстильных отходов имеют громоздкий вид и необходимы

сложные математические преобразования для составления программы их расчета на ЭВМ.

3. Расчет кинематических параметров исполнительных механизмов при переработке текстильных отходов с использованием преобразований Лапласа позволяет избежать сложных математических операций по нахождению постоянных интегрирования, разработать математические модели рассматриваемого технологического процесса и оценить степень влияния различных параметров оборудования (угла поворота, геометрии исполнительных механизмов) и коэффициентов трения текстильных отходов на движение волокна.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Локтионов. Динамика взаимодействия игл гарнитуры с волокнистыми отходами в процессе кардочесания / Локтионов А.В., Буткевич В.Г., Мачихо Т.А. // Вестник Полоцкого государственного университета «Фундаментальные науки». – Новополоцк: УО «ПГУ», 2004. - №11. - С. 98-102.
2. В.В. Ершова. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / Ершова В.В. Под ред. Азаматовой В.И. – Минск: «Вышэйш. школа», 1976. – 256 с.
3. В.А. Баженов. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / Баженов В.А, Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф., Коломиец Л.В. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.
4. В.С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике / Владимиров В.С. Изд-е 2-е, испр. и дополн. Серия: «Современные физико-математические проблемы». - М.: «Наука», 1979. – 320 с.
5. А.В. Локтионов. Исследование кинематических параметров исполнительных механизмов при переработке текстильных отходов с использованием преобразований Лапласа / Локтионов А.В., Мачихо Т.А., Жерносек С.В. // Материалы докладов ХLI научно-технической конференции преподавателей и студентов университета. – Витебск: УО «ВГТУ», 2008. – С.37-39.
6. Я.З. Цыпкин. Основы теории автоматического управления. / Цыпкин Я.З. - М.: «Наука», 1977.- 560 с.
7. С.В. Жерносек. Применение дельта-функции при переработке текстильных отходов / Жерносек С.В., Соколова А.С., Локтионов А.В. // Тезисы докладов ХLII научно-технической конференции преподавателей и студентов университета. – Витебск: УО «ВГТУ», 2009. - С. 41-42.

ЗАВИСИМОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ОТ ТИПА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕРА СЕТКИ.

Солошенко Д.С., Пронкевич С.А.

The article is devoted to comparison of the results of finite-element modeling and analysis of the influence of different finite elements and different types of nets on the end result of the program ANSYS.

Как известно, достоверность расчетов, выполняемых с применением метода конечных элементов, зависит от типа и размера применяемых в модели конечных элементов. Тип и размеры (густота сетки) конечных элементов определяются характером задачи, особенностями объекта моделирования и некоторыми другими обстоятельствами.

Рассмотрим различные варианты конечно-элементного моделирования стального уголка в ANSYS с целью сравнения полученных результатов.

Уголок (рис.1) фиксируется в отверстие 1, а к отверстию 2 приложена коническая нагрузка давления: 100 на 1000 Паскаль.

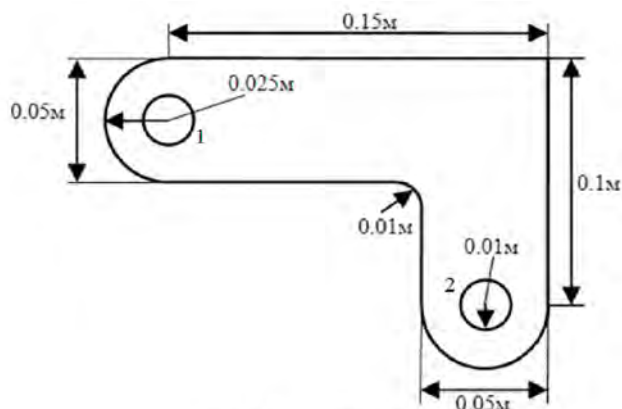


Рис. 1. Схема уголка.

Для плоской задачи используем следующие элементы:

PLANE42 – используется для двухмерного моделирования конструкций с объемным НДС. Элемент может использоваться в качестве плоского или осесимметричного элемента. Элемент определяется четырьмя узлами, имеющими две степени свободы в каждом узле: перемещения в направлении осей X и Y узловой системы координат.

PLANE82 – является версией двухмерного элемента PLANE42 II порядка. Этот элемент обеспечивает более точные результаты для смешанных сеток, полученных средствами автоматизированного создания токовых, и допускает нерегулярную форму элемента без существенной потери точности.

PLANE182 – используется для двухмерного моделирования объемных конструкций. Элемент может использоваться для моделирования плоского напряженного, плоского деформированного, обобщенного плоского деформированного или осесимметричного состояния. Элемент определяется четырьмя узлами, имеющими две степени свободы в каждом узле: перемещения в направлении осей X и Y узловой системы координат.

PLANE183 – является двухмерным элементом II порядка с восьмью узлами. Элемент имеет квадратичное представление перемещений и пригоден для моделирования нерегулярных сеток.

Устанавливаем *Real Constant* равный 0,01м – толщина пластины. Задаем в *Material Models* модуль Юнга равный $2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона равный 0,27. Уголок закрепляем по первому отверстию, а ко втоому прикладываем давление и разбиваем на сетку, пример изображен на рис. 2а. После расчета получается результат показанный на рис. 3а.

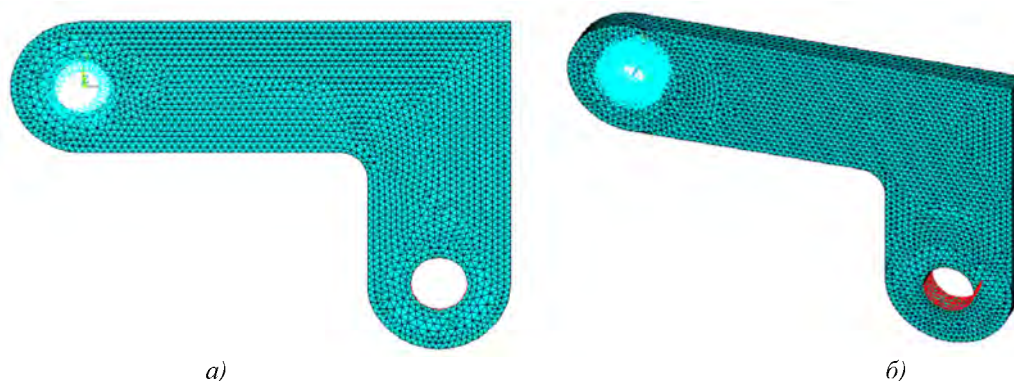


Рис. 2.Разбиение на сетку и приложение давления:
а) плоскому уголку, б) объемному уголку.

Для объемной задачи используем следующие элементы:

SOLID45 – используется для моделирования трехмерных конструкций. Элемент определяется восьмью узлами, имеющими три степени свободы в каждом узле: перемещения в направлении осей X, Y и Z узловой системы координат.

SOLID185 – используется для трехмерного моделирования объемных конструкций. Элемент имеет свойства пластичности, гиперупругости, изменение жесткости при приложении нагрузок, ползучести, больших перемещений и больших деформаций.

Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, закрепление и приложение давления идентичны плоской задаче. Пример разбиение на сетку и результата можно посмотреть на рисю2б и рис 3б соответственно.

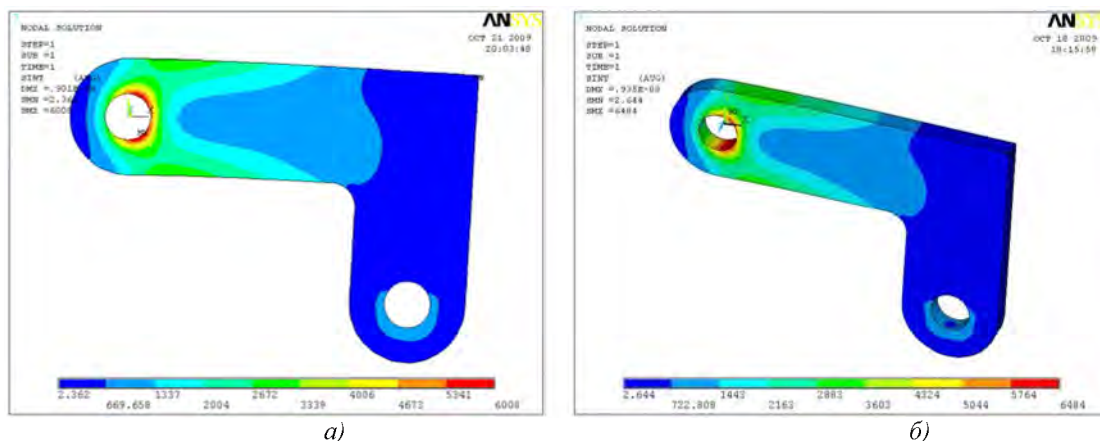


Рис. 3. Результаты расчетов для плоского (а) и объемного (б) уголка.

Для анализа помимо различных элементов брали и разного размера сетку: 0.005 м, 0.0025 м, 0.001м.

Как видно из таб.1 и графика (рис. 4) чем меньше размер конечных элементов, тем ближе результат расчета программы.

Также следует отметить, что на результат влияет не только тип и количество конечных элементов, но также и их вид треугольные или четырехугольные.

Имея на руках результат как в числовом, так и в графическом виде, замечаем, что такие конечные элементы как PLANE82 и PLANE183 дают один и тот же ре-

зультат в независимости от вида и количества элементов, а PLANE82 и PLANE182 дают один и тот же результат.

Таблица 1

Результаты расчета напряжений для плоской и объемной задачи;
результаты указаны в паскалях

Плоская задача				
Наименование элемента	Вид сетки	Размеры сетки, м		
		0,005	0,0025	0,001
PLANE42	Четырехугольная	6137	6120	6657
	Треугольная	5219	6008	6650
PLANE82	Четырехугольная	7330	7180	7157
	Треугольная	7009	7111	7145
PLANE182	Четырехугольная	5999	6536	6856
	Треугольная	5219	6008	6650
PLANE183	Четырехугольная	7330	7180	7157
	Треугольная	7009	7111	7145
Объемная задача				
SOLID45	Тэтраэдальный	5486	6484	7012
SOLID185	Тэтраэдальный	5486	6484	7012

только с треугольной сеткой. Что касается объемной задачи то результат полностью совпадает для SOLID45 и SOLID185 в независимости от размера сетки.

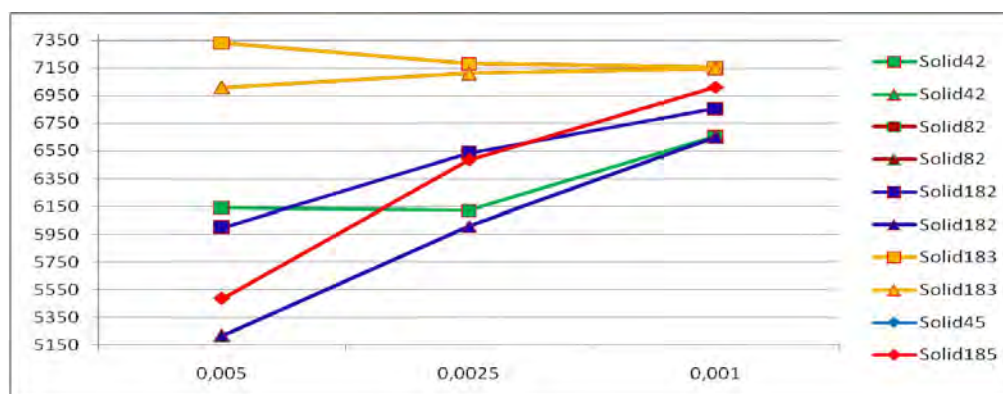


Рис. 4. График зависимости напряжения от размера сетки.

Основываясь на приведенных выше данных, можно сделать вывод о том, что результаты конечно-элементного моделирования существенно зависят от типа. Количество применяемых для моделирования конечных элементов может быть продиктован требуемым уровнем точности, а также техническими возможностями пользователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов, К.А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640с.
2. Каплун, А.Б., Морозов, Е.М., Олферьева, М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272с.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ЧЕХЛА ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СБОРКИ АТОМНОГО РЕАКТОРА

Ширвель П.И., Клус С.А., Глембоцкий А.В.

The method of solution has been proposed to solve the prismatic shells of the nuclear power plant reactor's under creep, thermal and radiation strains at mechanical loadings with the account of thermal and radiating creep.

Работа любого ядерного реактора атомной электростанции (АЭС) связана с постоянным мониторингом (контролем) безопасности, которая основана на безопасной работе его отдельных элементов, одним из которых является чехол тепловыделяющей сборки (ТВС), имеющей форму призматической оболочки (рис. 1), находящийся в сложных условиях: постоянное механическое воздействие, воздействие поля высоких температур и радиационного облучения. Под работоспособностью шестигранного чехла ТВС понимается: сохранение целостности чехла как на стадии облучения сборки в активной зоне, так и при перегрузке; отсутствие значительных формоизменений чехла, могущих помешать нормальной эксплуатации активной зоны ядерного реактора АЭС.

На первой стадии расчетного определения работоспособности проводится расчет напряжений и деформаций, а также формоизменений чехла в процессе нейтронного облучения, а затем следует оценка опасности полученного напряженно-деформированного состояния (НДС) по тому или иному критерию прочности. В результате чего устанавливается предельно допустимый ресурс ТВС ядерного реактора АЭС.

Отметим, что нижние сечения ТВС характеризуется относительно высоким давлением теплоносителя, низким уровнем температур и нейтронных флюенсов. По направлению движения теплоносителя снизу вверх давление его падает, однако при этом растет температура, увеличивается флюенс нейтронов. В связи с этим, очевидно, что работоспособность чехлов необходимо рассматривать для разных сечений по высоте при различных состояниях материала – упругого, упругопластичного и упруговязкого.

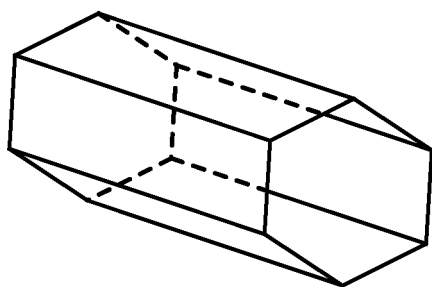


Рис. 1. Чехол ТВС, имеющий форму призматической оболочки

Каждую грань чехла ТВС можно рассматривать как прямоугольную пластинку, находящуюся под гидростатическим давлением, концы которой (по граням) закреплены таким образом, что не могут перемещаться в вертикальном направлении и поворачиваться, но их продольное перемещение не исключено.

Предполагается, что существующие градиенты температуры и распухание стали по длине и толщине чехла вносят существенный вклад в НДС оболочки. Безусловно, это допущение требует детального рассмотрения в каждом конкретном случае работы ТВС. В этом случае каждое сечение можно рассматривать как независимое, и согласно работе [1], если длина пластины H существенно больше ее ширины l ($H/l > 3$), правомерно перейти к полосе единичной ширины. Прогиб такой полоски описывается дифференци-

альным уравнением аналогичным уравнению прогиба изогнутой балки. При вычислении напряжений предполагаем, что поперечные сечения стержня остаются при изгибе плоскими. В связи с малостью касательных напряжений расчет при поперечном изгибе можно производить только по нормальным напряжениям.

С учетом вышеизложенного и в целях упрощения вычислений, заменим рассмотрение всей призматической оболочки на ее одну грань, имеющей форму тонкостенной пластины, добавив соответствующие усилия и моменты от действия соседних граней (рис. 2, рис. 3). Это допущение справедливо по причине того, что на чехол ТВС, имеющий форму призматической оболочки, действует одинаковая нагрузка во всех направлениях ее граней.

В случаях, когда прогиб ω пластины мал по сравнению с ее толщиной h , имеется возможность построения приближенной теории изгиба пластины под поперечной нагрузкой, основываясь на следующих допущениях [1]:

- в срединной плоскости пластины не испытывает никаких деформаций, при изгибе остается нейтральной;
- точки пластины, лежащие до загрузки на нормали к срединной поверхности, остаются в процессе изгиба на нормали к ее срединной поверхности;
- нормальными напряжениями в направлении поперечном к срединной плоскости пластины допустимо пренебрегать.

Рассмотрим действие физической нагрузки, распределенной по верхней поверхности пластины (рис. 2), без учета поля высоких температур и радиационного воздействия.

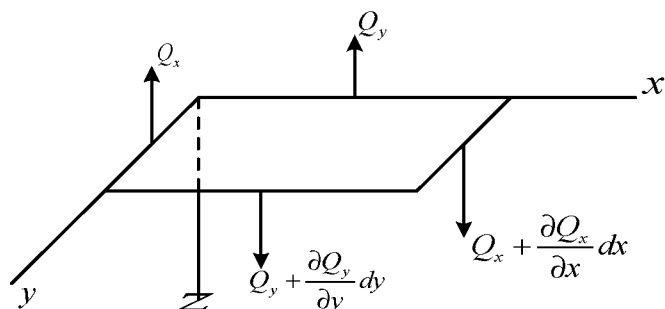


Рис. 2. Проекция всех действующих на пластину сил на ось z

Спроектируем все приложенные к пластине силы на ось z, получим следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0. \quad (1)$$

Откуда получаем исходное уравнение равновесия, записанное через приложенные нагрузки:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (2)$$

Для записи уравнения равновесия через моменты, возьмем моменты от всех действующих на элемент сил относительно оси x, как представлено на рис. 3.

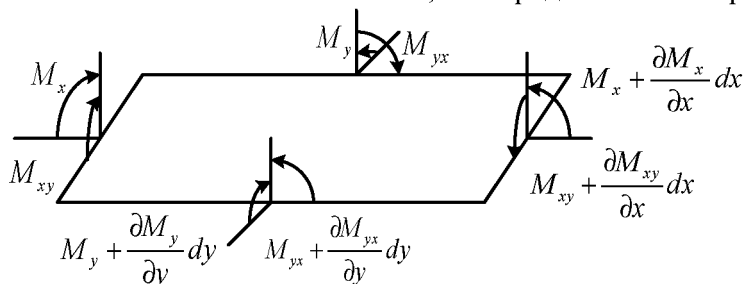


Рис. 3. Распределение моментов от всех действующих на пластину сил относительно оси x и y

Исходя из рис. 3, уравнение равновесия можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0. \quad (3)$$

Моментом нагрузки q и моментом, возникающим вследствие изменения силы Q_y , пренебрегаем как величинами более высокого порядка малости. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (4)$$

Аналогичным образом возьмем моменты относительно оси y , записав следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (5)$$

Исключив из этих уравнений перерезывающие силы Q_x и Q_y , получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (6)$$

Вследствие закона парности касательных напряжений имеем: $M_{yx} = -M_{xy}$, что приводит к сокращению величин $\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}$. Тогда в окончательной форме получаем следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (7)$$

Запишем соотношения Коши (геометрические уравнения), связывающие деформации с величиной прогиба исследуемой пластины в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для дальнейшего решения поставленной задачи, выведем физические уравнения. Учитывая, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчёте не учитываются, запишем систему физических уравнений в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22}] + \varepsilon_x^H, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \cdot \sigma_{11}] + \varepsilon_y^H. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Где неупругие деформации (объемные и механические), вызванные воздействием нелинейных факторов, определяются выражениями (10):

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_X^H &= \varepsilon_X^T + \varepsilon_X^S + \varepsilon_X^C; & \varepsilon_Y^H &= \varepsilon_Y^T + \varepsilon_Y^S + \varepsilon_Y^C; \\ \varepsilon_X^T &= \varepsilon_Y^T = \alpha T(X, Y, Z); \\ \varepsilon_X^S &= \varepsilon_Y^S = \frac{1}{3} S(T, \phi t). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения материала оболочки, T – предполагается заданной функцией распределения температуры от координат; $\varepsilon_x^c, \varepsilon_y^c$ – деформации ползучести в направлении оси x и y соответственно, S – функция радиационного набухания материала (задается на основе экспериментальных данных), зависящая от температуры, времени и заданного нейтронного потока (флюенса):

$$S = 4.9 \cdot 10^{-51} (\phi \cdot t)^{1.71} \cdot 10^{\frac{15490}{T} + \frac{5.98 \cdot 10^6}{(T)^2}}, \quad (11)$$

где ϕ – нейтронный поток (плотность нейтронного потока, флюенс нейтронов); t – время.

Запишем систему физических уравнений через внутренние силы и моменты. Выразим из системы уравнений (9) σ_x и σ_y :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_x - \varepsilon_x^H + \nu \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_y^H)], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_y - \varepsilon_y^H + \nu \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_x^H)]. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Выражения (12) устанавливают связь между деформациями в произвольной точке оболочки и напряжениями соответствующей точки срединной поверхности.

Для записи соотношения, связывающего напряжения с прогибами, появляющимися в пластине во время ее эксплуатации, подставим в уравнение (12) соответствующие соотношения Коши (8).

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \varepsilon_x^H + \nu \left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \varepsilon_y^H \right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left[-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \varepsilon_y^H + \nu \left(-z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \varepsilon_x^H \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Воспользуемся формулами для определения изгибающего момента:

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Применим формулы (14) к уравнению равновесия (7) получим уравнение равновесия, выраженное через прогибы:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (15)$$

Если учесть моменты от нелинейных сил, то в окончательной форме получим уравнение равновесия, описывающее поведение пластины, находящейся под действием физической нагрузки, поля высоких температур и радиационного воздействия с учетом тепловой и радиационной ползучести (16):

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - Eh \left(\alpha T + \frac{1}{3} S + \varepsilon_y^c \right). \quad (16)$$

Уравнение (16) позволит определить прогибы, возникающие в пластине, находящейся под действием вышеуказанных нагрузок, после чего будет возможно определить основные прочностные характеристики: деформации (8) и напряжения (12), возникающие в пластине, а, следовательно, и в призматической оболочке.

Также при определении нелинейных свойств, таких как ползучесть и радиационное распухание можно пользоваться зависимостями как это предлагается в [2-3].

Зададим деформации ползучести. Для рассматриваемой модели определения НДС используем одну из основных теорий, описывающих ползучесть материала – теорию течения [4-6]. По ней ползучесть топливного материала в реакторных условиях подчиняется степенному закону [2]:

$$\dot{\varepsilon}_u^c = A_f (T[x, y]) \sigma^{v_f}, \quad (17)$$

где A_f, v_f – компоненты ползучести топливного материала. При известном законе изменения интенсивности скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_u^c = f(\sigma_u, t, T[x, y], \Phi(T[x, y], \phi t))$, скорости деформации ползучести на каждом временном шаге определим из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} (\sigma_x - \sigma), & \dot{\varepsilon}_{xy}^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} \sigma_{xy}; \\ \dot{\varepsilon}_y^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} (\sigma_y - \sigma), & \dot{\varepsilon}_{yz}^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} \sigma_{yz}; \\ \dot{\varepsilon}_z^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} (\sigma_z - \sigma), & \dot{\varepsilon}_{zx}^c &= \frac{3\dot{\varepsilon}_u^c}{2\sigma_u} \sigma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

или в сокращенной форме: $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_u^c}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma)$, где $\dot{\varepsilon}_u^c$ – интенсивность скоростей деформации ползучести, $\dot{\varepsilon}_x^c, \dot{\varepsilon}_y^c, \dot{\varepsilon}_z^c, \dot{\varepsilon}_{xy}^c, \dot{\varepsilon}_{yz}^c, \dot{\varepsilon}_{xz}^c$ – компоненты скоростей деформаций ползучести.

Зная компоненты скоростей деформации ползучести (18) и функцию зависимости от времени для установившейся ползучести, вычисление компонент ползучести можно произвести по выражениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijn}^c &= \varepsilon_{ij(n-1)}^c + \Delta_n \varepsilon_{ij}^c; & \Delta_n \varepsilon_{ij}^c &= \dot{\varepsilon}_{ij(n-1)}^c \Delta_n t; \\ \dot{\varepsilon}_{ij(n-1)}^c &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_u^{(n-1)}}{\sigma_{u(n-1)}} s_{ij}; & \dot{\varepsilon}_u^c &= f(\sigma_u, t, T[r, \theta], \Phi); \end{aligned} \quad (19)$$

При решении задачи с учетом ползучести призматической оболочки ТВС используется схема описанная выше: рассматривается задача установившейся ползучести пластинки при продольно-поперечном изгибе. При решении принимаются следующие допущения:

- сечения при деформировании остаются плоскими;
- свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы;

- основные гипотезы теории течения сохраняются и под облучением во внутриреакторных условиях.

Таким образом, полученное уравнение (16) решаем при времени $t=0$, когда деформации ползучести отсутствуют, т.е. в начальный момент времени $\varepsilon_x^c = \varepsilon_y^c|_{t=0} = 0$. Определяем ω . Затем определяем главные напряжения и главные деформации, возникающие в пластине. Закон ползучести материала призматической оболочки ТВС с учетом облучения предполагается известным. Используя шаговый метод по времени определяем деформации ползучести на n -ом шаге по времени по выражениям (19) и строим тензоры деформаций и напряжений с пересчетом характеристик НДС через промежуток Δt для учета деформации ползучести. И с дальнейшей оценкой НДС призматической оболочки ТВС ядерного реактора АЭС по тому или иному критерию.

Как видно, для учета влияния нелинейных эффектов (неравномерное распухание стали, температурные градиенты по высоте, механические деформации ползучести) требуется новая постановка задачи. Получить решение такой задачи в аналитическом виде не представляется возможным из-за влияния многих факторов, поэтому необходимо использование численных методов. Тогда следующим этапом исследований станет определение прогибов, деформаций и напряжений, возникающих в призматической оболочке, с помощью одного из приближенных численных методов. После чего можно будет описать полную картину НДС чехла тепловыделяющей сборки атомного реактора, что позволит определить сроки эксплуатации и предельные нагрузки, возникающие в ТВС во время работы реактора.

Благодарности

Авторы благодарят д.ф.-м.н., профессора И.С.Куликова и д.т.н., профессора Б.Е.Тверковкина за плодотворные обсуждения и дискуссии в ГНУ «ОИЭЯИ-Сосны» НАН Беларуси.

Работа выполняется по гранту государственной программы научных исследований на 2009г. Финансирует: Министерство образования Республики Беларусь (номер госрегистрации: №2009487). Тема: «Напряженно-деформированное состояние тонкостенных цилиндрических и призматических оболочек в условиях ядерных реакторов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
2. Куликов И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин.- Мн.: Наука и техника,1984. – 104с.
3. Куликов И.С., Прочность элементов конструкций при облучении /И.С. Куликов, Нестеренко, Б.Е. Тверковкин.- Минск: Наука и техника, 1990.– 144с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.:Наука. 1979. 744с.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. -М. Машиностроение, 1975. - 400 с.
6. Малинин Н.Н. Основы расчетов на ползучесть. -М., Машгиз, 1948, 120 с.

НДС ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И НЕЙТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОЙ И РАДИАЦИОННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Клус С.А., Ширвель П.И., Левчук А.В.

Creep strength of cylindrical shell under irregular temperature and radiation. The numerical solution has been proposed to solve the strength problem for the cylindrical shell under creep, thermal and radiation strains at nuclear power plant action.

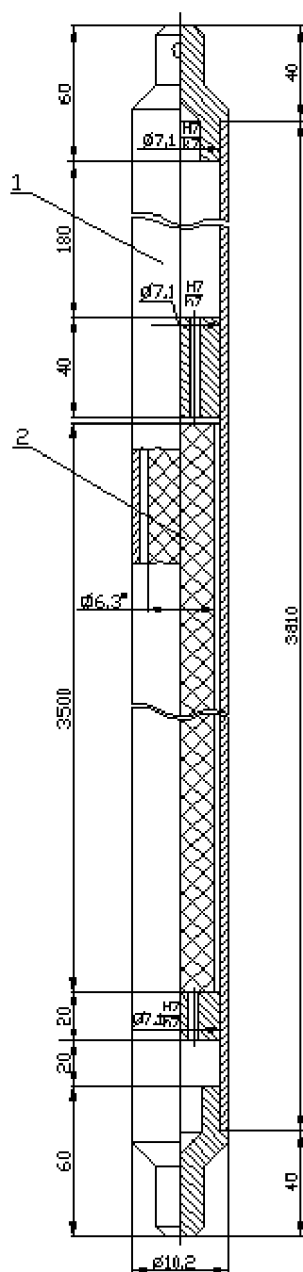


Рис. 1 Твэл: 1- защитная оболочка; 2- топливный сердечник.

Оболочка тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) ядерного реактора (рис. 1) атомной электростанции (АЭС) представляет собой слой конструкционного материала, непосредственно прилегающего к ядерному топливу. Она предназначена для предохранения сердечника от воздействия химически активной среды и удержания продуктов деления, а также для исключения возможности вымывания топлива теплоносителем и для обеспечения механической прочности твэлов. Причем главным требованием, предъявляемые к оболочкам реакторов, является длительное сохранение герметичности. Отметим, что конструкция оболочки и ее толщина должны обеспечивать устойчивость под действием внешнего давления теплоносителя, прочность при термических, изгибных напряжениях, и напряжений от давления газообразных продуктов деления и действия распухающего топливного сердечника, приходящего в контакт с оболочкой, коррозии под напряжением. В соответствии с этим к материалам оболочки предъявляются следующие требования: коррозионная устойчивость в среде теплоносителя при рабочих температурах, радиационная стабильность, совместимость с материалом сердечника, малое поперечное сечение, высокие механические свойства, доступность использования, хорошая теплопроводность, высокая температура плавления.

Отметим, что оболочка твэла является также наиболее ответственной конструкционной деталью активной зоны реактора, находящейся в очень сложных тепловых, механических, радиационных и химических условиях эксплуатации. В то же время, обладая, как правило, стенками относительно малой толщины, оболочки весьма чувствительны к внутренним и наружным дефектам. Требования к материалу оболочки твэла весьма многообразны, но среди них можно выделить четыре главных: минимальный паразитный захват нейтронов; механическая надежность, постоянство формы и размеров оболочки; высокая теплопроводность, обеспечивающая теплопередачу без чрезмерно высоких термических напряжений в оболочке; коррозионная и эрозионная стойкость оболочки в теплоносителе и в контакте с ядерным горючим твэла.

Высокая теплопроводность материала оболочки необходима, прежде всего, для того,

чтобы обеспечивать минимальный возможный перегрев самой оболочки и горячего по сравнению с температурой теплоносителя. С теплопроводностью материала оболочки непосредственно связана величина термических напряжений в оболочке, которые могут достигать 100-250 МПа. При низкой теплопроводности материала расчетная толщина оболочки часто оказывается настолько малой, что необходимая механическая надежность оболочки не обеспечивается. Увеличение же толщины оболочки, ухудшает теплопередачу, приводит к нежелательному увеличению термических напряжений в оболочке, к общему перегреву твэла. Внутренние напряжения при неблагоприятных условиях могут привести к деформации (например, искривлению), растрескиванию горячих и конструкционных материалов, вызвать резкое повышение температуры и разрушение оболочек. Степень изменений, происходящих в оболочках под влиянием перечисленных факторов, зависит от интенсивности и длительности нейтронного облучения, температуры облучения и характера ее изменения в процессе работы реактора, от исходной структуры и свойств материалов оболочек, от свойств теплоносителя и его гидравлических характеристик.

Одним из важных следствий эксплуатации оболочки твэла является возникновение внутренних напряжений, как в материалах активного объема, так и в оболочках (рис. 2). Появление внутренних напряжений связано с действием внешних статических, динамических и вибрационных нагрузок, со структурными изменениями под облучением, с неодинаковым температурным уровнем отдельных участков оболочек вследствие неравномерности энерговыделения по объему, с температурными градиентами по сечению оболочки, возникающими благодаря наличию тепловых потоков от горячего к теплоносителю, а также с различием в величине коэффициентов термического расширения горячего и оболочки, а также в распухании топливного стержня и оболочки [1].

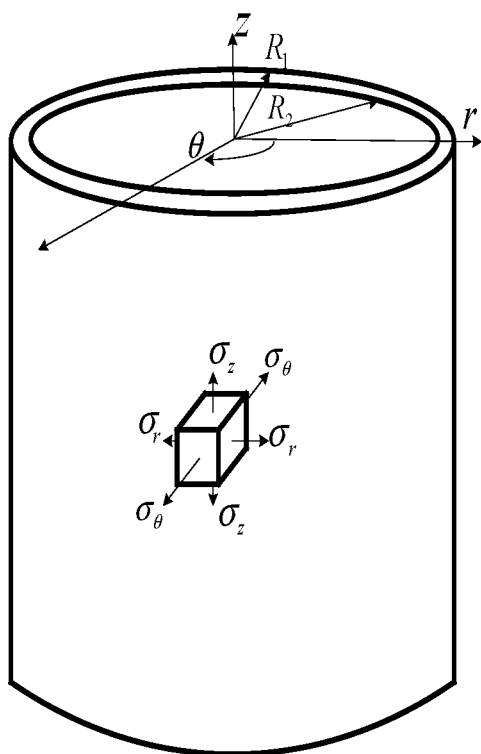


Рис. 2. Распределение напряжений в оболочке твэла

Изучение характера и степени возможных повреждений оболочек составляет одну из самых сложных проблем. Одним из способов решения является исследование НДС с целью проверки надежной работоспособности конструкции. Вопросом расчета активных зон ядерных реакторов в настоящее время уделяется значительное внимание. Данные элементы имеют, как правило, либо цилиндрическую геометрию и подвержены значительным механическим, тепловым и радиационным нагрузкам. Отметим, что степень необратимых изменений, происходящих в оболочках под влиянием перечисленных факторов, зависит от интенсивности и длительности нейтронного облучения, температуры облучения и характера ее изменения в процессе работы реактора, от исходной структуры и свойств материалов оболочек, от свойств теплоносителя и его гидравлических характеристик.

К настоящему времени выполнен значительный объем работ по этому направлению (Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко, В. В. Попов, А. А. Тутнов, В. В. Ткачев, И. С. Куликов, Geittus J. H., Lassmann K., Nagato K., Takikawa N., Rashid J. R.). Однако все разработанные модели для определения НДС защитных

элементов имеют, как правило, либо цилиндрическую геометрию и подвержены значительным механическим, тепловым и радиационным нагрузкам. Отметим, что степень необратимых изменений, происходящих в оболочках под влиянием перечисленных факторов, зависит от интенсивности и длительности нейтронного облучения, температуры облучения и характера ее изменения в процессе работы реактора, от исходной структуры и свойств материалов оболочек, от свойств теплоносителя и его гидравлических характеристик. К настоящему времени выполнен значительный объем работ по этому направлению (Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко, В. В. Попов, А. А. Тутнов, В. В. Ткачев, И. С. Куликов, Geittus J. H., Lassmann K., Nagato K., Takikawa N., Rashid J. R.). Однако все разработанные модели для определения НДС защитных

оболочек базируется на тех или иных упрощениях, поэтому расчеты носят достаточно приближенный характер. Вообще для тел, находящихся в условиях нестационарного неравномерного нагрева и радиационного облучения и изготовленных из конструкционных материалов с физически нелинейными свойствами (пластичность и ползучесть), в настоящее время нет общепринятой теории напряженно-деформированного состояния при механических нагрузках. Поэтому цель, которая преследуется авторами, заключается в том, чтобы на основе принципов и методов механики деформированного твердого тела представить теорию напряженно-деформированного состояния для тонкостенной цилиндрической оболочки при механических нагрузках с учетом внутриреакторных условий.

В рассматриваемой постановке задачи присутствуют радиационное распухание оболочки. В общем случае оно представляет собой изменение объема оболочки под действием потока быстрых нейтронов. Действие радиационного распухания значительно изменяет картину распределения деформаций и напряжений. А термическое воздействие, в данной задаче, представляет собой неравномерный нагрев тонкостенной цилиндрической оболочки. Помимо этого от воздействия радиации и высоких температур в оболочке так же возникают необратимые деформации ползучести, которые существенно изменяют картину напряженно-деформированного состояния оболочки с течением времени.

Для компонент деформации и изменений кривизны срединной поверхности оболочки, и перемещений ее срединного слоя имеют место следующие приближенные соотношения:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \frac{u_2}{\partial \beta} + \frac{\omega}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}; \quad \chi_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - u_2 \right); \quad \chi_{12} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - u_2 \right) \quad (2)$$

Для цилиндрической оболочки во внутриреакторных условиях, компоненты деформаций и напряжений в общем виде связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon^{(z)}_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}}{E} + \varepsilon_{11}^T + \frac{1}{3} \varepsilon_{11}^S + \varepsilon_{11}^c; \quad (3)$$

$$\varepsilon^{(z)}_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}}{E} + \varepsilon_{22}^T + \frac{1}{3} \varepsilon_{22}^S + \varepsilon_{22}^c.$$

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} + \frac{12M_{11}z}{h^3}; \quad \sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} + \frac{12M_{22}z}{h^3}. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= D_N \left(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - (1+\nu)(\varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{11}^S + \varepsilon_{11}^c) \right) \\ N_{22} &= D_N \left(\nu \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - (1+\nu)(\varepsilon_{22}^T + \varepsilon_{22}^S + \varepsilon_{22}^c) \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= D_M \left(\chi_{11} + \nu \chi_{22} - (1+\nu)(\chi_{11}^T + \chi_{11}^S + \chi_{11}^c) \right) \\ M_{22} &= D_M \left(\nu \chi_{11} + \chi_{22} - (1+\nu)(\chi_{22}^T + \chi_{22}^S + \chi_{22}^c) \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассмотрим оболочку твэла под воздействием поля высоких температур и нейтронного потока, приводящих к появлению тепловой и радиационной ползучести. В качестве конкретного примера будем рассматривать напряженно-деформированное состояние оболочки твэла, изготовленной из стали ОХ16Н15МЗБ (316L – зарубежный аналог). Оболочка внутренним радиусом $R_1 = 0,003$ м и внешним радиусом $R_2 = 0,0033$ м находится под действием: внутренних $P_B = 7,5$ МПа и внешних $P_H = 0,1$

МПа нагрузок в условиях объемных термических $T(r)$ и радиационных $S(T(r), \phi t)$ деформаций со следующими данными: $E = 2,10^5$ МПа, $T(R_1) = 300(573)^\circ\text{C}(K)$, $T(R_2) = 600(873)^\circ\text{C}(K)$, $\alpha = 18,3 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$. $S(T(r), \phi t)$ – функция радиационного распухания, зависящая от температуры, времени и заданного нейтронного потока:

$$S(T(r), \phi t) = 4,9 \cdot 10^{-51} (\phi t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T(r)} + \frac{5,98 \cdot 10^6}{(T(r))^2}} \quad (7)$$

Основная задача работы состоит в получении системы разрешаемых уравнений математической модели механических процессов в оболочке при наличии объёмных изменений и физических нелинейных эффектов. При рассмотрении задачи НДС оболочки сделаем некоторые допущения:

- перемещения и деформации оболочки малы (значительно меньше единицы);
- радиальная, тангенциальная и продольные оси оболочки (Z, θ, X) являются главными;
- температура оболочки считается заданной – $T(Z, \theta, X)$.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки (рис. 3), находящейся под действием физических нагрузок, поля высоких температур и нейтронного облучения с учетом тепловой и радиационной ползучести. Из симметрии можно заключить, что сдвигающие силы $N_{x\phi} = N_{\phi x}$ обращаются в данном случае в нуль. Точно также, следуя из симметрии, обнаруживается, что поперечные силы Q_ϕ обращаются в нуль. Также на основании симметрии крутящие моменты $M_{x\phi} = M_{\phi x}$ обращаются в нуль.

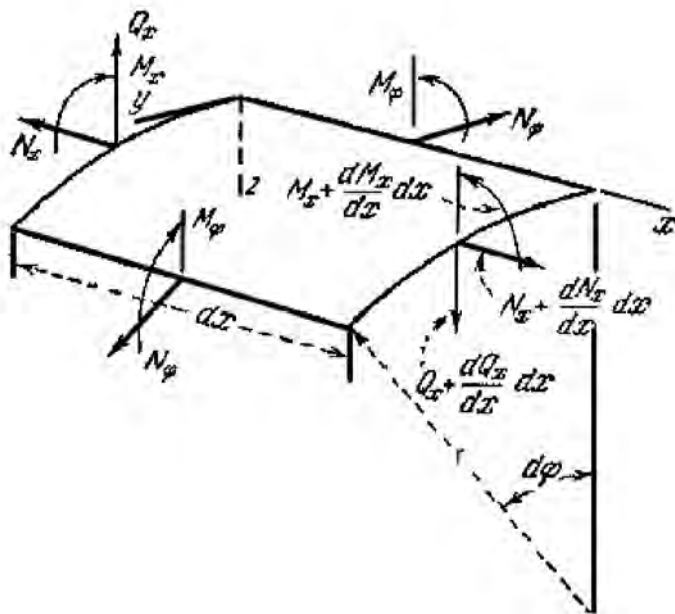


Рис. 3. Проекция сил и моментов сил в тонкостенной цилиндрической оболочке для вывода уравнения равновесия

Спроектируем силы на оси x и z и найдём моменты сил относительно оси y . Положим, что внешние силы действуют только лишь по нормали к поверхности оболочки.

С учетом вышесказанного система уравнений равновесия принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} \cdot r \cdot dx \cdot d\phi = 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} \cdot r \cdot dx \cdot d\phi + N_\phi \cdot dx \cdot d\phi + q \cdot r \cdot dx \cdot d\phi = 0, \\ \frac{dM_x}{dx} \cdot r \cdot dx \cdot d\phi - Q_x \cdot r \cdot dx \cdot d\phi = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Откуда получаем исходное уравнение равновесия, записанное через приложенные нагрузки и образуемые моменты:

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} = 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\varphi}{r} + q = 0, \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из первого уравнения системы (9) следует, что $N_x = const = 0$. Влиянием сил N_x пренебрегаем. Тогда уравнение равновесия представится в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\varphi}{r} = -q, \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Продифференцируем второе уравнение системы уравнений (10) по x , получим следующее соотношение:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = \frac{dQ_x}{dx} \quad (11)$$

Подставим уравнение (11) в первое уравнение системы (10), получим соотношение:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{r} = -q \quad (12)$$

Запишем величины в (12) через индексы. Получим следующее выражение:

$$\frac{d^2M_{11}}{dx^2} + \frac{N_{22}}{r} = -q \quad (13)$$

Запишем геометрические уравнения (соотношения Коши). Из симметрии следует, что v – смещение в окружном направлении обращается в нуль, поэтому принимаем во внимание только u и w для связи тензора деформаций и вектора перемещений в (1):

$$\varepsilon_{11} = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{w}{r}; \quad \chi_{11} = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (14)$$

Выведем физические уравнения. Учитывая, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчёте не учитываются, запишем систему физических уравнений (3) в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}}{E} + B(r) + \varepsilon_{11}^c; \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}}{E} + B(r) + \varepsilon_{22}^c; \end{cases} \quad (15)$$

Где функция $B(r)$:

$$B(r) = \alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi t] \quad (16)$$

Отметим, что одновременно с неравномерным нагревом и воздействием нейтронных потоков элементы активных зон ядерных реакторов испытывают такие процессы, как тепловая и радиационная ползучесть. Ввиду одновременного действия температуры и облучения происходят неравномерные объемные изменения материала конструкции (термическое расширение и радиационное распухание). Эти неравномерные объемные изменения являются источником дополнительных напряжений,

которые наряду с напряжениями, вызванными механическим воздействием, оказывают влияние на поведение конструкции. Вопрос состоит в том, насколько сильно они могут повлиять на прочностные качества исследуемых тел. Важно также знать, при каких распределениях температуры это влияние существенно. Для определения распухания материала использовалась зависимость [2]:

$$S(T(r,Z),\phi t) = 4.9 \cdot 10^{-51} (\phi \cdot t)^{1.71} \cdot 10^{\frac{15490}{T(r)} + \frac{5.98 \cdot 10^6}{(T(r))^2}} \quad (17)$$

Где $S(T(r, Z), \phi t)$ – функция радиационного распухания, зависящая от температуры, времени, заданного нейтронного потока; ϕ – нейтронный поток; ε_{ij}^c – деформации ползучести.

Закон ползучести материала оболочки с учетом облучения задаем соотношением [3]:

$$\dot{\varepsilon}^c = [dce^{-ct} + B(T)]\sigma^{m(T)} + K_0 \exp(A_1 - A_2 T)\phi\sigma, \quad (18)$$

где d, c, m, K_0, A_1, A_2 – параметры температуры, зависящие от температуры и облучения.

Выразим из системы уравнений (15) σ_{11} и σ_{22} :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{11(z)} + \nu \cdot \varepsilon_{22(z)} - B(r) \cdot (1+\nu) - \varepsilon_{11}^c - \nu \cdot \varepsilon_{22}^c] \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{22(z)} + \nu \cdot \varepsilon_{11(z)} - B(r) \cdot (1+\nu) - \varepsilon_{22}^c - \nu \cdot \varepsilon_{11}^c] \end{cases} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{11(z)} = \varepsilon_{11} + z \cdot \chi_{11}; \quad \varepsilon_{22(z)} = \varepsilon_{22} + z \cdot \chi_{22}. \quad (20)$$

Выражения (11) устанавливают связь между деформациями в произвольной точке оболочки и перемещениями соответствующей точки срединной поверхности.

Воспользуемся формулами для определения нормальных сил и изгибающего момента

$$N_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz; \quad N_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} dz; \quad M_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} \cdot z \cdot dz. \quad (21)$$

Применим формулы (21) к системе (19), учитывая (20) и проведя интегрирование, получим новую систему физических уравнений:

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{11} + \nu \cdot \varepsilon_{22} - B(r) \cdot (1+\nu) - \varepsilon_{11}^c - \nu \cdot \varepsilon_{22}^c] \\ N_{22} = \frac{E \cdot h}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_{22} + \nu \cdot \varepsilon_{11} - B(r) \cdot (1+\nu) - \varepsilon_{22}^c - \nu \cdot \varepsilon_{11}^c] \\ M_{11} = D \cdot [\chi_{11} + \nu \cdot \chi_{22}] \end{cases} \quad (22)$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость оболочки

Подставим в систему уравнений (22) соотношения Коши (14) и учитывая, что при рассмотрении системы уравнений равновесия было принято $N_{11} = 0$, будем иметь:

$$\frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot \left[\frac{du}{dx} + \nu \cdot \frac{w}{r} - B(r) \cdot (1 + \nu) - \varepsilon_{11}^c - \nu \cdot \varepsilon_{22}^c \right] = 0, \quad (23)$$

$$\frac{du}{dx} = -\nu \cdot \frac{w}{r} - B(r) \cdot (1 + \nu) - \varepsilon_{11}^c - \nu \cdot \varepsilon_{22}^c.$$

Подставляем (23) во второе уравнение системы (19) и получаем N_{22} . В итоге получена следующая система уравнений записанная через усилия:

$$\begin{cases} N_{22} = E \cdot h \cdot \left[\frac{w}{r} - B(r) - \varepsilon_{22}^c \right], \\ M_{11} = -D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Подставляя уравнения (24) в (13), находим:

$$D \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{E \cdot h}{r^2} \cdot w = q - \frac{E \cdot h}{r} \cdot [B(r) + \varepsilon_{22}^c] \quad (25)$$

Таким образом, в результате исследования для рассматриваемой цилиндрической оболочки было выведено следующее уравнение равновесия (16). Где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль Юнга; r – радиус оболочки; h – толщина оболочки; w – прогиб; α – коэффициент линейного расширения материала.

Представленные выше уравнения равновесий для цилиндрических оболочек, выражены через их прогиб. С учетом вышеизложенного, получим основное дифференциальное уравнение относительно функции перемещений деформированной цилиндрической оболочки в условиях нейтронного облучения, термического нагрева и ползучести материала. Основные обозначения для тензора деформаций в задаче следующие: ε_{ij}^T – объемные термические деформации; ε_{ij}^S – объемные деформации радиационного распухания; ε_{ij}^c – механические деформации ползучести.

Для рассматриваемой модели определения НДС используем одну из основных теорий, описывающих ползучесть материала – теорию течения [4-5]. Деформации ползучести определяются на каждом временном этапе (процесс деформирования разбивается на малые интервалы по времени) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11n}^c &= \varepsilon_{11n-1}^c + \dot{\varepsilon}_{11n-1}^c \Delta_n t; \\ \varepsilon_{22n}^c &= \varepsilon_{22n-1}^c + \dot{\varepsilon}_{22n-1}^c \Delta_n t; \\ \dot{\varepsilon}_{11n-1}^c &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{un-1}^c}{\sigma_{un-1}^c} (\sigma_{11n-1}^c - \frac{1}{3} \sigma_{n-1}^c); \\ \dot{\varepsilon}_{22n-1}^c &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{un-1}^c}{\sigma_{un-1}^c} (\sigma_{22n-1}^c - \frac{1}{3} \sigma_{n-1}^c). \end{aligned} \quad (26)$$

Где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, n – номер интервала по времени, $\dot{\varepsilon}_u, \sigma_u^c$ – интенсивности скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно, связанные законом ползучести для материала оболочки:

$$\dot{\varepsilon}_u^c = f(\sigma_u^c, T, \phi, t). \quad (27)$$

Полученное уравнение (16) представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности цилиндрической оболочки, позволяющее после

определения прогиба определить деформации и напряжения. Отметим, что большинство физических процессов в активной зоне АЭС описывается именно нелинейными уравнениями. Аналитическое решение подобных уравнений известно лишь для единичных случаев. Поэтому решение нелинейных задач сводится к использованию численных методов. Главное преимущество этих методов заключается в том, что они позволяют получить решение задачи в любом случае (и тогда, когда неизвестно аналитическое решение). Выражения (27, 26) позволяют вести расчет НДС с учетом тепловой и радиационной ползучести. Дальнейшие исследования в этом направлении дадут возможность проводить численные расчеты тонких цилиндрических оболочек, находящихся в условиях ядерных реакторов, что в свою очередь позволит проводить оценку прочностных характеристик элементов активных зон ядерных реакторов без проведения дорогостоящих экспериментов.

Благодарности

Авторы благодарят д.ф.-м.н. И.С.Куликова и д.т.н. Б.Е.Тверковкина за плодотворные обсуждения и дискуссии в ГНУ «ОИЭЯИ-Сосны» НАН Беларуси.

Работа выполняется по гранту государственной программы научных исследований на 2009г. Финансирует: Министерство образования Республики Беларусь (номер госрегистрации: №2009487). Тема: «Напряженно-деформированное состояние тонкостенных цилиндрических и призматических оболочек в условиях ядерных реакторов».

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрост Б. Твэлы ядерных реакторов. Москва. Энергоатомиздат. 1986,-247с.
2. Куликов И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин.- Минск: Наука и техника,1984. – 104с.
3. Куликов И.С., Прочность элементов конструкций при облучении /И.С. Куликов, Нестеренко, Б.Е. Тверковкин.- Минск: Наука и техника, 1990.– 144с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744с.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. -М. Машиностроение, 1975. - 400 с.

ОЦЕНКА УСИЛИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА УСТАНОВЛЕННЫЙ ПРОТЕЗ ТИПА TORP, ПРИ ТИМПАНОСТАПЕДОПЛАСТИКЕ СРЕДНЕГО УХА

Славашевич И. Л., Михасев Г. И.

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanostapedoplasty is proposed. The basic goal of this paper is to study the stress-strain state of the reconstructed eardrum and evaluate forces acting on the embedded prosthesis from the both cochlear liquid and the round window membrane.

Воспалительный процесс в среднем ухе может привести к перфорации барабанной перепонки, повреждению слизистой оболочки, слуховых косточек и слухового нерва. Тимпаноластика - это операция направленная на ликвидацию воспалительного (гнойного) процесса в ухе, закрытие перфорации барабанной перепонки и восстановление трансмиссионного механизма слуховых косточек. Отложение солей, которому более всего подвержена стремени косточка, может приводить к отосклеротическому анкилозу стремени – его частичной или полной фиксации. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедопластике - установке протеза, замещающего стремя. Данная операция предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпаноластику и стапедопластику с фенестрацией подножной пластинки [2]. При данном виде реконструкции основание введенного протеза типа TORP [3] упирается в восстановленную барабанную перепонку, а его конец покоится в кохlearной жидкости улитки. Особенность данной операции заключается не только в технологической сложности, но и в ее клинических последствиях. Одним из таких последствий является слабая устойчивость введенного протеза, ибо жесткость подобной восстановленной колебательной системы полностью определяется не упругими свойствами связки овального окна (ввиду отсутствия их деформаций из-за отложения солей), а степенью натяжения барабанной перепонки круглого окна [3, 4] .

Основной целью данной работы является оценка усилия, действующего на стержень протеза со стороны жидкости улитки, которое и обеспечивает устойчивое положение протеза. Отдельная задача – определение напряженно-деформированного состояния реконструированной тимпанальной мембраны (ТМ). Излишние напряжения в ТМ приводят к смещению спектра собственных частот восстановленной колебательной системы [5]. Степень искажения собственных частот может быть значительной и приводить к заметной потере порога восприимчивости звукового сигнала. Аналогичные задачи об оценке НДС в среднем ухе при различных технологиях реконструкции ТМ ранее рассматривались в работах [6 – 8].

Восстановленную колебательную систему среднего уха будем моделировать как систему, состоящую из круглой пластинки радиуса a , изготовленной из хрящевого имплантата, и сопряженного с ней твердого тела, моделирующего протез типа TORP (рис. 1). Данный протез состоит из круглой недеформируемой пластинки (основания) радиуса b и жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ стержня длиной l . Обозначим через l_{\min} расстояние от центра основания протеза (точки O) до подножной пластинки стремени. Пусть $\Delta l = l - l_{\min}$ - положительное приращение длины стержня, наличие которого необходимо для устойчивого положения протеза.

Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Данное предположение вызвано не только необходимостью упро-

щения задачи, но и выводами, сделанными в статье [8]. В соответствии с результатами данных исследований, наиболее предпочтительной технологией установки протеза, обеспечивающей минимальный уровень потенциальной энергии преднапряженной системы, является технология, когда основание протеза размещается к центру ТМ настолько близко, на сколько это позволяет индивидуальная архитектура среднего уха. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, тогда ТМ можно рассматривать как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами b и a соответственно.

Введем глобальную декартову систему координат (СК) $Oxyz$, связанную с центром ТМ как это показано на рис. 1. Здесь ось Oz направим в сторону внешнего уха, а ось Oy – по линии “*malleus manubrium*”, то есть вдоль линии сопряжения молоточка с тимпанальной мембраной в норме.

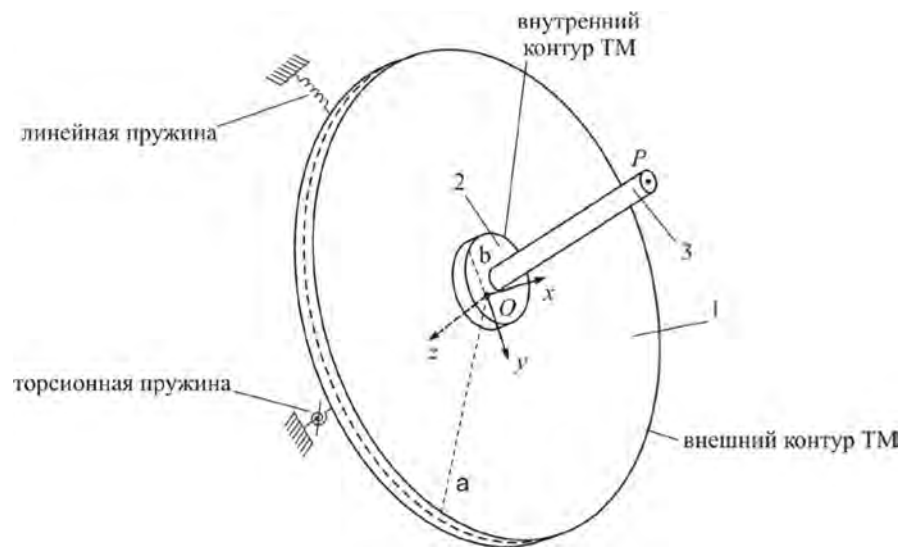


Рис. 1. Геометрическая модель реконструированного среднего уха: 1 – восстановленная ТМ радиуса a ; 2 – протез типа TORP.

В качестве уравнений равновесия восстановленной ТМ, рассмотрим уравнение равновесия кольцевой пластинки, которые в полярной системе координат $Or\phi$ (см. рис. 2) имеют вид [9]:

$$D\Delta^2 w = P_s, \quad r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

$$T_1 = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right), \quad T_2 = K \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right).$$

Здесь Δ - оператор Лапласа, E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластинки (хряща) соответственно, h – толщина пластины, w , u , v – нормальное, радиальное и касательное перемещения точек пластины, T_1, T_2, S мембранные усилия в ТМ, вызванные установкой протеза, P_s - разность статического атмосферного давления и давления в полости среднего уха.

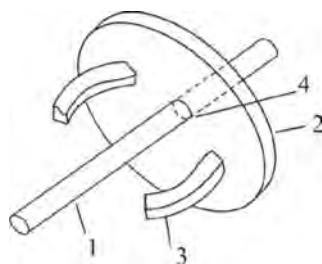


Рис. 2. Ствол протеза, введенный в отверстие подножной пластинки стремени: 1 – ствол протеза; 2 – подножная пластина; 3 – остатки ножек стремени; 4 – отверстие в подножной пластинке.

При деформации пластинки протез совершает некоторое перемещение. За метим, что данное перемещение является поступательным ввиду наличия направляющего отверстия в подножной пластинке (см. рис. 2). Обозначим перемещение основания протеза (то есть внутреннего контура ТМ) вдоль осей Or , Oz соответственно через u_p , w_p . Принимая во внимание жесткое склеивание основания протеза с ТМ, выпишем граничные условия при $r = b$ в виде:

$$w|_{r=b} = w_p, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=b} = 0, \quad u|_{r=b} = -u_p \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = u_p \sin \varphi. \quad (2)$$

На внешнем контуре (тимпанальном кольце) восстановленной ТМ рассмотрим условия упругой заделки [10]:

$$(k_t w + Q)|_{r=a} = 0, \quad (k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1)|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=a} = 0, \quad v|_{r=a} = 0, \quad (3)$$

где $k_t = 1.5 \times 10^5$ Н/м·м, $k_t = 1.0 \times 10^{-4}$ Нм/м – коэффициенты линейной и торсионной жесткости тимпанального кольца [10]. Здесь [9]

$$Q = \left(Q_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right), \quad H = (1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right),$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad (4)$$

где Q_1, M_1, H – перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты, действующие в срединной поверхности пластинки.

В положении равновесия протез испытывает силы F_{st} , R , Q_p , M_p (рис. 3). Здесь F_{st} – сила, являющаяся мерой взаимодействия с внутренним ухом и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, R – сила реакции стенки в высверленном отверстии в подножной пластинке стремени, а Q_p , M_p – равнодействующие перерезывающих сил и изгибающих моментов, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ. Уравнения равновесия протез запишутся в виде:

$$\begin{aligned} Q_p - F_{st} \cos \gamma - R \sin \gamma &= 0, \\ T_p - F_{st} \sin \gamma + R \cos \gamma &= 0, \\ M_p - R l_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

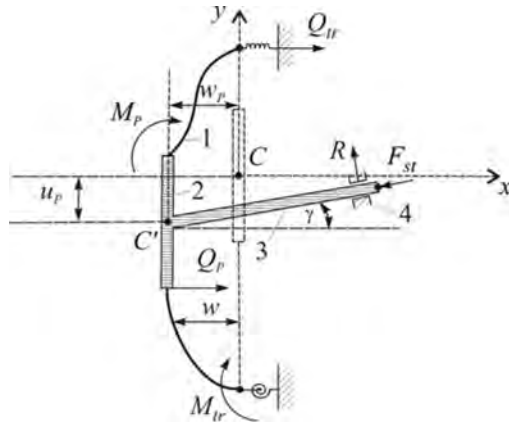


Рис. 3. Механическая модель колебательной системы «ТМ-протез»: 1 – реконструированная ТМ; 2 – основание протеза; 3 – ствол протеза; 4 – подножная пластина стремени.

где

$$F_{st} = k\delta l, \delta l = l - l_0 - \sqrt{u_p^2 + w_p^2} = \Delta l - \sqrt{u_p^2 + w_p^2}.$$

Здесь δl - длина части ствола протеза, вошедшей в кохлеарную жидкость, $k = 8\pi T_0 (S/S_0)^2$ - коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость - мембрана круглого окна» [11], $S_0 = \pi R_0^2$ - площадь круглого окна, T_0 - сила натяжения мембраны круглого окна.

Найдем равнодействующие сил и моментов, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенных перерезывающих сил и соответствующих моментов по всему внутреннему контуру ТМ:

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\phi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \phi + S \sin \phi]_{r=b} d\phi, \\ M_p &= M_{pM} + M_{pQ}, \\ M_{pM} &= b \int_0^{2\pi} [M_1]_{r=b} d\phi, \quad M_{pQ} = b^2 \int_0^{2\pi} [Q_1]_{r=b} \sin \phi d\phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение краевой задачи (1), (2) и (3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} w &= w_0(r), \\ u &= u_0(r) + u_0^c(r) \cos \phi + u_0^s(r) \sin \phi, \\ v &= v_0(r) + v_0^c(r) \cos \phi + v_0^s(r) \sin \phi. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), находим:

$$\begin{aligned} w_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + \frac{P_s}{64D} r^4 \\ u_0(r) &= C_{0,1} r + C_{0,2} \frac{1}{r}, \quad v_0(r) = C_{0,3} r + C_{0,4} \frac{1}{r}, \\ u_0^c(r) &= (1-3\nu)C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3} (1-\nu^2) - C_{1,4}, \\ v_0^c(r) &= (5+\nu)C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3} (3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3} (1+\nu) + C_{1,4}, \\ u_0^s(r) &= (1-3\nu)C_{1,5} r^2 + C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7} (3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7} (1-\nu^2) - C_{1,8}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$v_0^s(r) = -(5 + \nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3 - \nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1 + \nu) - C_{1,8}.$$

Подставляя соотношения (8) в граничные условия (2), (3), получим значения неизвестных постоянных, которые в силу громоздкости здесь не приводятся; отметим лишь, что $C_{0,1} = C_{0,2} = C_{0,3} = C_{0,4} = 0$.

Подстановка соотношений (6) в уравнения (5) с учетом (7), (8) приводит к трем уравнениям относительно трех параметров u_p , w_p , R , характеризующих ориентации протеза в полости среднего уха и напряженно-деформированное состояние реконструированной ТМ. В самом деле, вычислив перемещения u_p , w_p , можно найти и напряжения в восстановленной барабанной перепонке.

Были выполнены расчеты для модели с параметрами $b = 1.5$ мм, $a = 5$ мм, $E = 3.4$ Н мм⁻², $\gamma = 5\pi/18$, $\nu = 0.4$, $k_l = 0.075$ Н мм⁻², $k_t = 6.5 \cdot 10^{-5}$ Н, $R_0 = 10^{-3}$ м при различных значениях силы натяжения T_0 мембраны круглого окна. Результаты представлены на рис. 4 в виде графиков зависимости величины силы F_{st} и смещений w_p и u_p от приращения длины протеза $\Delta l = l - l_0$.

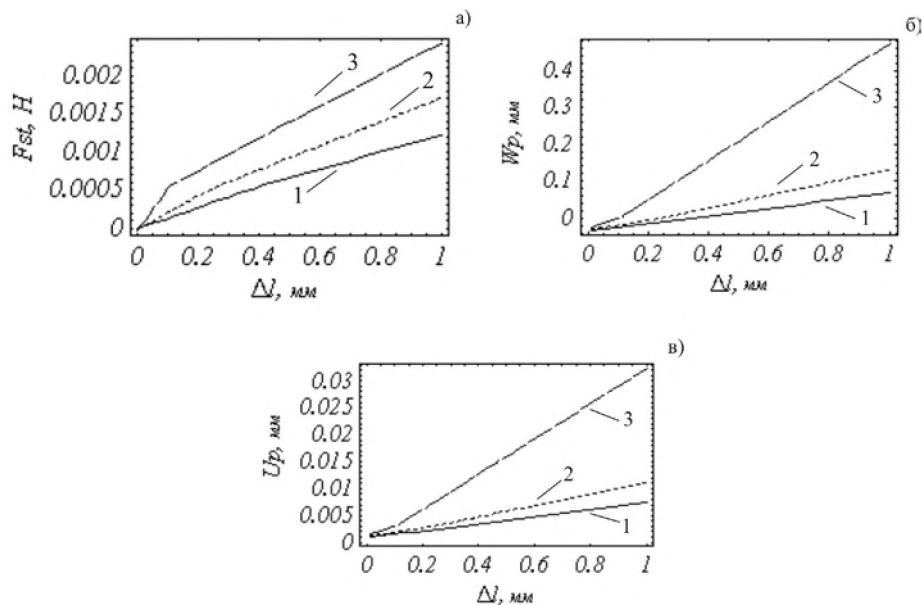


Рис. 4. Характеристики напряженно-деформированного состояния: 1 - $T_0 = 10^{-5}$ Н/м;

2 - $T_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ Н/м; 3 - $T_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ Н/м.

Как видно, для рассмотренного типа тотальной реконструкции среднего уха, зависимости всех анализируемых величин от приращения длины протеза носят характер, близкий к линейному, что дает возможность легко определять длину вводимого протеза. Напомним, что при реконструкции, предусматривающей тимпанопластику и установку протеза типа PORP между восстановленной ТМ и головкой стремени, функциональная зависимость между напряжениями в сочленении «протез-стремя» и длиной протеза носит более сложный характер - при значениях параметра $\Delta l > 0.4$ мм имеет место ярко выраженная нелинейность (см., например, работу [8]). Заметим также, что усилия F_{st} , действующие на протез со стороны кохlearной жидкости, на порядок ниже аналогичных сил, возникающих в звене «протез-стремя» для всех ранее рассмотренных технологий реставрации ТМ [6 - 8]. Низкая жесткость

рассмотренной здесь реконструированной колебательной системы объясняется тем, что она полностью определяется силой упругого противодействия мембраны круглого окна [2, 4]. Таким образом, если учесть, что у некоторых людей почти вся жесткость системы в норме приходится на кольцевидную связку стремени, а не на силу противодействия со стороны мембраны круглого окна, то возникает проблема устойчивости установленного протеза. Данная задача может быть решена путем модификации вводимого протеза, которая будет рассмотрена нами в последующих исследованиях.

Данная работа выполнена по заданию «Механика 4.09» Государственной комплексной программы научных исследований ГКПНИ «Механика» в Республике Беларусь на 2006–2010 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Вульштейн Х. Слухулучшающие операции. – М: Медицина, 1972.
3. <http://www.kurz.med.com/>
4. Békésy, G von. The structure of the middle ear and the hearing of one's own voice by bone conduction // J. Acoust. Soc. Am., 1949, Vol. 21, P. 217–232.
5. Любина, Е.А. Влияние сил натяжения восстановленной барабанной перепонки, вызванных введением протеза, на собственные частоты колебательной системы реконструированного среднего уха / Е.А. Любина, Г.И. Михасев // Механика-2007: Сб. науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике (под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого), Минск, 16-18 окт., 2007г. – Минск: ОИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 399–405.
6. Ермоченко С.А. Расчет напряженно-деформированного состояния среднего уха при его тотальной реконструкции с учетом влияния остатков тимпанальной мембраны / С.А. Ермоченко, Г.И. Михасев, Л.Г. Петрова // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т.12, №3 (41). – С. 24–36.
7. Михасев, Г. И. Статическая модель среднего уха, подвергнутого реконструкции с использованием технологии тимпаноластики «large island». Часть II: напряженно-деформированное состояние / Г. И. Михасев, С. А. Ермоченко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – №3(8). – С. 86 - 90.
8. Mikhasev G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus – incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology, Nov2009; doi:10.1093/imammb/ dqp020. – P. 1 - 24.
9. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. Физматлит. 1995. 320с.
10. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
11. Чигарев А.В. Биомеханика: Учебное пособие/ А.В. Чигарев, Г.И. Михасев. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 306с.

АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОШАРНИРНОЙ И ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАННЫХ ПЕРЕДАЧ

Гурвич Ю. А., Вареник А.А.

This article contains a description of a new method of unevenness definition in dependence of obliquity angle and its influence on output cinematic characteristics of one-joint and two-joint cardan shafts

Карданная передача состоит из карданного шарнира, вала и промежуточных опор и применяется для передачи крутящего момента между валами механизмов трансмиссии, расположенными под постоянными или переменными углами. Она служит также для компенсации несоосности валов между закрепленными на раме агрегатами.

Карданная передача обладает существенным недостатком, заключающемся в неравномерности вращения выходного вала, возникающей из-за угла излома. Эта неравномерность оказывает негативное влияние на выходные характеристики карданных передач и механизмов трансмиссии. Тем не менее, исследований, посвященных изучению этого важного вопроса, в литературе приведено недостаточно [1-6].

В данной работе сделана попытка провести более полное исследование кинематических характеристик одношарнирной (по сравнению с [6]) и, по всей видимости, впервые для двухшарнирной карданных передач с переменным углом излома, что позволит, в дальнейшем, на стадии проектирования машины обосновать выбор схемы карданной передачи с приемлемой для практики величиной неравномерности вращения выходного вала.

Рассмотрим трансмиссию транспортного средства, где мощность от коробки передач к ведущему мосту передается посредством одношарнирной карданной передачи, которая в процессе движения машины может изменять свое первоначальное положение.

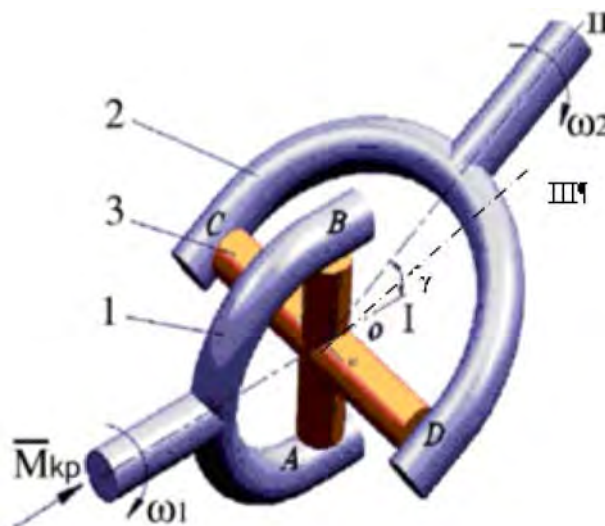


Рис. 1. Кинематическая схема карданного шарнира: 1, 2 – вилки; 3 – крестовина; I – ось вращения вилки 1; II – ось вращения вилки 2; γ – угол между осями I и II; III – новое положение оси вращения вилки 2 при переменном угле γ ; ω_1 и ω_2 – угловые скорости ведущего и ведомого валов

Для одношарнирной карданной передачи, например в [2], получена зависимость для угла поворота ведомого вала β в функции двух углов: угла поворота ведущего вала α и угла излома γ (рис. 1):

$$\beta = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\gamma}\right), \quad (1)$$

При заданном положении ведущего звена, определяемом углом α , положение ведомого звена полностью определяется формулой (1).

Дифференцируя соотношение (1) по времени, имеем:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt},$$

где $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\beta}{dt} = \omega_2$ и $\frac{d\gamma}{dt} = \omega_\gamma$ - угловые скорости, соответственно, ведущего,

ведомого валов и ведомого вала при переменном угле γ ; $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha}$,

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha}.$$

Тогда соотношение для скорости вращения ведомого вала примет вид:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha} + \omega_\gamma \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha}. \quad (2)$$

В выражении (2) введем замену:

$$K1(\alpha, \gamma) = \frac{\cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha}, \quad K2(\alpha, \gamma) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{1 - \sin^2\gamma\cos^2\alpha}. \quad (3)$$

Иначе $\omega_2 = \omega_1 \cdot K1(\alpha, \gamma) + \omega_\gamma \cdot K2(\alpha, \gamma)$. (4)

Определим угловое ускорение ведомого вала ε_2 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_1 \cdot K1(\alpha, \gamma) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial K1(\alpha, \gamma)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial K1(\alpha, \gamma)}{\partial\gamma} \cdot \omega_\gamma \right) + \varepsilon_\gamma \cdot K2(\alpha, \gamma) + \\ + \omega_\gamma \cdot \left(\frac{\partial K2(\alpha, \gamma)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial K2(\alpha, \gamma)}{\partial\gamma} \cdot \omega_\gamma \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ - угловая скорость ведущего вала; ε_1 - угловое ускорение ведущего

вала; $\omega_\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ - угловая скорость ведомого вала 2 при повороте на угол γ ; ε_γ -

угловое ускорение ведомого вала 2 при повороте на угол γ (см. рис. 1).

Для анализа выражения (5) необходимо рассмотреть кинематические зависимости в шести случаях подобно тому, как это было сделано в [6].

Теперь рассмотрим карданную передачу с двумя шарнирами, представленную на рисунках 2-3.

В [2] приведено соотношение для определения угла поворота ведомого вала в двухшарнирной карданной передаче:

$$\beta' = \operatorname{arctag} \left(\frac{\cos\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)} \right), \quad (6)$$

где α – угол поворота вала I; β' – угол поворота вала III; γ_1 – угол излома вала I; γ_2 – угол излома вала III; ψ – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II (см. рис. 3).

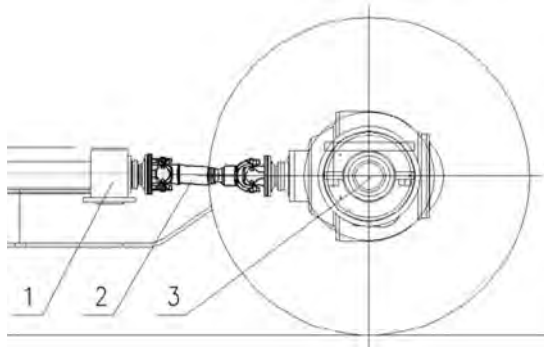


Рис. 2. Схема установки двухшарнирной карданной передачи на машине: 1 – опора; 2 – карданный вал; 3 – задний мост с колесами

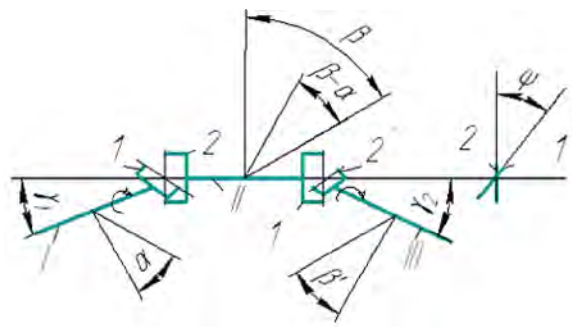


Рис. 3.- Схема карданной передачи с двумя шарнирами и обозначением углов

Угол β' является функцией двух переменных α , γ_2 . Поэтому, полная производная по времени от (6) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}, \quad (7)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} &= \frac{\cos\gamma_2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)}}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} + \\ &+ \frac{-\cos\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2} \cdot [-(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)]}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}}; \\ \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} &= \frac{-\sin\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)}}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}} + \\ &+ \frac{2 \cdot \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2} \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1) \cdot \sin\gamma_2}{1 + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{[\cos\gamma_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi + \cos^2\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\gamma_1)]^2}}; \end{aligned}$$

Введем замены:

$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}$, $L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial \beta'}{\partial \gamma_2}$, $\omega_3 = \frac{d\beta'}{dt}$ – угловая скорость вращения вала III; $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ – угловая скорость вала I; $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$ – угловая скорость оси III при переменном угле γ_2 .

Выражение (7) перепишем в виде:

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (8)$$

Определим угловое ускорение ведомого вала ε_3 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (8):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

где ε_1 – угловое ускорение вала I; ε_{γ_2} – угловое ускорение оси III.

Для анализа выражения (9) необходимо рассмотреть четыре случая.

1. Первый – $\varepsilon_1 = 0$, $\omega_{\gamma_2} = 0$.
2. Второй – $\varepsilon_1 = 0$, $\omega_{\gamma_2} \neq 0$.
 - 2.1 Случай равномерного вращения $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$;
 - 2.2 Случай неравномерного вращения $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$.
3. Третий – $\varepsilon_1 \neq 0$, $\omega_{\gamma_2} = 0$.
4. Четвертый – $\varepsilon_1 \neq 0$, $\omega_{\gamma_2} \neq 0$.
 - 4.1 $\varepsilon_{\gamma_2} = 0$;
 - 4.2 $\varepsilon_{\gamma_2} \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим подробно четвертый случай.

Четвертый случай. Угловое ускорение входного вала $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \neq 0$ (входной вал вращается неравномерно), угловая скорость оси III $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt} \neq 0$ (при переменном угле γ_2 ось III подвижна).

В этом случае выражение (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial \gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

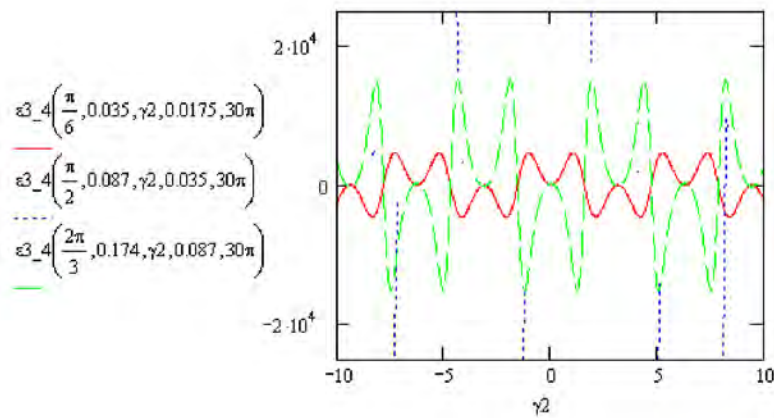


Рис. 4. График зависимости углового ускорения ε_{3_4} в функции угла излома γ_2 при различных

значениях угла α : $\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}$; угла γ_1 : $\gamma_1 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$) и угла ψ : $\psi = 0,0175; 0,035; 0,087$ рад ($1^\circ; 2^\circ; 5^\circ$)

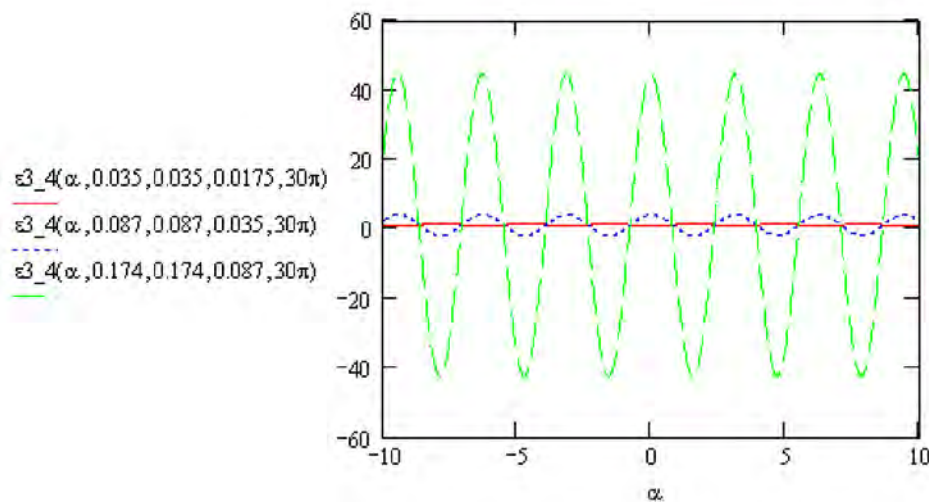


Рис. 5. График зависимости углового ускорения ε_{3_4} в функции угла α при различных значениях угла γ_1 : $\gamma_1 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$); угла γ_2 : $\gamma_2 = 0,035; 0,087; 0,174$ рад ($2^\circ; 5^\circ; 10^\circ$) и угла ψ : $\psi = 0,0175; 0,035; 0,087$ рад ($1^\circ; 2^\circ; 5^\circ$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. Курс теоретической механики. – М.: 1954г. – 379с.
2. Я. Э. Малаховский, А. А. Лапин. Карданные передачи. – М.: Машгиз. - 1962г. - 153с.;
3. Н. Л. Островерхов, И. К. Русецкий, Л. И. Бойко. Динамическая нагруженность трансмиссий колесных машин. – Мн.: Наука и техника. – 1977г. – 191с.;
4. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Ю.В. Попова. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463 с.;
5. Л. И. Бойко. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик Бук». – 2003г. – 239с.;
6. Ю. А. Гурвич, К. И. Сафронов, А. В. Пащенко. Анализ кинематических характеристик карданных передач. – Мн.: БНТУ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧЕЙ СКОРОСТИ ТОРФОУБОРОЧНОЙ МАШИНЫ

Горбач Н.И., Луцевич С.В.

1. Назначение, устройство и описание работы торфоуборочной машины

Машина предназначена для уборки кускового гранулированного торфа с размером гранул длиной 100 мм и диаметром 80 мм из валков. Она представляет собой прицепное к трактору устройство, состоящее из рабочего органа 1 и приемного желоба 2 с расположенным в нем шнеком. Шнек предназначен для выгрузки убранный торфа из желоба в борт или загрузки его в транспортное устройство. Схема машины приведена на рис.1.

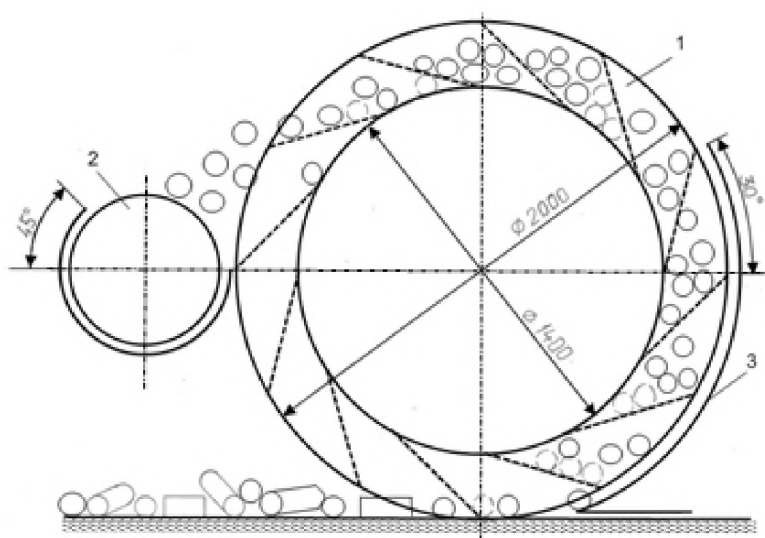


Рис. 1

Рабочим органом машины является колесо в виде катушки, центральная часть которой представляет полу трубу. К торцам трубы приварены диски. Обод диска является опорной поверхностью колеса.

Длина окружности внутренней трубы радиуса 70 см и окружности радиуса 100 см на диске разделены на 12 частей. К дискам и к трубе приварены лопасти под углом наклона к диаметру колеса, образованным линией, соединяющей точки пересечения радиусов с окружностью трубы и окружностью на диске.

Таким образом, пространство между лопастями, стенками диска и внутренней трубой представляет ковш, в котором при работе машины накапливается торф.

При качении колеса куски торфа захватываются лопастями и транспортируются в приемный желоб.

Целью данной работы является определение поступательной скорости машины, при которой куски торфа будут отрываться от лопасти при некотором угле ее наклона к горизонту и попадать в приемный желоб и не заклиниваться между кожухом желоба и шнеком.

2. Определение длины и угла наклона лопасти к горизонту

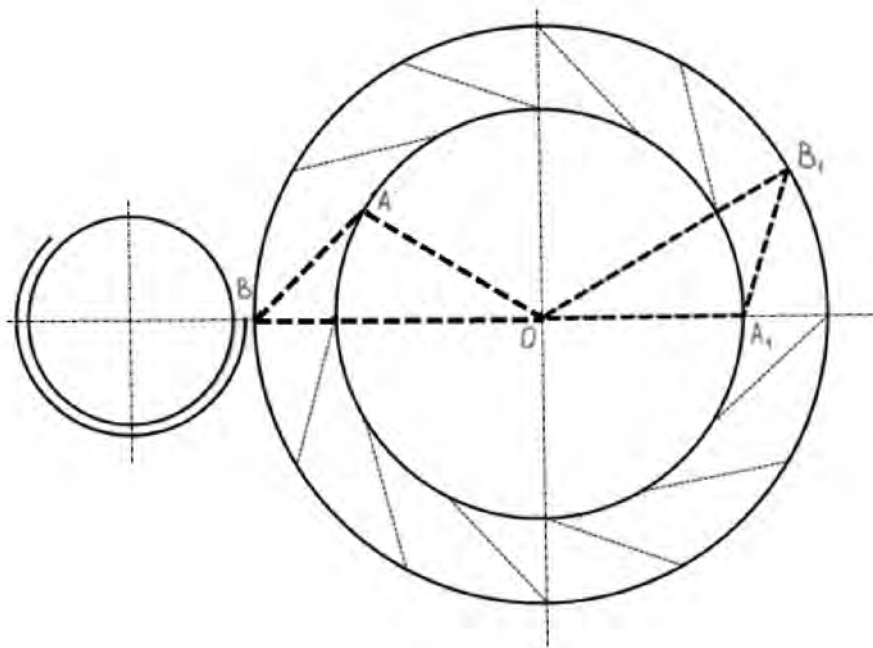


Рис. 2

Рассмотрим треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OA_1B_1$ (рис. 2):

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$$

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Так как длина окружности разделена на 12 частей, то центральный угол равен 30° .

Определяем по теореме косинусов длину лопасти:

$$\begin{aligned} l = AB &= \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ} = \\ &= \sqrt{70^2 + 100^2 - 2 \cdot 70 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ} = 52,684 \text{ см.} \end{aligned}$$

По теореме синусов определяем внутренние углы $\angle A$ и $\angle B$ $\triangle OAB$:

$$\angle A = 108,37^\circ, \quad \angle B = 41,63^\circ$$

Пусть движение и отделение кусков от лопасти должно происходить тогда, когда лопасть из верхнего положения перейдет в положение, в котором радиус OB составит с горизонтом угол $\beta = 10^\circ$, т.е. точка отрыва куска от лопасти будет находиться на расстоянии от горизонтального диаметра

$$h_B = OB \sin \beta = 100 \cdot \sin 10^\circ = 174 \text{ мм.}$$

Тогда угол наклона лопасти в положении, в котором будет отделяться кусок от лопасти:

$$\alpha = \angle B - 10^\circ = 41,63^\circ - 10^\circ = 31,63^\circ.$$

3. Определение рабочей скорости машины

Рассмотрим кусок торфа, находящийся на лопасти, расположенной под $\angle \alpha$ к горизонту (рис.3).

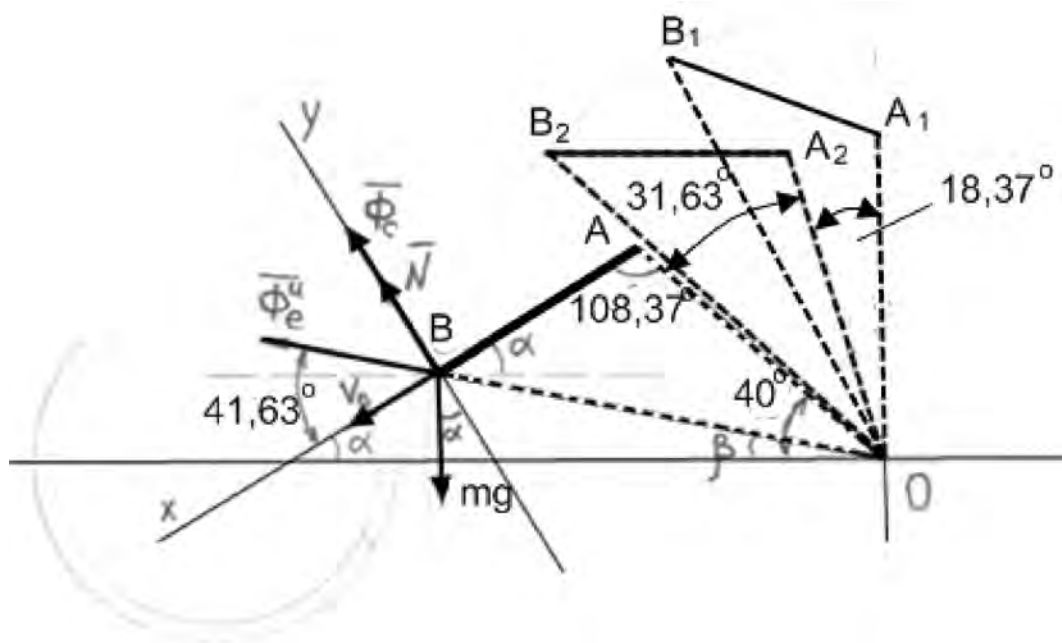


Рис.3

На кусок действуют сила тяжести $m\bar{g}$, кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_C$, переносная центробежная сила инерции $\bar{\Phi}_e^a$ и нормальная реакция \bar{N} . Силой трения пренебрегаем, т.к. происходит отрыв.

Запишем основное уравнение динамики относительного движения в проекции на ось y :

$$m \ddot{y} = -mg \cos \alpha + \Phi_{ц} \sin \angle B + \Phi_C + N.$$

(1)

Так как движение по оси y отсутствует, то $\ddot{y} = 0$. Тогда

$$N = mg \cos \alpha - \Phi_{ц} \sin \angle B - \Phi_C.$$

В момент отрыва $N = 0$.

В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$mg \cos \alpha - m\omega^2 OB \sin \angle B - \Phi_C = 0, \text{ где } \Phi_C = 2m\omega V_{отн}$$

или сократив на m и заменив $\omega = \frac{V}{R}$, получим:

$$g \cos 31,63^\circ - \frac{V^2}{R^2} R \sin 41,63^\circ - 2 \frac{V}{R} V_{отн} = 0$$

или

$$-V^2 \sin 41,63^\circ - 2V_{отн}V + gR \cos 31,63^\circ = 0. \quad (2)$$

После преобразований получим квадратное уравнение вида:

$$V^2 + \frac{2V_{отн}}{\sin 41,63^\circ} V - gR \frac{\cos 31,63^\circ}{\sin 41,63^\circ} = 0. \quad (3)$$

Корни этого уравнения:

$$V_{1,2} = -\frac{V_{отн}}{\sin 41,63^\circ} \pm \sqrt{\frac{V_{отн}^2}{\sin^2 41,63^\circ} + gR \frac{\cos 31,63^\circ}{\sin 41,63^\circ}}. \quad (4)$$

Так как $V > 0$, то скорость движения машины:

$$V = -\frac{V_{отн}}{\sin 41,63^\circ} + \sqrt{\frac{V_{отн}^2}{\sin^2 41,63^\circ} + gR \frac{\cos 31,63^\circ}{\sin 41,63^\circ}} = -1,5V_{отн} + \sqrt{2,25V_{отн}^2 + 12,56}. \quad (5)$$

4. Определение относительной скорости движения куска торфа по лопасти в момент его отрыва

Движение куска по лопасти начнется после того, как лопасть займет положение под некоторым углом наклона к горизонту. Если лопасть расположена в самом верхнем положении A_1B_1 , то, чтобы перейти в горизонтальное положение A_2B_2 , колесо должно повернуться на угол равный $108,37^\circ - 90^\circ = 18,37^\circ$. Чтобы лопасть из горизонтального положения заняла положение AB , при котором куски будут отделяться от лопасти, колесо должно повернуться на угол $90^\circ - 40^\circ - 18,37^\circ = 31,63^\circ$. Поэтому угол поворота колеса изменяется от $\varphi_0 = 0$ до $\varphi_1 = 31,63^\circ$, а угол наклона лопасти изменяется так же от $\alpha = 0$ до $\alpha = 31,63^\circ$ (рис.3).

При составлении и решении дифференциального уравнения движения куска по лопасти примем следующие допущения:

- 1) положение лопасти соответствует предельному положению, при котором происходит отрыв куска, т.е. радиус OB составляет с горизонтом угол 10° ;
- 2) силой трения $F_{тр} = fN'$ пренебрегаем, так как силы $\bar{\Phi}_E^д$ и $\bar{\Phi}_C$ стремятся оторвать кусок от лопасти и нормальное давление $\bar{N}' = -\bar{N}$ будет незначительным;
- 3) движение начинается с относительной скоростью равной нулю.

Выберем в точке A начала осей xy . Ось x направим по лопасти в сторону движения куска торфа. Изобразим кусок торфа, считая его материальной точкой, в произвольном положении на оси x (рис.4).

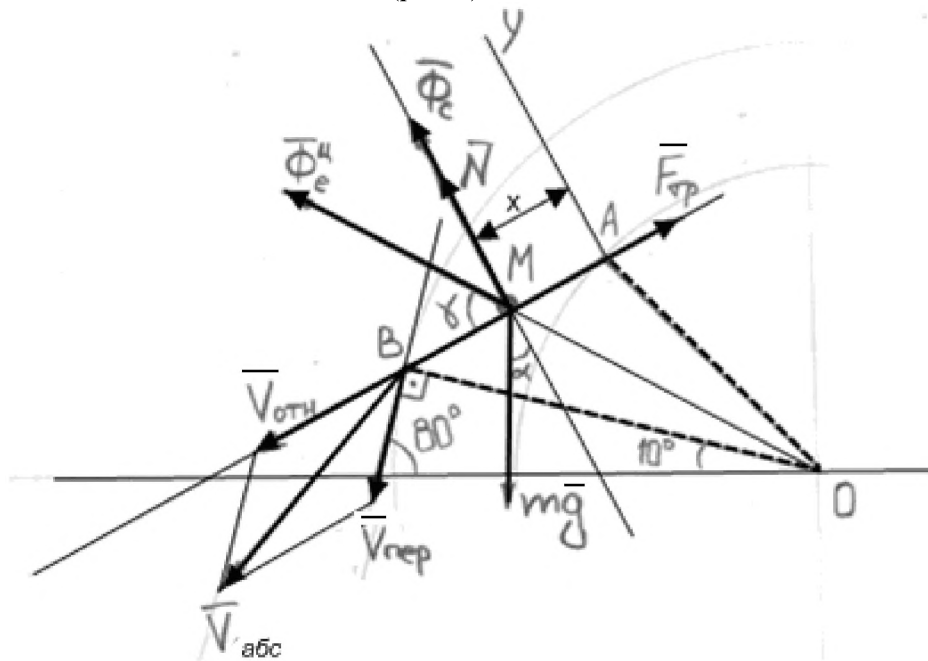


Рис. 4

Покажем силы, действующие на него: вес $m\bar{g}$, нормальную реакцию \bar{N} , переносную центробежную $\bar{\Phi}_E^д$ и кориолисову $\bar{\Phi}_C$ силы инерции. Запишем ос-

новное уравнение динамики относительного движения куска торфа в проекции на ось x :

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + \Phi_e^y \cos \gamma, \quad (6)$$

где $\Phi_e^y = m\omega^2 OM = m \left(\frac{V}{R} \right)^2 OM$, $(OM)^2 = x^2 + r^2 - 2xr \cos 108,37^\circ$.

Определим $\cos \gamma$. По теореме синусов $\sin \gamma = \frac{r \sin 108,37^\circ}{OM}$, а

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 108,37^\circ}{(OM)^2}} = \frac{x - r \cos 108,37^\circ}{OM}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha + m \frac{V^2}{R^2} OM \frac{x - r \cos 108,37^\circ}{OM} \quad (7)$$

или после преобразований получим

$$\ddot{x} = g \sin \alpha + \frac{V^2}{R^2} x + \frac{V^2}{R^2} r \cos 71,63^\circ. \quad (8)$$

Заменим $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$.

С учетом этого уравнение (8) запишем в виде:

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{V^2}{R^2} x + g \sin \alpha + \frac{V^2}{R^2} r \cos 71,63^\circ.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\begin{aligned} \dot{x}d\dot{x} &= \frac{V^2}{R^2} x dx + \left(g \sin \alpha + \frac{V^2}{R^2} r \cos 71,63^\circ \right) dx; \\ \frac{\dot{x}^2}{2} &= \frac{V^2}{R^2} \frac{x^2}{2} + \left(g \sin \alpha + \frac{V^2}{R^2} r \cos 71,63^\circ \right) x + C_1. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

С учетом этого после преобразований получим

$$\dot{x}^2 = \frac{V^2}{R^2} x^2 + 2 \left(g \sin \alpha + \frac{V^2}{R^2} r \cos 71,63^\circ \right) x. \quad (9)$$

При $x = l$ $\dot{x} = V_{отн}$.

Следовательно, относительная скорость в момент отрыва

$$V_{отн} = \sqrt{\frac{V^2}{R^2} (l^2 + 2rl \cos 71,63^\circ) + 2gl \sin \alpha}. \quad (10)$$

С учетом числовых данных относительная скорость:

$$V_{отн} = \sqrt{0,5099V^2 + 5,4149}. \quad (11)$$

Для определения скорости движения машины подставим выражение (11) в уравнение (5) и преобразуем:

$$V + 1,5\sqrt{0,5099V^2 + 5,4149} = \sqrt{2,25(0,5099V^2 + 5,4149) + 12,56}. \quad (12)$$

Возведем в квадрат правую и левую части равенства (12):

$$V^2 + 3V\sqrt{0,5099V^2 + 5,4149} + 2,25(0,5099V^2 + 5,4149) = \\ = 2,25(0,5099V^2 + 5,4149) + 12,56.$$

После преобразований получим

$$3V\sqrt{0,5099V^2 + 5,4149} = 12,56 - V^2. \quad (13)$$

Обозначив $V^2 = U$ и преобразовав, получим уравнение вида:

$$U^2 + 20,5773U - 43,9535 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения:

$$U_{1,2} = -10,2886 \pm \sqrt{10,2886^2 + 43,9535}.$$

Примем знак «+» перед корнем, так как должно быть $U > 0$

$$U = -10,2886 + \sqrt{149,8098} = -10,2886 + 12,2397 = 1,9511 = V^2.$$

Тогда скорость машины:

$$V = \sqrt{U} = \sqrt{1,9511} = 1,3968 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5,028 \frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

В этом случае относительная скорость куска с учетом формулы (11)

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{0,5099 \cdot 1,9511 + 5,4149} = 2,5317 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Аналогично можно определить скорость машины и относительную скорость движения куска по лопасти считая, что отделение куска от лопасти должно происходить, когда радиус OB составляет с горизонтом угол $\beta = 15^\circ$ или 20° . В этом случае нужно определить угол α наклона лопасти и значения других углов. Можно угол α принять из условия, что $\text{tg } \alpha = f$, где f – коэффициент трения куска о лопасть. Затем определить угол $\beta = \angle B - \alpha = 41,63^\circ - \alpha$.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИЙ РАЗЛОЖЕННЫХ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ.

Акимов В.А.

In this article the research of the convergence function arranged in nonorthogonal and orthogonal rows by means of the operator method was under consideration.

Пусть мы имеем произвольную функцию, допускающую представление в виде степенного ряда $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x^m$, сходящегося на некотором отрезке $[-R, R]$ или на всей $R = \infty$ числовой оси. Исследуем границу интервала сходимости в случае разложения этой функции в неортогональный ряд $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_k F(a_k x)$ по корням a_k некоторой трансцендентной целой функции $\varphi(z) = 0$.

Здесь $F(z)$ – произвольная целая трансцендентная функция.

Воспользовавшись разложением отдельных степеней x^m и допуская, что порядок суммирования может быть изменен, соединяя вместе члены, содержащие четные $F_c(a_k x)$ и нечетные $F_n(a_k x)$ найдем [1]:

$$f(x) = A_0 F(0) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [B_k F_n(a_k x) + C_k F_c(a_k x)] \right\} \quad (1)$$

где коэффициенты имеют следующие значения

$$A_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r}}{\alpha_{2r}}, B_k = -\frac{2}{a_k \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \gamma_k^{(r)}, C_k = -\frac{2}{a_k^2 \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \gamma_k^{(r)} \quad (2)$$

Здесь мы полагаем:

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s z^s, \quad \varphi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_{2s+1} z^{2s+1},$$

$$\varphi(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2} \right), \quad \gamma_k^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!} \left(\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_k^2} \right)_{\mu=0} \quad (3)$$

Величины a_k считаем все различными и расположенными в порядке возрастания модулей. Относительно $F(z)$ сделаем допущение, что пока ни одна из величин α_s не равна нулю.

Чтобы имело место разложение (1), ряды (2) должны быть сходящимися (необходимое условие).

Докажем прежде всего, что при всяком r имеет место неравенство:

$$|\gamma_k^{(r)}| < |\gamma_{k+1}^{(r)}| < |U_{2r+1}|. \quad (4)$$

Если корни a_k трансцендентного уравнения являются комплексными $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, то с учетом наличия для каждого номера k еще трех корней $-a_k, \bar{a}_k, -\bar{a}_k$ (см., например, уравнение $sh\lambda = \lambda$), можем записать

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2S_k^2 \mu^2 + t_k^4 \mu^4)$$

где $S_k^2 = -\frac{1}{2} \frac{a_k^2 + \bar{a}_k^2}{(a_k \bar{a}_k)^2}$, $t_k^4 = \frac{1}{(a_k \bar{a}_k)^2}$ - вещественные числа.

Представим

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= \frac{\varphi(\mu)}{(1-\mu^2/a_k^2)(1-\mu^2/a_{k+1}^2)} = \frac{(1-\mu^2/\bar{a}_k^2)(1-\mu^2/\bar{a}_{k+1}^2)\varphi(\mu)}{(1+2S_k^2\mu^2+t_k^4\mu^4)(1+2S_{k+1}^2\mu^2+t_{k+1}^4\mu^4)} = \\ &= (1-\mu^2/\bar{a}_k^2)(1-\mu^2/\bar{a}_{k+1}^2) \sum_{t=0}^{\infty} V_{2r+1} \mu^{2r+1} \end{aligned}$$

где все $V_{2r+1} > 0$.

В результате получим значения $\gamma_k^{(r)}$ и $\gamma_{k+1}^{(r)}$ для комплексных корней трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(r)} &= \frac{1}{(2r+1)!} \left(\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \psi(\mu) (1-\mu^2/a_{k+1}^2) \right)_{\mu=0} = \\ &= (1-\mu^2/\bar{a}_k^2) (V_{2r+1} + 2S_{k+1}^2 V_{2r-1} + t_{k+1}^4 V_{2r-3}) \\ \gamma_{k+1}^{(r)} &= \frac{1}{(2r+1)!} \left(\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \psi(\mu) (1-\mu^2/a_k^2) \right)_{\mu=0} = \\ &= (1-\mu^2/\bar{a}_k^2) (V_{2r+1} + 2S_k^2 V_{2r-1} + t_k^4 V_{2r-3}) \end{aligned}$$

Так как $\left| \frac{1}{\bar{a}_k^2} \right| > \left| \frac{1}{\bar{a}_{k+1}^2} \right|$, $t_k^4 > t_{k+1}^4$, $S_k^2 > S_{k+1}^2$, а в образовании U_{2r+1} принимают участие

все $1/a_k^2$ при $i := 1, 2, 3, \dots$, то мы приходим к требуемому неравенству (4).

Аналогично и проще доказывается неравенство (4) в случае вещественных корней a_k . Из этого неравенства вытекает, что члены рядов

$$S_1^{(k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \gamma_k^{(r)}, S_2^{(k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} \gamma_k^{(r)}, k = 1, 2, 3, \dots$$

соответственно меньше, чем члены рядов

$$T_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} U_{2r+1}, T_2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} U_{2r+1}. \quad (5)$$

Поэтому, если ряды (5) сходятся абсолютно, то и все ряды $S_1^{(k)}$ и $S_2^{(k)}$ тоже сходятся абсолютно, то есть все B_k и C_k , определяемые формулами (2) действительно соответствуют. Покажем, что при этом существует и A_0 . В самом деле:

$$A_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0} U_1 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} U_{2r+1} \left(\frac{U_{2r+3}}{U_{2r+1}} \right),$$

а так как при произвольном r будет $\left| \frac{U_{2r+3}}{U_{2r+1}} \right| < 1$, то A_0 существует одновременно с T_2 .

Итак, показано, что при условии абсолютной сходимости рядов (5) существуют все коэффициенты, определяемые соотношением (2).

Покажем, что при условии абсолютной сходимости рядов (5) величины A_0, B_k, C_k не только существуют, но и являются истинными коэффициентами в формуле (1), дающей разложение $f(x)$.

Для этого начнем с рассмотрения сравнительного характера сходимости рядов x^{2r} и x^{2r+1} будем сравнивать ряды для нечетных степеней с рядом для X , а для чет-

ных – с рядом для x^2 (известно, что эти ряды сходятся одновременно). Начнем с нечетных. Для x находим [1]:

$$x = -\frac{4}{\alpha_1} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_H(a_k x)}{a_k \phi'(a_k)} \right) \quad (6)$$

Если при некотором частном значении x ряд этот сходится, то соответствующие суммы

$$S_p^{(2n)} = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{F_H(a_k x)}{a_k \phi'(a_k)} \right) \quad (n \geq p+1)$$

все ограничены, так что $|S_p^{(2n)}| < A_p$ при любом $n > p$.

Здесь A_p – число, не зависящее от n и $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = 0$ в силу сходимости ряда (6).

Все ряды

$$x^{2r+1} = -\frac{4}{\alpha_{2r+1}} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(r)} \frac{F_H}{\phi'(a_k)} \right] \quad (7)$$

сходятся одновременно с (6) при данном x , так как, согласно доказанному выше, все $\lambda_k^{(r)}$ при постоянном r удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_k^{(r)}| < |\lambda_{k+1}^{(r)}| < |U_{2r+1}|,$$

то есть образуют монотонно возрастающую с увеличением k последовательность, то из известного неравенства Абеля вытекает, что

$$\left| \sum_{k=p+1}^{k=n} \lambda_k^{(r)} \frac{F_H(a_k x)}{a_k \phi'(a_k)} \right| < 2A_p |\lambda_n^{(r)}| < 2A_p |U_{2r+1}| \quad (8)$$

причем последнее верно и при $n = \infty$. Полагая поэтому

$$x^{2r+1} = -\frac{4}{\alpha_{2r+1}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(r)} \frac{F_H(a_k x)}{a_k \phi'(a_k)} + \varepsilon_p^{(2r+1)}, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_p^{(2r+1)} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-2}{\alpha_{2r+1}} \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k^{(r)} \frac{F_H(a_k x)}{a_k \phi'(a_k)} \right]$$

Этот остаток ряда, имеет оценку

$$|\varepsilon_p^{(2r+1)}| < 4A_p \left| \frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \right| \quad (10)$$

Для четных разложений найдем аналогично, допустивши сходимость ряда для x^2 :

$$x^{2r+2} = \alpha_0 \frac{U_{2r+3}}{\alpha_{2r+3}} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-2}{\alpha_{2r+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(r)} \frac{F_H(a_k x)}{a_k^2 \phi'(a_k)} \right] + \varepsilon_p^{(2r+2)},$$

причем

$$|\varepsilon_p^{(2r+2)}| < 4A'_p \left| \frac{U_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} \right| \quad (11)$$

где A'_p – это высший предел абсолютной величины сумм

$$\left| \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{F_r(a_k x)}{a_k^2 \phi'(a_k)} \right| \quad (n \geq p+1)$$

так что $\lim_{p \rightarrow \infty} A'_p = 0$.

Теперь уже нетрудно доказать справедливость формулы (1).

Для этого возьмем сумму

$$\sum_{m=0}^{m=2n+2} \beta_m x^m = f(x) - \rho_{2n+2}, \quad (12)$$

где ρ_{2n+2} – остаток ряда и подставим сюда в левую часть вместо отдельных степеней x^m их выражения из (9) и (10), что допустимо, если для соответственного значения ряды эти сходятся, что мы и установили выше. Получается:

$$\begin{aligned} f(x) - \rho_{2n+2} = & A_0^{(n)} F(0) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{k=p} [B_k^{(n)} F_H(a_k x) + C_k^{(n)} F_r(a_k x)] \right\} + \\ & + \sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+1} \varepsilon^{(2r+1)} + \sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+2} \varepsilon^{(2r+2)} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = & \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\beta_{2m}}{\alpha_{2m}} U_{2m+1}, B_k^n = -\frac{2}{a_k \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \lambda_k^{(r)} \\ C_k^n = & -\frac{2}{a_k^2 \varphi'(a_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} \lambda_k^{(r)} \end{aligned}$$

Дополнительные суммы в правой части (13) оцениваем с помощью (10) и (11), именно:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+1} \varepsilon^{(2r+1)} \right| & < 4A_p \sum_{r=0}^{r=n} \left| \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} U_{2r+1} \right| < 4A_p \sum_{r=0}^{\infty} \left| \frac{\beta_{2r+1}}{\alpha_{2r+1}} U_{2r+1} \right| = A_p Q, \\ \left| \sum_{r=0}^{r=n} \beta_{2r+2} \varepsilon^{(2r+2)} \right| & < 4A'_p \sum_{r=0}^{\infty} \left| \frac{\beta_{2r+2}}{\alpha_{2r+2}} U_{2r+1} \right| = A'_p Q', \end{aligned}$$

где Q и Q' – конечные величины по условию абсолютной сходимости рядов (5). Оценка эта не зависит от n и остается верной при $n \rightarrow \infty$. Переходя поэтому в (13) к пределу $n = \infty$ при постоянном p и замечая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{2n+2} = 0$ в силу сходимости ряда $f(x)$ при выбранном значении x и что, согласно доказанному выше

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0^{(n)} = A_0, \lim_{n \rightarrow \infty} B_k^{(n)} = B_k, \lim_{n \rightarrow \infty} C_k^{(n)} = C_k$$

получаем

$$f(x) = A_0 F_0 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{k=p} [B_k F_H(a_k x) + C_k F_r(a_k x)] \right\} + r_p$$

причем $|r_p| < (A_p Q + A'_p Q')$

Переходя к пределу $p \rightarrow \infty$, получаем разложение (1) с коэффициентами (2), что и требуется доказать.

Для действительных корней a_k в приведенных выше выкладках достаточно устранить символ $2 \operatorname{Re}$ и мы получим тот же результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт», 2003-101с.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭНДОПРОТЕЗА НА УСТОЙЧИВОСТЬ И РАБОТОСПОСОБНОСТЬ СИСТЕМЫ «КОСТЬ-ИМПЛАНТАНТ»

Куриленко А.В.

In this article the system stability «bones- implant» has been under consideration.

Эндопротезирование тазобедренного сустава является эффективным и часто единственным способом восстановления утраченной функции конечности. Поэтому необходимо изучение поведения системы «кость-имплантант», как единого целого.

В данной работе в первом приближении решается задача об устойчивости системы «кость-имплантант». Нас интересует влияние физико-механических свойств титанового имплантанта и его геометрических размеров на потерю устойчивости.

На рис. 1 приведено схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант». Изобразим тазобедренную кость с имплантантом под действием приложенной нагрузки P , для этого разделим ее на два участка. На основании рис. 1 определяем момент M :

$$M = Pd \sin \alpha. \quad (1)$$

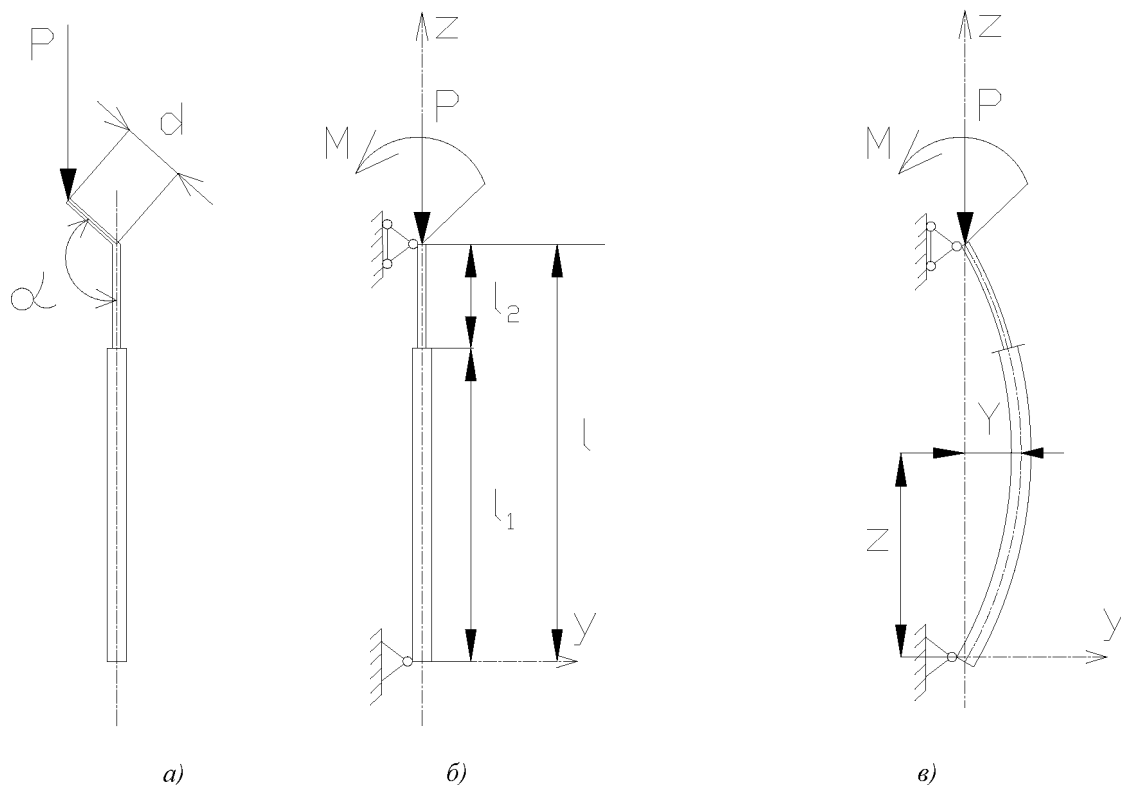


Рис. 1. Схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант»

Запишем физико-механические и геометрические характеристики кости и имплантанта. Кость: $E_1 = 10^{10} \text{ Па}$ $I_1 = 2,5 \text{ см}^4$ $l_1 = 45 \text{ см}$ $d_1 = 2,7 \text{ см}$. Имплантант: $E_2 = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ $I_2 = 0,14 \text{ см}^4$ $l_2 = 15 \text{ см}$ $d_2 = 1,3 \text{ см}$.

Составим два дифференциальных уравнения изгиба для имплантанта и кости соответственно:

$$1,7E_2I_2y_1'' + Py_1 = 0, \quad (1)$$

$$E_2I_2y_2'' + Py_2 + M = 0, \quad (2)$$

где $E_1I_1/E_2I_2 = 1,7$ – отношение жесткостей в системе «кость-имплантант» при изгибе.

Обозначим: $P/1,7E_2I_2 = k^2$; $a = \frac{M}{1,7E_2I_2}$. (3)

Перепишем дифференциальные уравнения в виде:

$$y_1'' + k^2 y_1 = 0, \quad (1')$$

$$y_2'' + (1,33k)^2 y_2 + a = 0. \quad (2')$$

Решения уравнений (1') и (2') имеют вид:

$$y_1 = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz, \quad (3)$$

$$y_2 = c_3 \sin 1,33kz + c_4 \cos 1,33kz + y_2^*. \quad (4)$$

Находим частное решение $y_2^* = \text{const}$:

$$(1,33k)^2 y_2^* + a = 0;$$

$$y_2^* = -\frac{a}{(1,33k)^2} = -\frac{M}{1,7E_2I_2 \cdot 1,33^2 k^2} = -\frac{M \cdot 1,7E_2I_2}{1,7E_2I_2 \cdot 1,33^2 P} = -\frac{0,57M}{P} = -0,57d \sin \alpha$$

учетом этого перепишем (3) и (4):

$$y_1 = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz, \quad (3')$$

$$y_2 = c_3 \sin 1,33kz + c_4 \cos 1,33kz - 0,57d \sin \alpha. \quad (4')$$

Запишем граничные условия:

$$z = 0: \quad y_1 = 0,$$

$$z = \frac{3}{4}l: \quad y_1 = y_2,$$

$$z = \frac{3}{4}l: \quad y_1' = y_2',$$

$$z = l: \quad y_2 = 0.$$

Из первого начального условия получаем $c_2 = 0$, а для оставшихся выписываем соответственно три уравнения:

$$c_1 \sin \frac{3}{4}kl = c_3 \sin 1,33k \frac{3}{4}l + c_4 \cos 1,33k \frac{3}{4}l - 0,57d \sin \alpha,$$

$$\frac{3}{4}c_1 \cos \frac{3}{4}kl = c_3 \cos 1,33k \frac{3}{4}l - c_4 \sin 1,33k \frac{3}{4}l,$$

$$c_3 \sin 1,33kl + c_4 \cos 1,33kl - 0,57d \sin \alpha = 0.$$

Решим данную систему уравнений методом Гаусса.

Подставим числа:

$$k^2 = \frac{P}{1,7E_2I_2} = \frac{P}{E_1I_1} = \frac{750}{10^{10} \cdot 2,5 \cdot 10^{-8}} = 5, \quad k = \sqrt{5} = 2,24 \text{ м}^{-1};$$

$$l = 0,6 \text{ м}; \quad kl = 1,344.$$

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} 0,85c_1 - 0,98c_3 - 0,22c_4 = -b \\ 0,4c_1 - 0,22c_3 + 0,98c_4 = 0 \\ 0,98c_3 - 0,22c_4 = b \end{cases} .$$

Решив ее, находим $c_1 = 0,058d \sin \alpha$; $c_3 = 0,112d \sin \alpha$; $c_4 = 0,606d \sin \alpha$.

Подставляя исходные данные окончательно получим:

$$y = \begin{cases} 0,058d \sin \alpha \sin 2,24z & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{3}{4}l \\ d \sin \alpha (0,606 \sin 2,98z + 0,112 \cos 2,98z - 0,57) & \text{при } \frac{3}{4}l \leq z \leq l \end{cases} . \quad (5)$$

Формула (5) позволяет найти опасное сечение, где $M = M_{\max}$, и оценить работоспособность системы в зависимости от d и α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун П.И. Шукейло Ю.А. Биомеханика: Учебник для вузов.-СПб.: Политехника, 2000.-463с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформированных систем.-М: Наука, 1967.-984с.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНОВОДОВ ДЛЯ МИНИМАЛЬНО-ИНВАЗИВНОЙ ХИРУРГИИ

Степаненко Д.А., Минченя В.Т., Чигарев А.В.

Flexible ultrasonic waveguides are widely used in minimally invasive surgery. Their design is sophisticated procedure because they exhibit complex vibration phenomena like parametric resonance and inter-modal interactions and at present there are no scientific and engineering theories capable to facilitate this procedure. This work presents generic mathematical and computer models which may be useful for design of flexible waveguides. Timoshenko's model and Webster's equation are used to study resonant conditions for flexural and longitudinal vibrations and to obtain their graphical representation in the form of resonant curves and surfaces depending on the number of varied parameters. Correctness of the proposed models is verified by means of finite elements method.

Данная статья посвящена проблеме моделирования гибких волноводов для передачи ультразвуковых колебаний и является продолжением исследований авторов в этой области [1-4]. Основной областью применения гибких ультразвуковых волноводов является минимально-инвазивная хирургия, где они применяются для разрушения патологических тканей, например, опухолей и тромбов. Благодаря возможности упругого деформирования такие волноводы могут доставляться к патологической ткани через естественные каналы и полости в теле пациента, например, кровеносные сосуды, уретру или клиновидную пазуху носа, что требует минимального хирургического вмешательства.

Так как эффективность процесса разрушения патологических тканей определяется величиной амплитуды продольных колебаний рабочего окончания волновода, то следует стремиться к достижению максимального значения этой амплитуды при заданной удельной акустической мощности электроакустического преобразователя, который используется в качестве возбудителя колебаний и преобразует электрическую энергию в энергию механических колебаний. Колебания от преобразователя передаются к волноводу через концентратор в виде стержня переменного сечения, который усиливает их по амплитуде. Так как концентратор имеет в отличие от волновода значительную изгибную жесткость, то его колебания могут считаться чисто продольными. Однако в волноводе вследствие малой изгибной жесткости могут возникать динамическая потеря устойчивости и явление параметрического резонанса, которые проявляются в возникновении поперечных (изгибных) колебаний волновода. При этом часть энергии продольных колебаний расходуется на возбуждение изгибных колебаний, что приводит к снижению амплитуды продольных колебаний и эффективности функционирования колебательной системы. Для теоретического обоснования способов повышения устойчивости волновода необходимо, прежде всего, исследовать влияние параметров волновода, в частности, его геометрических размеров, на условия резонанса продольных и изгибных колебаний, так как для волновода с заданными параметрами устойчивость будет зависеть от собственных форм и соотношения собственных частот этих колебаний.

С точки зрения механики задача исследования условий резонанса ультразвуковых волноводов сводится к задаче о собственных колебаниях стержней переменного сечения, которая в свою очередь может быть решена в случае продольных колебаний путем анализа уравнения Вебстера [5], используемого при расчете ультразвуковых концентраторов, а в случае изгибных колебаний – на основе теории Эйлера-Бернулли или теории Тимошенко [6]. Исследуемый волновод (Рис. 1) состоит из ступеней 1-3 постоянного поперечного сечения, связанных между собой переходными участками 4-5 переменного поперечного сечения.

Волновод может иметь 2-3 ступени в зависимости от требуемого коэффициента усиления колебаний по амплитуде. Изменение диаметра поперечного сечения переходных участков описывается полиномиальными функциями $d(x)$, коэффициенты которых определяются по заданным значениям диаметра d_i в равномерно распределенных точках x_i (Табл. 1), а также исходя из условий гладкого сопряжения переходных участков со смежными ступенями.

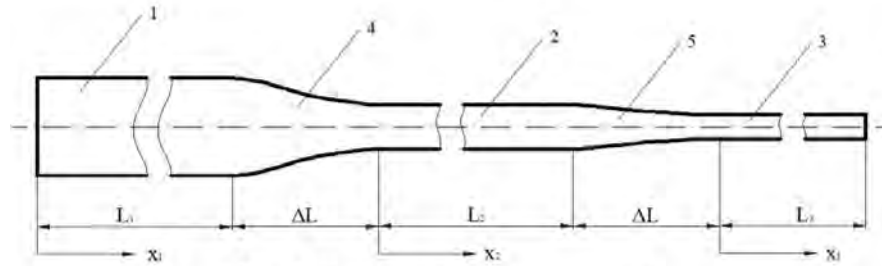


Рис. 1. Схема конструкции волновода

Решение задачи о собственных колебаниях двухступенчатого волновода было подробно рассмотрено в предшествующих исследованиях авторов [1-4], в связи с чем в данной статье мы приведем лишь основные результаты этих исследований:

1. Разработан комбинированный численно-аналитический метод исследования условий резонанса волновода, основанный на использовании аналитических решений уравнения колебаний для ступеней волновода и численном решении уравнения колебаний для переходного участка, которое позволяет определить передаточную матрицу (матрицу связи) [7], связывающую значения решения на конце первой ступени со значениями решения в начале второй ступени.

2. Построены резонансные кривые, представляющие собой совокупность точек на плоскости (L_1, L_2) , соответствующих значениям длин L_1 и L_2 ступеней волновода, при которых наблюдается резонанс при заданной частоте колебаний f . Эти кривые, пример которых для частоты $f = 25 \text{ кГц}$ приведен на Рис. 2, позволяют решать задачу синтеза волновода с заданной резонансной частотой. Резонансные кривые могут быть построены как линии уровня (контурные графики) функции $\text{sgn}(\det A(L_1, L_2))$, вдоль которых обращается в нуль резонансная функция $\det A(L_1, L_2)$, зависящая от геометрических параметров волновода, механических свойств его материала, граничных условий на концах волновода и частоты колебаний.

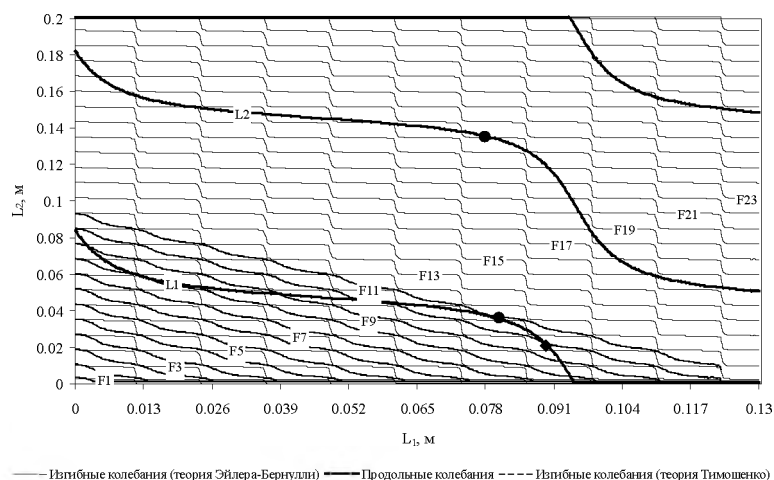


Рис. 2. Резонансные кривые продольных (L) и изгибных (F) колебаний для двухступенчатого волновода

3. Установлено, что при исследовании изгибных колебаний теория Тимошенко дает более точные результаты по сравнению с теорией Эйлера-Бернулли, причем последняя может давать существенную погрешность при определении резонансных значений геометрических параметров.

4. Разработана методика полуавтоматического моделирования собственных колебаний гибких волноводов с использованием программы ANSYS и языка программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language) [4]. Результаты моделирования подтверждают правильность разработанного численно-аналитического метода исследования условий резонанса.

Таблица 1.

Значения диаметра для переходных участков волновода

Координата x , мм	0	1	2	3	4	5	6
Диаметр d для перехода 4, мм	2	1,89	1,62	1,33	1,13	1	0,9
Диаметр d для перехода 5, мм	0,9	0,83	0,73	0,64	0,57	0,51	0,5

В случае трехступенчатого волновода приходится рассматривать не резонансные кривые, а резонансные поверхности в пространстве (L_1, L_2, L_3) . Каждая из резонансных поверхностей может быть охарактеризована порядком n_s , то есть номером, возрастающим по мере ее удаления от начала координат. Параметры (L_1, L_2, L_3) неотрицательны, так как имеют смысл длин ступеней, поэтому рассматриваются лишь поверхности, заключенные в первом октанте. Поверхность, наиболее близкая к началу координат, имеет первый порядок. Каждая из поверхностей соответствует определенной моде колебаний, характеристикой которой является порядок моды n_m , имеющий физический смысл числа узловых точек эпюры колебательных смещений для данной моды. Как будет показано далее, для изгибных колебаний порядок резонансной поверхности связан с порядком соответствующей ей моды колебаний зависимостью $n_m = n_s + 1$, то есть поверхности первого порядка соответствует мода второго порядка и т.д. Для продольных колебаний $n_m = n_s$. Так как резонансные поверхности упорядочены в соответствии с их расстоянием r относительно начала координат, то целесообразно описывать их с помощью сферических координат (r, φ, θ) . Для определения зависимостей $r(\varphi, \theta)$, соответствующих резонансным поверхностям, рассматриваются значения резонансных функций $\det A(r, \varphi, \theta)$ вдоль множества дискретных направлений (φ_i, θ_j) , заполняющих первый октант пространства (r, φ, θ) . Значения резонансной функции для каждого из направлений рассчитываются для ряда дискретных значений радиальной координаты r_k . Значение радиальной координаты $r(n, \varphi_i, \theta_j)$, при котором резонансная функция изменяет свой знак n -ый раз, будет соответствовать резонансной поверхности n -го порядка. В качестве примера на Рис. 3 приведены контурные графики резонансной поверхности 14-го порядка для изгибных колебаний (тонкие сплошные линии) и резонансной поверхности 1-го порядка для продольных колебаний (тонкие штриховые линии), построенные для частоты $f = 25$ кГц.

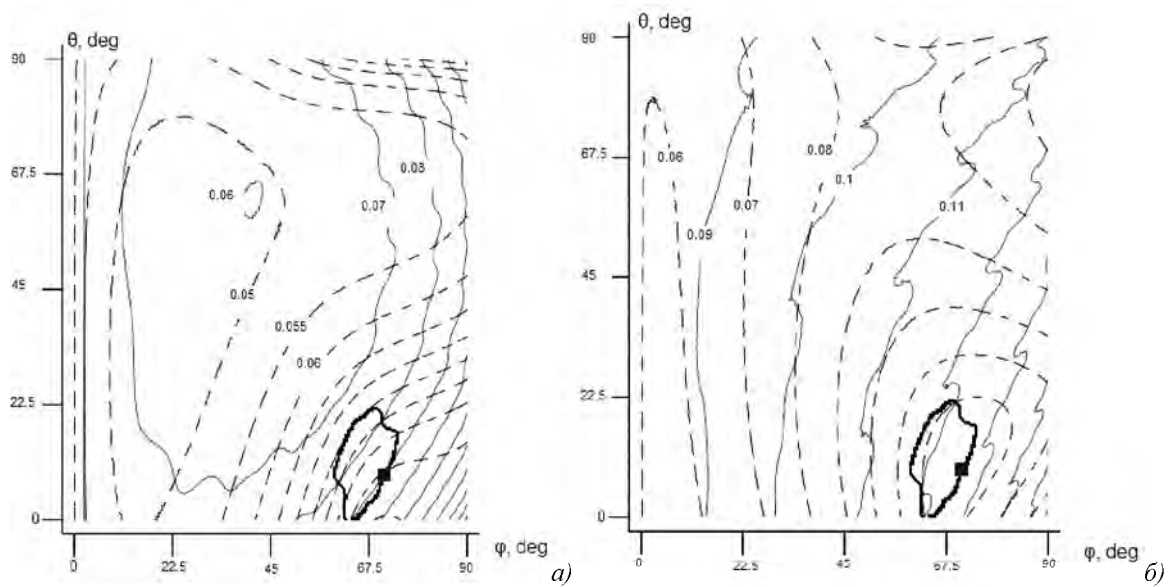


Рис. 3. Контурные графики резонансных поверхностей

Изолинии на Рис. 3а соответствуют равным значениям радиальной координаты r , а изолинии на Рис. 3б – равным значениям длины волновода L . Резонансные поверхности для продольных и изгибных колебаний пересекаются по пространственной кривой (резонансной кривой), проекция которой изображена на Рис. 3 утолщенной сплошной линией. Точки, принадлежащие этой кривой, соответствуют значениям геометрических параметров волновода, обеспечивающим совместный резонанс продольных и изгибных колебаний. Для любой точки резонансной поверхности значения геометрических параметров волновода могут быть найдены по известным формулам перехода от сферических координат к декартовым:

$$L_1 = r \sin \varphi \cos \theta, \quad L_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad L_3 = r \cos \varphi.$$

Трехмерное представление резонансной поверхности 1-го порядка для продольных колебаний в пространстве (L_1, L_2, L_3) приведено на Рис. 4.

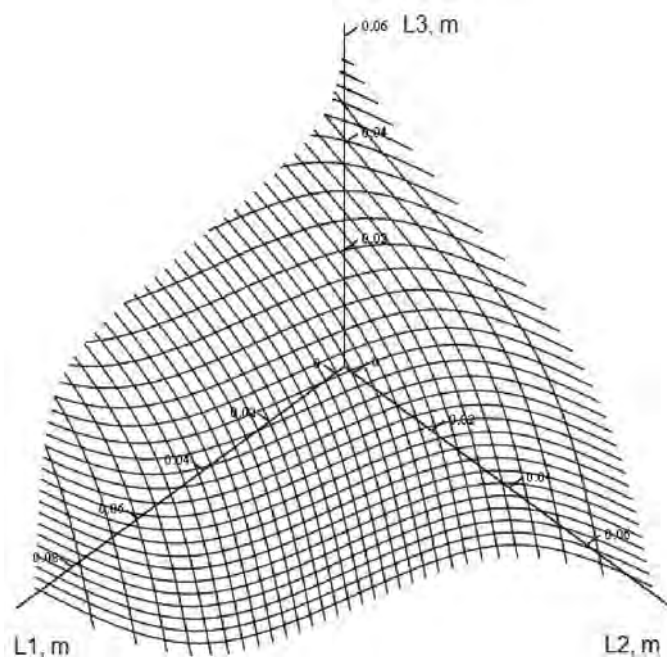


Рис. 4. Трехмерное представление резонансной поверхности 1-го порядка для продольных колебаний

Изолинии резонансной поверхности, соответствующие равным значениям длин ступеней L_1 и L_3 , по своей форме сходны с резонансными кривыми продольных колебаний, приведенными на Рис. 2.

Для расчета длин ступеней (L_1, L_2, L_3) , обеспечивающих совместный резонанс продольной моды колебаний m -го порядка и изгибной моды колебаний, соответствующей резонансной поверхности n -го порядка, необходимо задаться значением радиальной координаты r и определить угловые координаты (φ_i, θ_j) , соответствующие этому значению на резонансной кривой. Значение r может задаваться произвольным образом, что соответствует бесконечному множеству резонансных конфигураций волновода в отличие от случая двухступенчатых волноводов, для которого совместный резонанс продольных и изгибных колебаний реализуется лишь для конечного числа конфигураций. Определение угловых координат (φ_i, θ_j) производится путем построения матрицы $M_{ij} = (r_l(m, \varphi_i, \theta_j) - r)^2 + (r_f(n, \varphi_i, \theta_j) - r)^2$, где индексы l и f соответствуют продольным и изгибным колебаниям. Индексы i и j , соответствующие минимальному элементу матрицы M , определяют значения искомым угловых координат. Верификация результатов моделирования выполнялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ) для волновода с длинами ступеней $L_1 = 0,0846$ м, $L_2 = 0,0134$ м и $L_3 = 0,0293$ м. Точка резонансной кривой, соответствующая этим значениям длин, отмечена на Рис. 3 маркером в виде квадрата. Рассматриваемый волновод имеет наибольшую длину среди волноводов, для которых наблюдается совместный резонанс продольной моды колебаний 1-го порядка и одной из изгибных мод колебаний (в рассматриваемом случае 15-го порядка). Для рассматриваемого волновода выполнялся модальный анализ с помощью программы ANSYS и полученные в результате анализа собственные частоты колебаний сравнивались с заданной частотой $f = 25$ кГц, которая была принята при расчете геометрических параметров. Относительная погрешность составила 0,33 % для продольных колебаний и 0,31 % – для изгибных, что подтверждает правильность полученных результатов. Моделирование с помощью МКЭ также позволило установить связь между порядком резонансной поверхности для изгибных колебаний и порядком соответствующей этой поверхности моды колебаний. Для этого был рассмотрен волновод, состоящий только из переходных участков, что соответствует началу координат в пространстве (L_1, L_2, L_3) . Собственные частоты изгибных мод колебаний 1-го и 2-го порядков составили для этого волновода 12963 и 40764 Гц. Так как любая другая конфигурация волновода получается из рассматриваемой путем удлинения, то соответствующие ей собственные частоты изгибных мод 1-го и 2-го порядков будут снижаться по сравнению с рассмотренной начальной конфигурацией. Это означает, что резонанс на заданной частоте $f = 25$ кГц может наблюдаться лишь для изгибных мод колебаний с порядком не ниже 2-го, то есть резонансной поверхности 1-го порядка будет соответствовать мода 2-го порядка, а в общем случае будет выполняться соотношение $n_m = n_s + 1$.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и расчете гибких волноводов для минимально-инвазивной хирургии, а также для анализа их динамической устойчивости и возможных способов ее повышения, который будет являться предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Минченя, В.Т. Линейные колебания двухступенчатого волновода-концентратора для ультразвукового тромбозиса / В.Т. Минченя, Д.А. Степаненко // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 114-119.
2. Stepanenko, D.A. Modeling of flexible waveguides for ultrasonic vibrations transmission: Longitudinal and flexural vibrations of non-deformed waveguide / D.A. Stepanenko, V.T. Minchenya // Ultrasonics. – 2009. – doi: 10.1016/j.ultras.2009.09.033.
3. Минченя, В.Т. Анализ резонансных явлений в гибких волноводных системах с применением теорий Эйлера-Бернулли и Тимошенко / В.Т. Минченя, Д.А. Степаненко, Е.Н. Юрчик // Материалы МНТК «Приборостроение-2009». – Мн., 2009. – С. 247-248.
4. Bubulis, A. Semi-automatic modal analysis of flexible ultrasonic waveguides in ANSYS / A. Bubulis, V.T. Minchenya, D.A. Stepanenko // Материалы МНТК «Приборостроение-2009». – Мн., 2009. – С. 145-146.
5. Webster, A.G. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph / A.G. Webster // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. – 1919. – Vol. 5. – Pp. 275-282.
6. Han, S.M. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories / S.M. Han, H. Benaroya, T. Wei // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 225. – Pp. 935-988.
7. Квашнин, С.Е. Ультразвуковые электроакустические преобразователи и волноводы-инструменты для медицины. – М.: Издательство МГТУ, 1995. – 43 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ЛЕПЕСТКА КЛАПАНА СЕРДЦА В ANSYS.

Пронкевич С.А., Коваль Ю.Г.

Лечение сосудисто-сердечных заболеваний является актуальной проблемой и исследование процессов кровотока в сердце и поведение его компонентов, в частности клапанов, требует комплексного изучения. Составление аналитических моделей поведения биологических тканей, которые из-за сложности геометрии требуют численного решения в САЕ системах.

Описание работы клапанов сердца.

Работа клапанов сердца описывается функцией времени $R_i(t)$, $i \in 1,10,11,15$ которую можно рассмотреть как переменное сопротивление клапана. Потоки крови между камерой сердца и сосудистой системой регулируются клапанами сердца. Клапан считается проводящим каналом с переменной проводимостью, нелинейно зависящий от значений функций кровообращения в его непосредственной окружности. В математическом описании протекания крови через клапан пренебрегаем инерционностью потока крови, так как она играет второстепенную роль (по сравнению с сопротивлением) в функционировании клапана.

Во многих работах клапан моделируется простым релейным элементом, открывающимся или закрывающимся в зависимости от перепада входного давления. Однако в реальном сердце наблюдается регургитация – течение крови через клапан в обратном направлении, непосредственно перед закрытием клапана. При моделировании клапана с описанием регургитации открытие клапана происходит в момент, когда возникает сколь угодно малый перепад давлений в направлении открытия. Открывшийся клапан остается полностью открытым до появления обратного потока крови через него, после чего его проводимость начинает уменьшаться и, когда в обратном направлении протек заданный объем, клапан окончательно скачком закрывается.

Для упрощения вычислений входные (атрио-вентрикулярные) клапаны моделируются простым релейным элементом. Для выходных (аортального и легочно-артериального) клапанов применена упрощенная модель, которая позволяет имитировать регургитацию.

Примем проводимость открытого клапана постоянной, равной p_i^* . Изменение проводимости $p_i(t)$ клапанов сердца можно выразить зависимостями

$$p_i(t) = \frac{1}{R_i(t)} = \begin{cases} p_i, P_{i-1}(t) \geq P_j(t), \\ 0, P_{i-1}(t) < P_j(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $P_{i-1}(t)$, $P_j(t)$ – давление крови до и после клапана соответственно.

Будем считать, что клапан откроется, как только в нем возникает перепад давления в направлении открытия, то есть

$$P_{i-1}(t) - P_j(t) > 0. \quad (2)$$

Клапан остается открытым, пока выполняется условие

$$q_i(t) > -q_i^*. \quad (3)$$

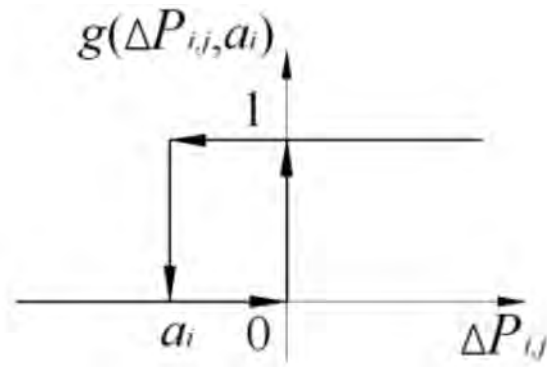


Рис. 1. Гистерезисная функция $g(\Delta P_{ij}, a_i)$

Если обратный поток превысит заданное значение q_i^* , клапан закроется.

Легко убедиться, что условие (3) равноценно условию

$$P_{i-1}(t) - P_j(t) > -\frac{q_i^*}{z_i} \quad (4)$$

Из вышесказанного следует, что данная модель клапана обладает гистерезисной характеристикой зависимости проводимости от перепада давления на нем. Для сокращенной записи функционирования клапана определим гистерезисную функцию $g(\Delta P_{ij}, a_i)$ (рис. 1)

$$g(\Delta P_{ij}, a_i) \begin{cases} \frac{1}{2}(\text{sign}(\Delta P_{ij}) + 1), \frac{d(\Delta P_{ij})}{dt} \geq 0, \\ \frac{1}{2}(\text{sign}(\Delta P_{ij} - a_i) + 1), \frac{d(\Delta P_{ij})}{dt} < 0, \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\Delta P_{ij} = P_{i-1}(t) - P_j(t)$. Параметр гистерезисной функции определяется как

$$a_i = \begin{cases} 0, (i, j) \in \{(10, 10); (15, 1)\}, \\ -\frac{q_i^*}{z_i}, (i, j) \in \{(2, 2); (11, 11)\} \end{cases} \quad (6)$$

С помощью функции $g(\Delta P_{ij}, a_i)$ модель клапанов сердца можно записать в следующем виде

$$p_i(t) = \frac{1}{R_i(t)} = p_i^* g(\Delta P_{ij}, a_i). \quad (7)$$

Таким образом, нулевое значение коэффициента a_i соответствует входным клапанам сердца, наличие гистерезиса $a_i \neq 0$ – выходным клапанам.

Составленная аналитически функция позволяет описать работу клапана, и может быть учтена при моделировании работы клапана в САЕ системах которые в настоящее время находят в науке и технике все большее распространение. Во многих случаях получение аналитического решения не представляется возможным ввиду сложности геометрии и условий закрепления или нагружения модели. Численный же анализ позволяет получить и исследовать решение таких задач. Поэтому в современной биомеханике широко используются методы конечного элемента, позволяющие моделировать любые задачи. В частности, одним из программных комплексов, использующих МКЭ, является ANSYS, обладающий полным набором функций для решения поставленных задач.

Проблемы определения НДС, скоростей и траекторий движения тока крови являются одними из основных в современной медицине. Результаты исследования позволят диагностировать атеросклеротические изменения сосудистой стенки на ранней стадии заболевания, выбрать оптимальный вариант реконструкции сосудистого русла, прогнозировать результаты реконструктивных операций, таких, как эндартерэктомия и ангиопластика, а также выявлять условия образования аневризм крупных кровеносных сосудов.



Постановка задачи. Модель лепестка клапана и жидкости оказывающей воздействие представлена на рисунке 2. Для моделирования жидкости выбран элемент FLUID141 для моделирования клапана PLANE182. Для моделирования жидкости как крови были введены значения плотности 1050 кг/м^3 и вязкости, $4,8 \text{ E-}4 \text{ кгс/м}$. Скорость потока жидкости $0,35 \text{ м/с}$ давление на выходе из канала равно 0 Па . Лепесток клапана закреплен по грани прилегающей к стенке канала.

В результате расчета получены следующие значения основных показателей потока жидкости:

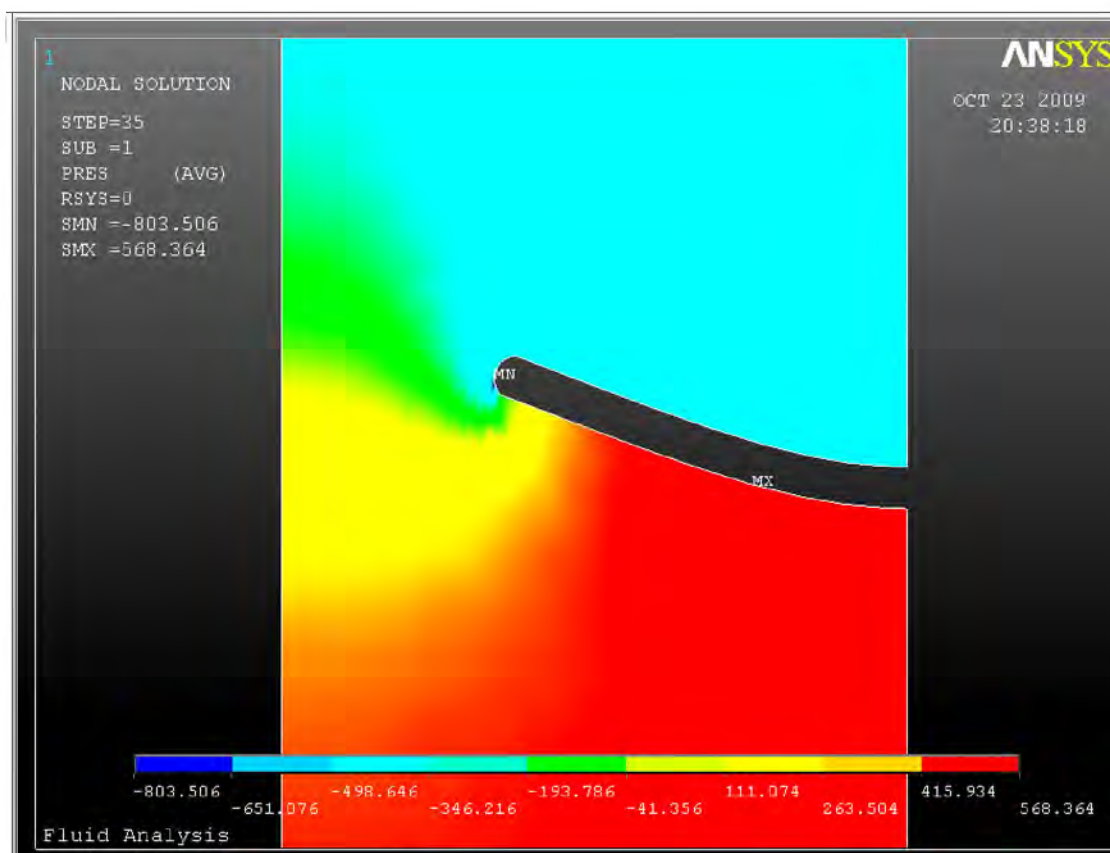


Рис 2а Распределение давления.

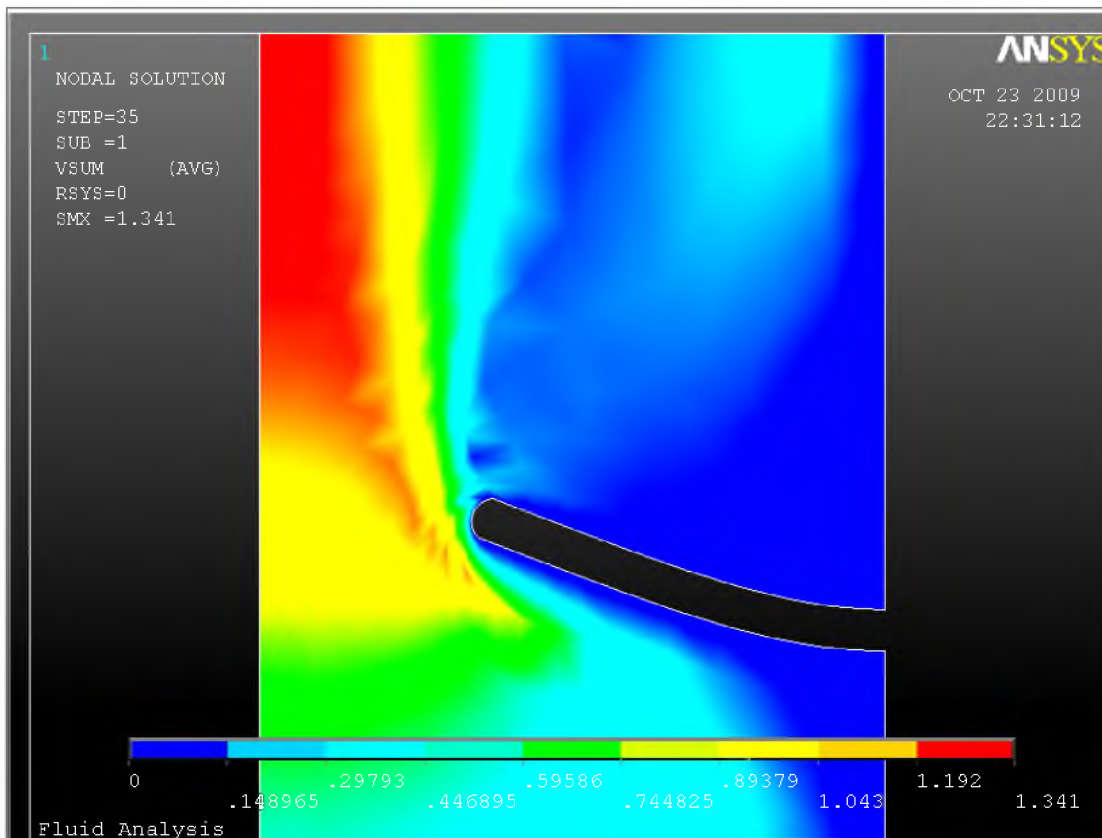


Рис 26 Распределение скорости потока

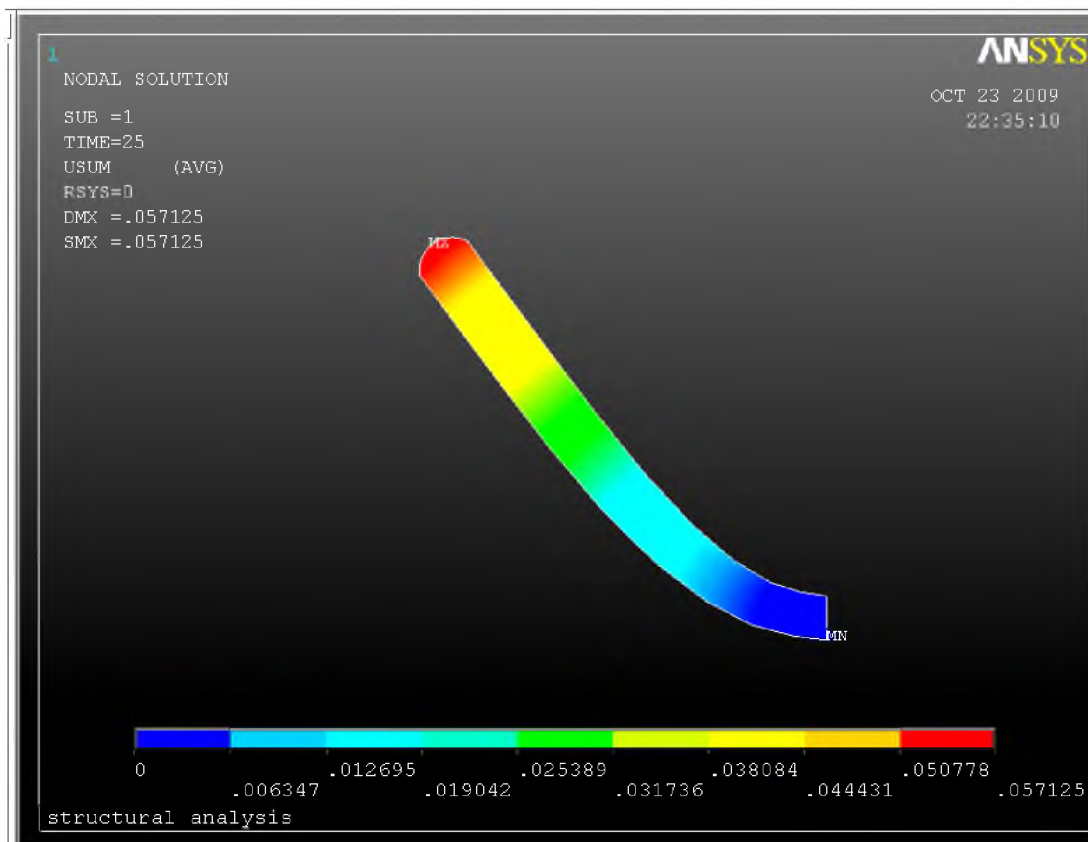


Рис 3 Перемещение лепестка клапана.

Вывод:

В дальнейшем предполагается решение более сложных задач с целью построения численно-аналитической модели динамики кровотока отдельных участков сонной артерии в норме, с патологическими изменениями и после реконструктивных операций. Результаты исследований найдут широкое теоретическое и практическое применение в таких областях медицины, как ангиология, кардиология, сердечно-сосудистая хирургия, смогут существенно облегчить задачи по выбору оптимальных способов реконструкции сосудистого русла в каждом конкретном случае тяжелого течения заболевания, а в случае легкого течения – своевременно определить начало болезни, что позволит предупредить её дальнейшее прогрессирование.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 МОДЕЛЬ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ, ОРИЕНТИРОВАННАЯ НА СОВРЕМЕННУЮ ИНТЕНСИВНУЮ ТЕРАПИЮ С.В. Фролов, С.Н. Маковеев, Д.Ш. Газизова, В.А. Лищук.
- 2 Лищук В.А. Математическая теория кровообращения. Медицина, 1991 – 256с.
- 3 Чигарев А.В. Кравчук А.С. Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. Москва «машиностроение» 2004.

РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ ЗОНЫ И ЗАПАСА УСТОЙЧИВОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ПОЛЗУНА ПРЕССА В НАПРАВЛЯЮЩИХ

Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П.

In this article the design procedure of size of a zone and a stock of steady sliding punch of press in the directing which is based on preconditions of calculations of the parameters of the elementary mechanic-mathematical model "plug-shaft".

Вопрос о скольжении одного тела по другому является исключительно важным для техники. Действительно, если заклинит ползун пресса в его направляющих, ползун кулачкового или кривошипно-ползунного механизма, пуансон в матрице, втулку на валу, поршень в цилиндре, подвижную шестерню на валу и т.д., то выйдут из строя целые механизмы, что неминуемо приведёт к катастрофе. Поэтому задача определения значений параметров пар скольжения («ползун-направляющие», «поршень-цилиндр», «втулка-вал» и т.д.), а также величины зоны и запаса скольжения, в которых обеспечивается гарантированное скольжение одного тела по другому, является актуальной.

Однако в литературе (в том числе в [1-8]) отсутствуют методики расчёта величины зоны и запаса гарантированного скольжения в парах скольжения на стадии их проектирования, что заставляет конструкторов параметры пар скольжения на практике определять путём многочисленных и трудоёмких экспериментальных исследований.

В данной работе сделана попытка разработать методику расчёта значений параметров, величины зоны и запаса гарантированного скольжения различных пар скольжения, в частности, пары скольжения: «ползун-направляющие». Эта методика подходит как для «медленных» прессов, ползун которых движется с маленькой величиной ускорения – статика, так и для «быстрых» прессов (штамповочные и чеканные прессы, ползун которых движется с большим ускорением – динамика). При этом в качестве основы для расчётов параметров различных пар скольжения использована простейшая механико-математическая модель скольжения втулки по валу.

Постановка задачи.

Рассмотрим равновесие невесомой втулки шириной b , жестко скрепленной с невесомым рычагом, к которому на расстоянии L_0 приложена сила P (рис.1). Конструкция позволяет перемещать силу P вдоль рычага. Коэффициент трения между втулкой и валом f . Требуется найти зависимость между параметрами пары скольжения «втулка-вал»: L_0 , b , f , P .

Составим три линейно независимых уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, приложенной к паре скольжения – «втулка-вал»:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -N_A + N_B &= 0; \\ \sum Y &= 0; & F_A + F_B - P &= 0 \\ \sum m_A &= 0; & F_B \cdot d + N_B \cdot b - P(L_0 + d/2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Решая уравнения равновесия (1), получим: } L_0 = \frac{b}{2f}. \quad (2)$$

Знак равенства в (2) соответствует состоянию предельного равновесия втулки на валу или – границе устойчивости-неустойчивости равновесия втулки на валу (или скольжения втулки по валу). Малейшее изменение значения любого из параметров (2) может привести к заклиниванию втулки на валу или, наоборот, к скольжению ее по валу.

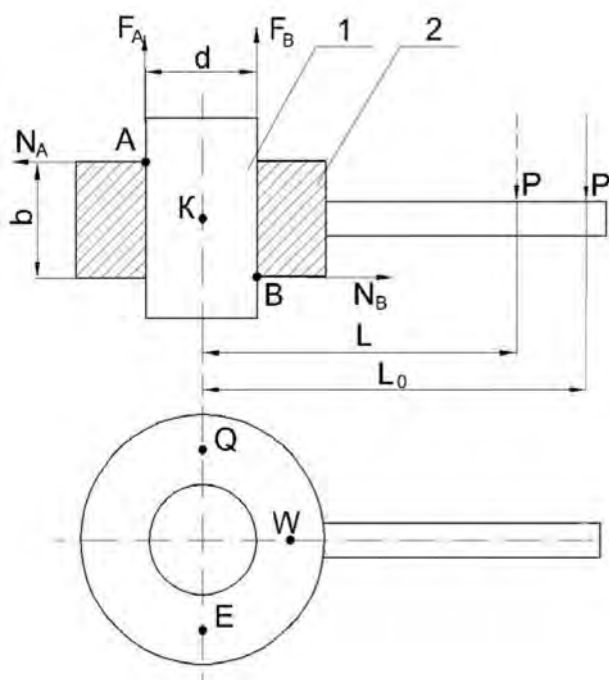


Рис. 1 Пара скольжения – «втулка – вал»: 1 – вал; 2 – невесомая втулка, которая жестко скреплена с невесомым рычагом

Если увеличить параметр L – расстояние от оси втулки до новой точки приложения силы P к рычагу так, что $L > L_0$, то момент силы P относительно точки A также увеличится. Это приведёт к заклиниванию втулки. Следовательно, условием гарантированного заклинивания втулки на валу является неравенство:

$$L > \frac{b}{2f}.$$

При уменьшении параметра L новая точка приложения силы P будет смещаться от границы устойчивости – неустойчивости сначала к точке W , а затем к точкам Q и E (см. рис.1). При этом лёгкость скольжения втулки увеличится и достигнет своего максимума в точках Q и E . Следовательно, условием гарантированного скольжения втулки по валу является неравенство:

ство:
$$L < \frac{b}{2f}. \quad (3)$$

Неравенство (3) и есть то необходимое условие скольжения втулки по валу. Однако это условие не является достаточным. Для определения условия достаточности проведём исследование неравенства, изменяя значения параметров. Поочерёдно давая приращение величине каждого из параметров, проследим изменение величины левой и правой частей неравенства (3), а также и изменение величины запаса устойчивого скольжения.

Исследование условий достаточности выполним двумя способами (рис. 2).

1) При первом способе сила P в случаях $A, Б, В, Г$ прикладывается в одном и том же месте рычага $L = \text{const}$, изменяются только параметры системы b, f .

2) При втором способе (случаи $Д, Е$) параметры системы b, f – постоянны, изменяется только расстояние L .

Величина запаса гарантированного скольжения W имеет вид:

$$W = \frac{L_0 - L}{L_0} \cdot 100\%. \quad (4)$$

Рассмотрим первый способ исследования достаточных условий.

А) Втулке шириной b дадим приращение $+\Delta b$, получим:

$$L_1 < (b+\Delta b)/2f \Rightarrow L_1 < (b/2f) + (\Delta b/2f).$$

Зона скольжения увеличивается на $\Delta b/2f$, за счёт смещения границы скольжения вправо, которой соответствует $L_1 = (b/2f) + (\Delta b/2f)$. Запас скольжения увеличивается.

Б) Втулке шириной b дадим приращение $-\Delta b$, получим:

$$L_2 < (b - \Delta b)/2f \Rightarrow L_2 < (b/2f) - (\Delta b/2f).$$

Зона скольжения уменьшается на $\Delta b/2f$, за счёт смещения границы скольжения влево, которой соответствует $L_2 = (b/2f) - (\Delta b/2f)$. Запас скольжения уменьшается.

В) Коэффициенту трения f дадим приращение $+\Delta f$.

При этом начальное положение, соответствует границе устойчивости-неустойчивости скольжения $b/2f$, а конечное положение – новой границе скольжения $b/2(f + \Delta f)$.

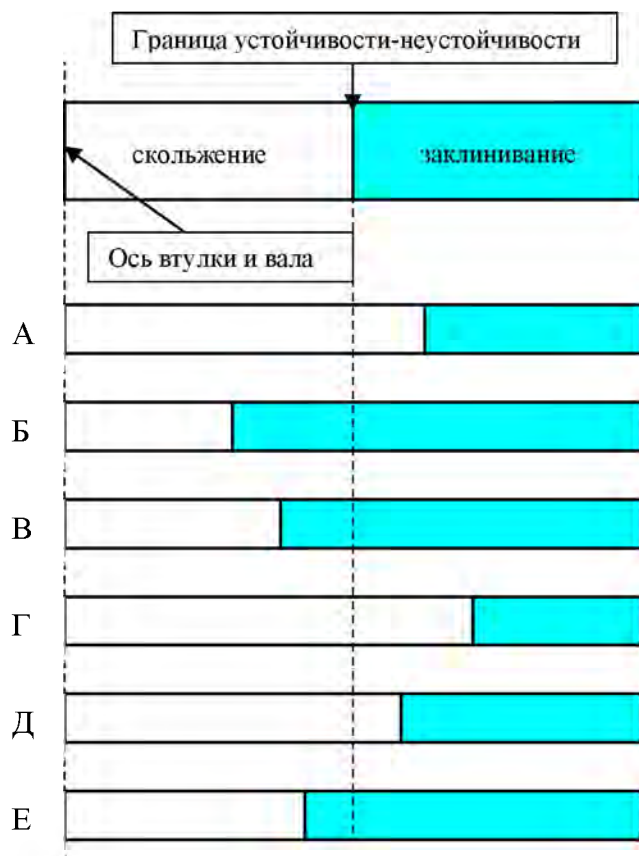


Рис. 2 Качественный анализ размеров зон устойчивости: при первом способе – случаи А, Б, В, Г; при втором способе – случаи Д, Е

Так как все параметры положительные, то разность между конечным и начальным положением – отрицательная:

$$\frac{b}{2(f + \Delta f)} - \frac{b}{2f} = -\frac{b\Delta f}{2f(f + \Delta f)}$$

Поэтому зона скольжения уменьшится на $b\Delta f/2f(f + \Delta f)$. Соответственно уменьшится и запас гарантированного скольжения.

Г) Рассмотрим разность конечного и начального положений при приращении $-\Delta f$.

$$\frac{b}{2(f - \Delta f)} - \frac{b}{2f} = \frac{b\Delta f}{2f(f - \Delta f)}$$

Так как все параметры положительные, то разность между конечным и начальным положениями – положительная, т.е. зона скольжения увеличится на $b\Delta f/2f(f - \Delta f)$. Соответственно увеличится и запас гарантированного скольжения.

Рассмотрим второй способ исследования достаточных условий.

Д) Расстоянию L от оси втулки до новой точки приложения силы P (которая на рис. 1 изображена штриховой линией) дадим приращение $-\Delta L$, получим

$$L - \Delta L < b/2f.$$

В этом случае разность $L_0 - L$ увеличится. Следовательно, увеличится и величина запаса скольжения.

При $L < b/2f + \Delta L$ (сила P не сдвигается со своего прежнего места) граница скольжения сдвинется вправо, что говорит об увеличении величины зоны и запаса гарантированного скольжения.

Е) Расстоянию от оси втулки до точки приложения силы P дадим приращение $+\Delta L$, получим $L + \Delta L < b/2f$ (по аналогии с пунктом Д)).

Таблица 1

Варьируемые параметры	Исходные данные			Результаты расчёта	
	b, см	f	L, см	L ₀ , см	W, %
b, f, L	10	0.2	10	25	60
b+Δb, f, L	15	0.2	10	37.5	73.3
b-Δb, f, L	5	0.2	10	12.5	20
b, f+Δf, L	10	0.3	10	16.7	40.1
b, f-Δf, L	10	0.1	10	50	80
b, f, L+ΔL	10	0.2	12	25	52
b, f, L-ΔL	10	0.2	8	25	68

При этом разность $L_0 - L$ уменьшится, поэтому уменьшится и величина запаса скольжения.

При $L < b/2f - \Delta L$ граница скольжения сдвинется влево. Поэтому уменьшится размер зоны и величина запаса гарантированного скольжения.

Примеры расчёта величины зоны и запаса гарантированного скольжения в функции значений параметров системы «втулка-вал» **f, b, L** приведены в таблице 1.

Изначально примем, что $f = 0.2$, $b = 10$ см, $L = 10$ см.

Если $L > L_0$, то величина запаса скольжения станет отрицательной, что соответствует заклиниванию втулки на валу.

Для определения условий равнопеременного скольжения втулки массой m по валу в динамике используем принцип Даламбера.

В результате получим: для ускоренного движения:

$$L_{01} = \frac{b}{2f} \left(1 - \frac{ma}{P} \right);$$

для замедленного

$$L_{02} = \frac{b}{2f} \left(1 + \frac{ma}{P} \right),$$

где L_{01} , L_{02} соответствуют по смыслу величине L_0 .

Условия скольжения втулки по валу в случае ускоренного и замедленного движений имеют вид:

$$L_{11} < \frac{b}{2f} \left(1 - \frac{ma}{P} \right); \quad (5)$$

$$L_{22} < \frac{b}{2f} \left(1 + \frac{ma}{P} \right); \quad (6)$$

где значения параметров L_{11} и L_{22} соответствуют по смыслу величине L .

Анализ формул (5) и (6) выполним для следующих случаев:

- $a = 0$, тогда $L_{11} = L_{22} = L$, причём $L < b/2f$.
- $a \neq 0$, но $P \gg ma$.

При ускоренном движении втулки по валу граница скольжения сместится влево, зона и запас гарантированного скольжения уменьшатся. В случае замедленного движения втулки по валу все наоборот – граница скольжения сместится вправо, зона и запас гарантированного скольжения увеличатся.

Проектирование втулки и вала в динамике необходимо осуществлять по формуле (5), т.е. по наиболее опасному варианту, когда зона и запас гарантированного скольжения уменьшаются.

Теперь рассмотрим решение задачи о скольжении ползуна прессы в направляющих.

Постановка задачи.

К ползуну прессы в форме параллелепипеда весом P и шириной b через невесомую консоль на расстоянии C_0 и L_0 приложена сила Q , которую можно перемещать по консоли. Коэффициент трения между ползунком и направляющими f (все остальные размеры показаны на рис.3). Требуется найти зависимость между параметрами пары скольжения «ползун-направляющие»: $b, d, f, h, P, Q, C_0, L_0$.

Составим шесть линейно независимых уравнения равновесия для пространственной произвольной системы сил, приложенной к паре скольжения – «ползун-направляющие»:

$$\begin{aligned}
 \sum X = 0: & \quad X_N + X_M = 0; & \quad X_N = X_M; \\
 \sum Y = 0: & \quad Y_N - Y_M = 0; & \quad Y_N = Y_M; \\
 \sum Z = 0: & \quad P - Q + F_M + F_N = 0; & \quad F_M + F_N = P + Q; \\
 \sum m_X = 0: & \quad F_N \cdot \frac{b}{2} - F_M \cdot \frac{b}{2} + Q \cdot C_0 - Y_M \cdot \frac{h}{2} - Y_N \cdot \frac{h}{2} = 0; \\
 \sum m_Y = 0: & \quad -X_N \cdot \frac{h}{2} - X_M \cdot \frac{h}{2} + Q \cdot L_0 + F_N \cdot \frac{d}{2} - F_M \cdot \frac{d}{2} = 0; \\
 \sum m_Z = 0: & \quad X_N \cdot \frac{b}{2} + X_M \cdot \frac{b}{2} - Y_M \cdot \frac{d}{2} - Y_N \cdot \frac{d}{2} = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где F_M, F_N – соответственно, силы трения в точках M и N .

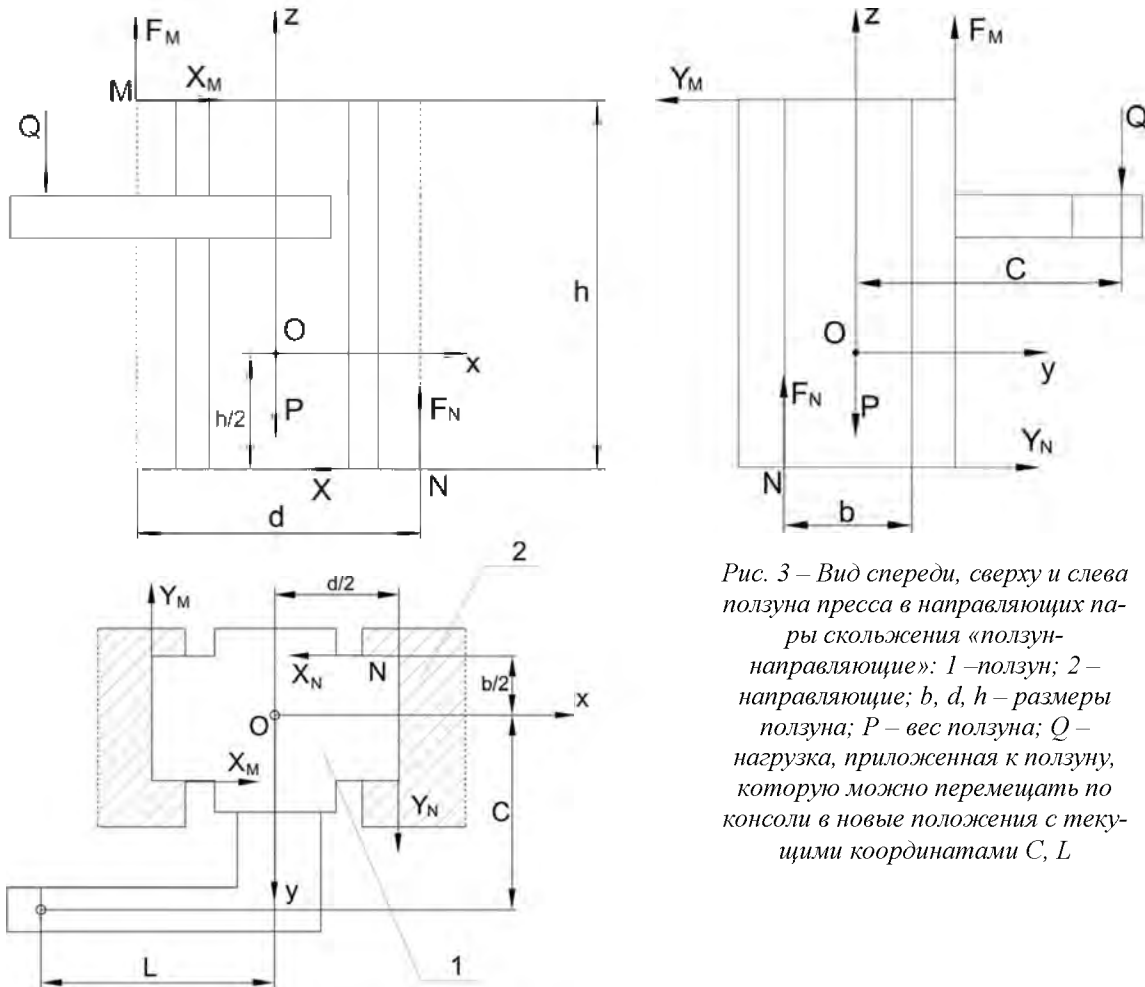


Рис. 3 – Вид спереди, сверху и слева ползуна прессы в направляющих пары скольжения «ползун-направляющие»: 1 – ползун; 2 – направляющие; b, d, h – размеры ползуна; P – вес ползуна; Q – нагрузка, приложенная к ползуну, которую можно перемещать по консоли в новые положения с текущими координатами C, L

Решая уравнения равновесия (7), получим

$$C_0 = \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) \cdot [h + 0,5(f_M - f_N) \cdot (b + d)]}{(f_N + f_M) \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)},$$

$$L_0 = \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) \cdot [h + 0,5(f_M - f_N) \cdot (b + d)]}{(f_N + f_M) \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)},$$
(8)

где f_N и f_M коэффициенты трения в точках **N** и **M**; C_0 , L_0 – параметры, соответствующие предельному состоянию равновесия или границе устойчивости-неустойчивости ползуна (по аналогии со скольжением втулки по валу).

В случае $f_N = f_M = f$ формулы (8) принимают вид:

$$C_0 = \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}, \quad L_0 = \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)},$$
(9)

Малейшее изменение значения любого из параметров (9) может привести к заклиниванию или к скольжению ползуна.

Условия заклинивания ползуна прессы в направляющих имеют вид:

$$C \geq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}, \quad L \geq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)}.$$
(10)

Условия скольжения ползуна прессы в направляющих имеют вид:

$$C \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}, \quad L \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)}.$$
(11)

Проанализируем влияние значений каждого из параметров **b**, **d**, **h**, **f**, **P**, **Q**, **C**, **L** на величину зоны и запаса скольжения ползуна в направляющих.

1) Определим вид зависимости между параметрами **b**, **d** и C_0 , L_0 .

Из (9) следует, что: $C_0 = \frac{b}{d} \cdot L_0$. (12)

2) Исследуем зависимость **h** от **b**, **d**, **f**, **P**, **Q**, C_0 , L_0 . Для этого разделим каждое из неравенств (11) на их левые части, получим:

$$1 \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \left(C_0 + C_0 \frac{d}{b}\right)}, \quad 1 \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f \left(L_0 + L_0 \frac{b}{d}\right)}.$$
(13)

С учетом (12), формулы (13) примут вид: $1 \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) h}{2f (C_0 + L_0)}$. (14)

$$\text{Из (14) следует: } h \geq \frac{2f(C_0 + L_0)}{\left(1 + \frac{P}{Q}\right)}. \quad (15)$$

3) Исследуем зависимость коэффициента трения **f** от параметров **h**, **P**, **Q**, **C**₀, **L**₀.

$$\text{Выразим } f \text{ из (15): } f \leq \frac{\left(1 + \frac{P}{Q}\right)h}{2(C_0 + L_0)}. \quad (16)$$

Неравенство (16) является достаточным условием гарантированного скольжения ползуна и определяет качество обработки поверхностей пары скольжения «ползун-направляющие».

Для расчёта величины зоны (используются формулы (9)) и запаса гарантированного скольжения ползуна прессы в направляющих в функции значений параметров **b**, **d**, **h**, **f**, **P**, **Q**, **C**, **L** необходимо использовать следующие формулы :

$$W_C = \left(1 - \frac{C \cdot 2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}{h \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}\right) \cdot 100\%, \quad (17)$$

$$W_L = \left(1 - \frac{L \cdot 2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)}{h \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}\right) \cdot 100\%. \quad (18)$$

Примеры расчёта величины зоны и запаса гарантированного скольжения системы «ползун-направляющие» в функции параметров **b**, **d**, **h**, **f**, **P**, **Q**, **C**, **L** приведены в таблице 2.

Изначально примем, что **b** = 20 см, **d** = 30 см, **f** = 0.2, **h** = 40 см, **P/Q** = 0.1, **C** = 30 см, **L** = 35 см.

Для определения условий равнопеременного скольжения ползуна прессы массой **m** в направляющих в динамике используем принцип Даламбера.

В результате получим формулы для замедленного (знак «+») и для ускоренного (знак «-») движений ползуна прессы в направляющих:

$$C < \frac{\left(1 + \frac{P}{Q} \pm \frac{ma}{Q}\right) \cdot h}{2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}, \quad L < \frac{\left(1 + \frac{P}{Q} \pm \frac{ma}{Q}\right) \cdot h}{2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)} \quad (19)$$

Для ускоренного движения ползуна граница скольжения сместится влево, зона и запас гарантированного скольжения уменьшатся. Для замедленного движения ползуна всё наоборот – граница скольжения сместится вправо, зона и запас гарантированного скольжения увеличатся.

Проектирование ползуна прессы в динамике необходимо осуществлять по формулам (19) с учётом знака «-», т.е. по наиболее опасному варианту.

Таблица 2

Варьируемые параметры	Исходные данные							Результаты расчёта			
	b, см	d, см	f	h, см	P/Q	C, см	L, см	C ₀ , см	W _C , %	L ₀ , см	W _L , %
b,d,f,h,P/Q, C, L	20	30	0.2	40	0.1	30	35	44	31.8	66	47
b+Δb	25	30	0.2	40	0.1	30	35	50	40	60	41.7
b-Δb	15	30	0.2	40	0.1	30	35	36.7	18.2	73.4	52.3
d+Δd	20	35	0.2	40	0.1	30	35	40	25	70	50
d-Δd	20	25	0.2	40	0.1	30	35	48.9	38.6	61.1	42.7
f+Δf	20	30	0.3	40	0.1	30	35	29.3	-2.3	44	20.5
f-Δf	20	30	0.1	40	0.1	30	35	88	65.9	132	73.5
h+Δh	20	30	0.2	45	0.1	30	35	49.5	39.4	74.3	52.9
h-Δh	20	30	0.2	35	0.1	30	35	38.5	22.1	57.8	39.4
P/Q+Δ(P/Q)	20	30	0.2	40	0.15	30	35	46	34.8	69	49.3
P/Q-Δ(P/Q)	20	30	0.2	40	0.05	30	35	42	28.6	63	44.4
C+ΔC	20	30	0.2	40	0.1	35	35	44	20.5	66	47
C-ΔC	20	30	0.2	40	0.1	25	35	44	43.2	66	47
L+ΔL	20	30	0.2	40	0.1	30	40	44	31.8	66	39.4
L-ΔL	20	30	0.2	40	0.1	30	30	44	31.8	66	54.5

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский И.В. Трение и износ. М., «Машиностроение», 1968, – 415с.
2. Крагельский И.В., Щедров В.С., Развитие науки о трении. М., Изд-во АН СССР, 1956, – 280с.
3. Яворский П.М., Селезнёв Ю.А., Справочное руководство по физике. М., Изд-во «Наука», 1989, – 512с.
4. Решетов Д.Н., Детали машин. М., 1961, – 489с.
5. Артоболевский И.И., Теория механизмов и машин. М., Изд-во «Наука», 1988, – 639с.
6. Яблонский А.А., Никифорова В.М., Курс теоретической механики Часть – 1. – М.: Высшая школа, 2004, – 764с.
7. Яблонский А.А. Курс теоретической механики Часть – 2. –М.: Высшая школа, 1984, – 422с.
8. Дальский А.М., Косилова А.Г., Мещеряков Р.К. Справочник технолога-машиностроителя. Том 1,2 М., «Машиностроение», 2003, – 553с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КАРЬЕРНЫХ САМОСВАЛОВ ОСОБО БОЛЬШОЙ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ В СРЕДЕ ANSYS

Испеньков С.А., Ракицкий А.А.

В настоящее время Белорусский автомобильный завод производит широкую гамму самосвалов грузоподъемностью от 30 до 320 тонн. Одной из наиболее востребованных моделей машин является карьерный самосвал особо большой грузоподъемности БелАЗ-75131 грузоподъемностью 130 тонн.

Опыт эксплуатации первых опытных образцов данных самосвалов показал низкую надежность их рам. При пробеге в несколько десятков тысяч километров появлялись усталостные трещины и разрушения на лонжеронах рам в местах соединения с задней поперечиной. Проведен значительный объем исследований в различных карьерах с применением тензометрии. В результате конструкция задней части рамы была кардинально изменена: задняя поперечина из трубы круглого сечения была заменена на увеличенную поперечину коробчатого сечения с плавным переходом в лонжероны (рисунок 1).

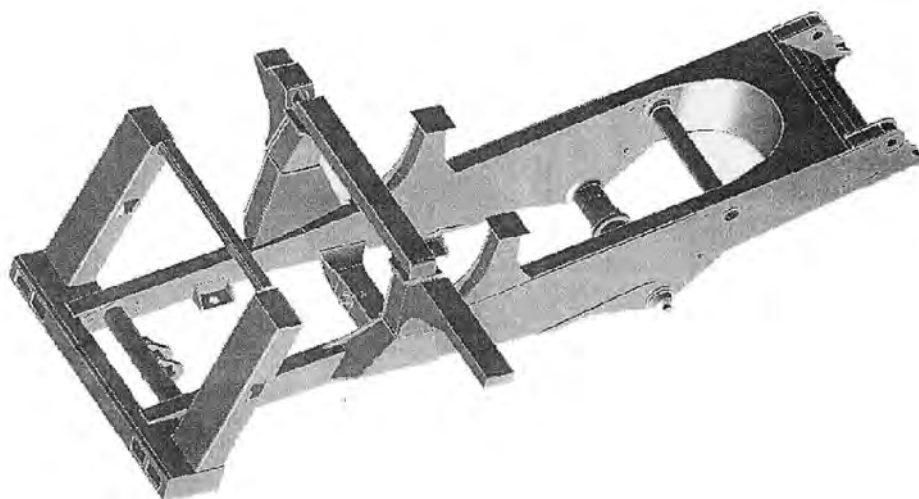


Рис. 1. Твёрдая модель рамы карьерного самосвала БелАЗ-75131.

По мере увеличения пробегов машин в эксплуатации начали выявляться усталостные разрушения сварных соединений в других опасных зонах. Одной из таких зон является соединение второй нижней поперечины с лонжеронами, где наблюдались разрушения на пробегах после 100-150 тысяч километров (рисунок 2). Увеличения сечения поперечины в месте крепления к лонжеронам и использования прокатного листа большей толщины увеличили прочность данной зоны, но не позволили полностью решить проблему, разрушения стали проявляться после 200 тысяч километров пробега. Причины данных разрушений не были найдены, статические расчеты методом конечных элементов экстремальных режимов эксплуатации не выявили значительной концентрации напряжений в соединении.



Рис. 2. Следы ремонта разрушенного соединения второй нижней поперечины с лонжероном на раме самосвала БелАЗ-75131.

Результаты более детального анализа напряженно-деформированного состояния опасных зон второй нижней поперечины рамы с помощью тензометрии в дорожных условиях показали, что спектр напряжений в данной зоне отличается от спектра усилий в подвеске. При увеличении скорости движения по неровностям и высоты неровностей в спектре напряжений, действующих поперек сварного шва, преобладают колебания с частотой 3.5-4 Гц (рисунок 3).

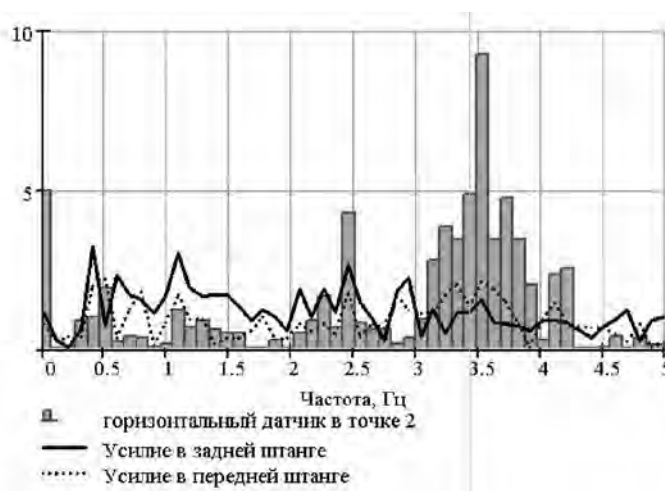


Рис. 3. Спектральная плотность мощности напряжений в опасной зоне и усилий в подвеске самосвала БелАЗ-75131.

Были обнаружены признаки наличия резонанса: высокие амплитудные значения напряжений и длительность их затухания при действии незначительных сил. Очевидно, что колебания напряжений в опасных точках поперечины рамы носят не только вынужденный характер, что приводит к ускоренному накоплению усталостных повреждений в зоне соединения второй поперечины с лонжероном. По результатам исследования НДС предполагаемая форма деформации рамы в области второй нижней поперечины должна иметь вид параллелограммирования в горизонтальной плоскости.

Для правильной интерпретации результатов испытаний и определения форм колебаний автомобиля, ответственных за напряженно-деформированное состояние исследуемой зоны, понадобилось проведение дополнительных экспериментальных исследований и динамического моделирования самосвала БелАЗ-75131.

На предварительной фазе анализа исследований в качестве первоначальной оценки динамического поведения конструкции рамы и самосвала в целом применен модальный анализ, реализованный в пакете ANSYS. Данный пакет имеет библиотеку из более 100 типов конечных элементов и позволяет помимо статических задач механики деформируемого твердого тела проводить вычисления собственных частот сложных механических систем, моделировать динамическое поведение при гармоническом и случайном воздействии, а также исследовать линейные и нелинейные переходные процессы [1].

Для проведения модального анализа в графическом редакторе ANSYS была создана оболочечная конечно-элементная модели рамы по координатам срединных поверхностей деталей рамы. Для построения модели рамы в виде оболочки с умеренной толщиной были использованы элементы Shell43.

Модальный анализ модели незакрепленной рамы выявил самую нижнюю собственную частоту ее колебаний около 20 Гц (рисунок 4). Форма колебаний на самой нижней частоте соответствует кручению рамы.



Рис. 4. Первая форма собственных колебаний рамы в незакрепленном состоянии.

На базе оболочечной модели рамы была построена модель самосвала путем крепления на ней платформы, груза, силовой установки (дизель-генератор на подрамнике), радиатора и других наиболее значимых по массе узлов. Все навесные агрегаты были смоделированы в виде точечных масс с заданными главными моментами инерции. Для связи дополнительных элементов конструкции с оболочкой использованы жесткие балки, пружины, имитирующие резиновые амортизаторы, шарниры и уравнения связей. Кроме того были добавлены некоторые конструктивные элементы оперения в виде конечно-элементных оболочек.

Подвеска силовой установки, платформы и радиатора на раме смоделирована как абсолютно твердое тело, подвешенное на упругих элементах (пружинах), расположенных в направлении главных осей упругости резинового элемента. Для этого предварительно были собраны данные взвешивания основных узлов самосвала БелАЗ-75131, экспериментально определены характеристики жесткости амортизаторов силовой установки и платформы самосвала, радиатора. Для вычисления массово-инерционных характеристик основных узлов: силовой

установки, платформы, груза, радиатора и т.п. построены их полные твердотельные модели в пакете программ твердотельного проектирования ProEngineer.

Модальный анализ рамы с навесным оборудованием выявил более низкие собственные частоты колебаний, также связанные с кручением рамы на частоте 4.65Гц (рисунок 5).

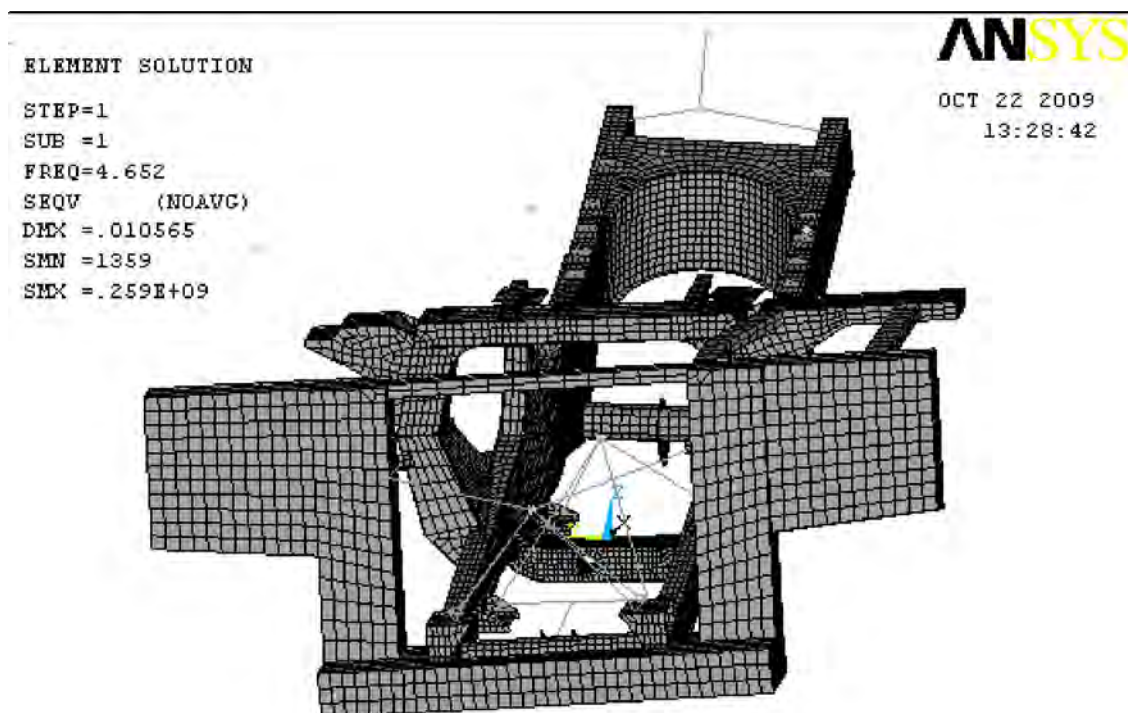


Рис. 5. Первая форма собственных колебаний рамы с установленным оборудованием и с грузом в незакрепленном состоянии.

Для детального анализа динамического поведения автомобиля в целом полученная модель была дополнена элементами подвески передней оси и заднего моста с шинами. Данные узлы имеют значительные массы и моменты инерции в сравнении с рамой (12 тонн): масса передней оси в сборе с колесами составляет около 14 тонн, а задней оси в сборе с колесами около 33 тонн. Радиальная жесткость колес незначительно отличается от жесткости цилиндров подвески, а для задней подвески в груженом состоянии суммарная радиальная жесткость сдвоенных колес приблизительно в два раза меньше жесткости цилиндра задней подвески. Характеристики шин были взяты из результатов статических испытаний, полученных на предприятии «Белшина» г. Бобруйск. Так как нелинейность жесткости шин и цилиндров подвески не учитывается в модальном анализе, задаваемые параметры жесткости шин и подвески были взяты из величины тангенса угла наклона характеристики при определенной нагрузке, соответствующей распределению веса самосвала с полной загрузкой.

В результате были получены моды колебаний с собственными критическими частотами. Проведено сравнение расчетных модальных частот с результатами дорожных испытаний (таблица 1).

Таблица 1.

Соответствие расчётных частот собственных колебаний карьерного самосвала грузоподъемностью 130 тонн полной загрузкой в диапазоне от 0,5 до 5Гц

Расчетные частоты собственных колебаний		Экспериментальные частоты колебаний	Основные признаки формы колебаний
Модальная форма	Частота, Гц	Частота, Гц	
1	0,54	0,39-0,58	Поперечно-угловые колебания автомобиля на подвеске и шинах
2	0,72	0,68-0,88	Вертикально-угловые колебания автомобиля вокруг оси, проходящей через центральный шарнир задней подвески
3	1,03	1,07-1,27	Вертикальные колебания автомобиля на передней подвеске
4	1,41	1,27-1,46	Вертикальные колебания автомобиля на задней подвеске
5	1,54	1,27-1,56	Поперечно-угловые колебания автомобиля вокруг продольной оси поддрессоренной массы
	-	1,95-2,64	Вертикально-угловые колебания вокруг оси, проходящей через задний мост
6	3,92	3,51-3,9	Поперечно-угловые колебания передней оси и заднего моста с кручением рамы
7	4,35		

Как видно из таблицы, форму колебаний в частотном диапазоне 1,95-2,64 расчет не выявил. Вероятно, в данной модели отсутствует колебательная система с собственной частотой в данном диапазоне, предположительно, это система рулевого управления. Таким образом, были получены расчетные формы собственных колебаний автомобиля 3,92 и 4,35Гц, связанные с поперечно-угловыми колебаниями передней оси с передней частью рамы и заднего моста с разными соотношениями амплитуды перемещений. На данных модах колебаний, как показывает расчет, происходит кручение рамы, сопровождающееся поперечным изгибом лонжеронов и сдвигом в зоне соединения нижней второй поперечины (рисунок 6).

Анализ результатов исследования выявил значительное влияние на динамику самосвала при движении по неровной дороге параметров жесткости шин и массово-инерционных характеристик передней оси, заднего моста и колес.

Пространственная конструкция рамы и пространственное расположение узлов крепления подвески обуславливают сложную форму ее деформации: в основном кручении с поперечным изгибом. Следовательно, прочность сварных соединений поперечин с лонжеронами, также зависит и от жесткости лонжеронов на кручение и поперечный изгиб.

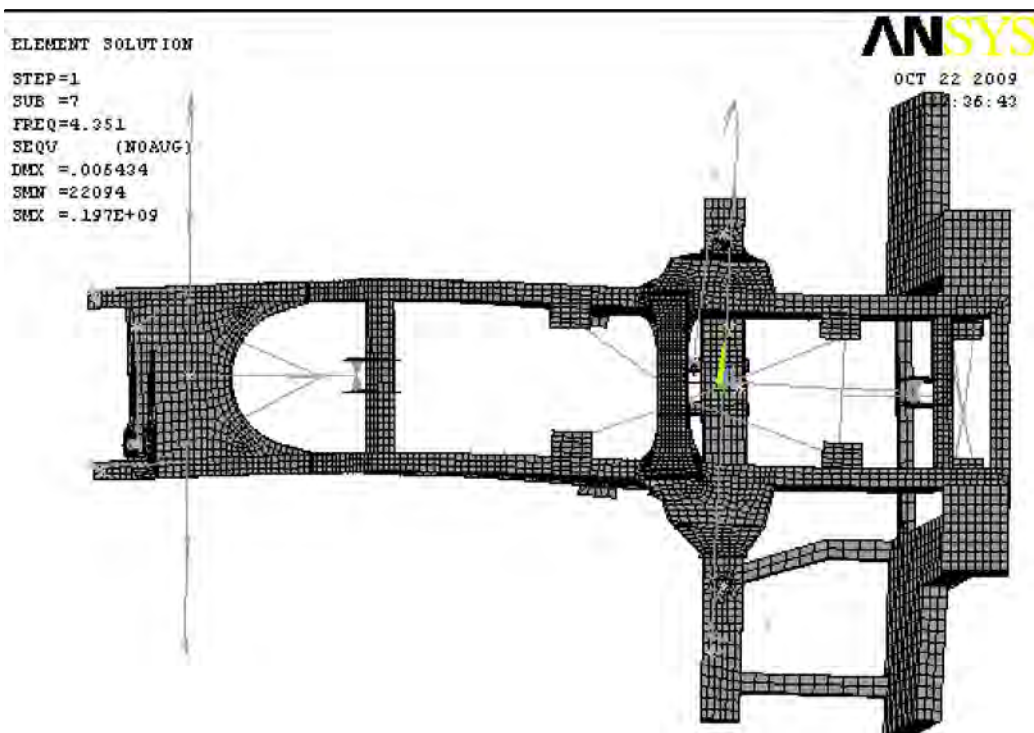


Рис. 6. Форма собственных колебаний самосвала грузоподъемностью 130 тонн с полной загрузкой (вид снизу).

Очевидно, существует возможность повышения долговечности рамы самосвала путем подбора параметров сечения лонжеронов, ширины полки и толщины боковых листов.

Кроме того увеличение прочности опасных зон соединения второй нижней поперечины с лонжероном возможно добиться более плавными переходами с большим радиусом, например, с помощью литых вставок, что позволит расположить сварные швы в менее нагруженных зонах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640с.

COMPUTER SIMULATION OF 6-DOF PARALLEL MECHANISM

Dainiak I. V., Arebi M. A., Alekhovich G. N.

The six degree of freedom spatial movement system has been examined. Algorithms and simulation programs for direct and inverse kinematic problems solving of spatial mechanism are presented. As a result of computer simulation the movement system's actuator spatial motion capabilities are obtained and investigated.

INTRODUCTION

The modern phase of science and technology evolution in the field of automatic and robotic systems is characterized by the use of multi-degree-of-freedom movement systems, realizing almost any spatial movements of an executive or machining tool. Additional requirements for simultaneous implementation of all translational and angular motions are in increasing frequency demanded for new developed movement position devices. The multi-degree-of-freedom systems constructed on the basis of 6-DOF parallel mechanisms are among the most perspective solutions for such motions implementation. However, the task of rapid kinematic and dynamic analysis of such parallel mechanisms is one of the main difficulties in the sphere of robotics. Therefore the paper examines the simulation and analysis of the 6-DOF parallel mechanism in MATLAB/Simulink development environment to present a productive and up-to-date way of similar robotic manipulators engineering.

KINEMATIC STRUCTURE OF THE MECHANISM

Kinematic structure of 6-DOF (degree-of-freedom) spatial parallel mechanism is shown on Fig. 1. It is composed of 6 independent legs connecting the mobile platform P13 with the base. Each of these legs is a serial kinematic chain that is controlled by one motor which actuates one of the joints.

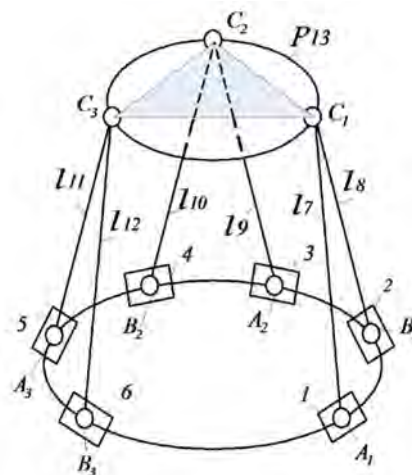


Fig. 1. Mechanism structure

The parallel mechanism, presented on Fig. 1, is intended to the realizing of spatial 3D movements of mobile platform [1]. The points C_1, C_2, C_3 mobile platform P13 is directly connected to direct drives $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ by shanks l_7, l_8, \dots, l_{12} (7, 8, 9, 10, 11, 12) with spherical kinematic joints. The 6-DOF spatial parallel mechanism carry

out three coordinate axial displacements (x, y, z) and three angular rotations (ψ – yaw, θ – pitch, φ – roll) of the mobile platform.

The number of DOF was calculated by Somov-Malyshev's formula [2]:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k - \nu = 6,$$

where $n = 13$; $p_5 = 6$; $p_4 = 0$; $p_3 = 12$; $p_1 = p_2 = 0$; $\nu = 6$.

Thus, the mechanism has 6 degrees of freedom.

DIRECT AND INVERSE KINEMATIC PROBLEM

The direct and inverse problems solution implies the implementation of algorithms in simulation software. These algorithms solve both direct and inverse problems for mechanism investigated.

Solution direct and inverse problem kinematics for executive mechanism present important stages of system motion design as a whole Fig.2.

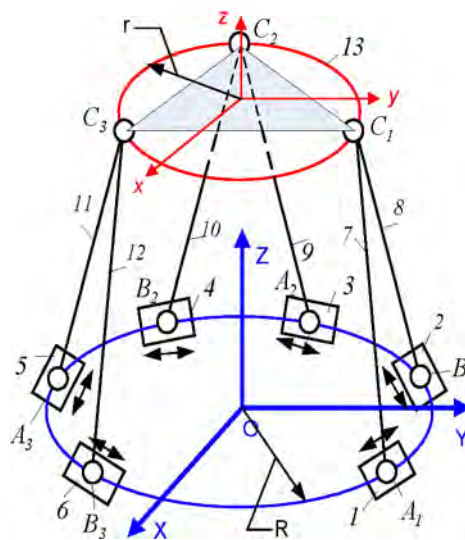


Fig. 2. Geometric representation of the mechanism

DIRECT KINEMATIC PROBLEM

Direct kinematics problem [2] is to determine the mechanism for a given structure and geometry of the moving parts, the laws of movement of executive-level relative to the fixed coordinate system according to the known laws of movement of the input or important links.

Input parameters (as shown on Fig. 2) are the x and y coordinates of point's pairs A_1, B_1, A_2, B_2 and A_3, B_3 , which correspond to drives; coordinate z of these points are supposed to equal to zero. We accepted coordinates of points C_1, C_2, C_3 as output parameters Fig. 3.

For the point C_i we'll have:

$$x_{C_i} = x_{N_i} - (N_i C_i) \cos \varphi_i \cos \alpha_i;$$

$$y_{C_i} = y_{N_i} - (N_i C_i) \cos \varphi_i \sin \alpha_i;$$

$$z_{C_i} = (N_i C_i) \sin \varphi_i,$$

where $i = 1, 2, 3$; N_i – point between A_i and B_i ; $\varphi_i - \alpha_i$ – angles; (as shown on Fig. 3) and the distance $N_i C_i$ is calculated by formula

$$N_i C_i = \sqrt{l^2 - (x_{B_i} - x_{A_i})^2 - (y_{B_i} - y_{A_i})^2}.$$

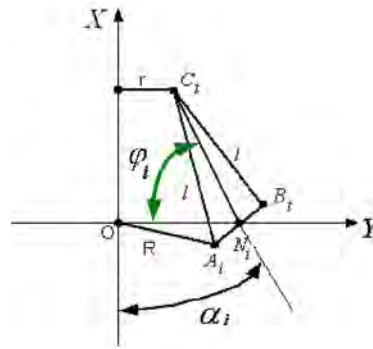


Fig. 3

As we accepted, the distances C_1C_2 , C_2C_3 and C_3C_1 are equal, then we can write

$$C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_1 = a = \text{const}.$$

Finally, we'll write equation system, which contain geometric condition for coordinates of points C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} (x_{C_2} - x_{C_1})^2 + (y_{C_2} - y_{C_1})^2 + (z_{C_2} - z_{C_1})^2 = a^2 \\ (x_{C_3} - x_{C_2})^2 + (y_{C_3} - y_{C_2})^2 + (z_{C_3} - z_{C_2})^2 = a^2 \\ (x_{C_3} - x_{C_1})^2 + (y_{C_3} - y_{C_1})^2 + (z_{C_3} - z_{C_1})^2 = a^2 \end{cases}$$

Solving these expressions together, we can get needed coordinates of platform points C_1, C_2, C_3 . Unfortunately, it's necessary to use numerical methods for the solving of equation system due to non-linearity of their equations.

For simulation of mechanism we developed the module in MATLAB environment, which solves the direct problem.

INVERSE PROBLEM

Inverse kinematics problem [2] of the mechanism (Fig. 1) can be formulated as follows. It is necessary for the position and orientation of the movable element of mechanism, which is defined in movable coordinate system $oxyz$, specified by a discrete or parametrical function in relation to a stationary coordinate system $OXYZ$, to find the position of segments 1, 2, ..., 6 (see Fig. 1), defined in the coordinate system $OXYZ$ coordinates of points A_i and B_i , respectively, ($i = 1, 2, 3$).

In the simulation software position and orientation of the movable coordinate system $oxyz$ in relation to the fixed coordinate system $OXYZ$ are characterized by, respectively, the Cartesian coordinates of platform center $O(x_0, y_0, z_0)$ and Euler angles φ, θ, ψ . The position and orientation matrix is given by

$$\begin{aligned} M_{\varphi, \theta, \psi} &= M_{\varphi} \cdot M_{\theta} \cdot M_{\psi} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In the uniform coordinates matrix $M_{\varphi, \theta, \psi}$ shall transformed to the fourth-order matrix:

$$M = M_0 \cdot M'_{\varphi, \theta, \psi} = M'_{\varphi, \theta, \psi} \cdot M_0 = \begin{bmatrix} & & & x_0 \\ & [M_{\varphi, \theta, \psi}]_{3 \times 3} & & y_0 \\ & & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

which are used for calculating of a platform point coordinates. Given matrix fully describes orientation and position of movable platform of parallel mechanism.

Converting point coordinates C_1, C_2, C_3 in stationary coordinate system $OXYZ$ can be realized by formula

$$R^{(C_i)} = \begin{bmatrix} x^{(C_i)} \\ y^{(C_i)} \\ z^{(C_i)} \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ z_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

To find the points A_i and B_i appropriate to the location of the point C_i :

$$\begin{cases} (x - x^{(C_1)})^2 + (y - y^{(C_1)})^2 = l^2 - (z^{(C_1)})^2, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$R^2 + (x^{(C_1)})^2 + (y^{(C_1)})^2 + (z^{(C_1)})^2 - l^2 - 2 \cdot x \cdot x^{(C_1)} = \pm 2y^{(C_1)} \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$

When we denote

$$R^2 + (x^{(C_1)})^2 + (y^{(C_1)})^2 + (z^{(C_1)})^2 - l^2 = A,$$

the previous expression takes a form

$$A - 2 \cdot x \cdot x^{(C_1)} = \pm 2y^{(C_1)} \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Now we raise both parts of this expression into a second power:

$$ax^2 - 2bx + c = 0,$$

where $a = 4((x^{(C_1)})^2 + (y^{(C_1)})^2)$, $b = 2Ax^{(C_1)}$, $c = A^2 - 4(y^{(C_1)})^2 R^2$.

From last quadratic equation we can find coordinates of points $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.

Thus results solution the inverse kinematic problem, that implies the determination of the input variables (motors shafts rotation angles) out of the output variables (platform position x, y, z and orientation ψ, θ, φ) [2]. We developed the module in MATLAB environment, which solves the inverse problem.

HARDWARE-IN-THE-LOOP CONTROL MODEL SIMULATION IN MATLAB/SIMULINK

The 6-DOF spatial parallel mechanism control system computer simulation is implemented as the hardware-in-the-loop control model simulation in MATLAB/Simulink modeling environment. MATLAB/Simulink in conjunction with Real-Time Workshop can automatically generate, package, and compile source code from Simulink models to create real-time software applications that can immediately be executed on a variety of systems and hardware platforms thus enabling the 6-DOF spatial parallel mechanism control system hardware-in-the-loop simulation as well. [3] The 6-DOF spatial parallel mechanism control system hardware-in-the-loop simulation structure is presented on Fig. 4. As the result of hardware-in-the loop simulation (Fig. 4), the 6-DOF spatial parallel mechanism

control system hardware-in-the-loop simulation model has been developed in MATLAB/Simulink for simulation on TI TMS320C2000 DSP debug hardware platform (target board).

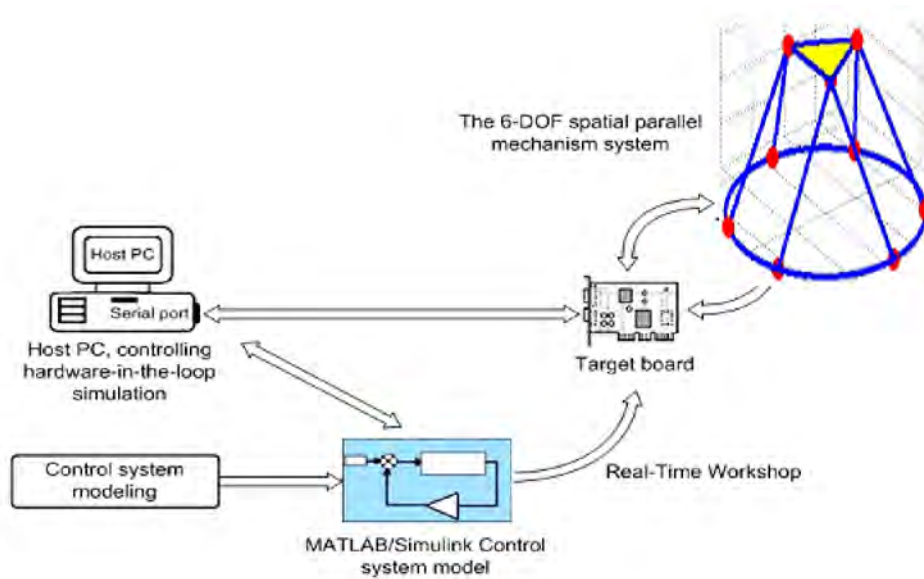


Fig. 4. Structure of mechanism model

The developed hardware-in-the-loop simulation model enables the execution of the MATLAB/Simulink control system model directly on physical hardware debug platform, giving that way the possibility of rapid control prototyping for the 6-DOF parallel mechanism control system.

Hardware-in-the-loop simulation approach permits testing hardware components and debugging of controller software by means of connecting hardware to the program models which were developed and simulated within modeling environment.

REFERENCES

1. Litvinau Y., Jarski V. and Arebi M. The Simulation of Parallel Mechanisms in MATLAB/Simulink Development Environment // Proceeding of 53rd International Wissenschaftliches Kolloquium Technische Universität Ilmenau, 08–12 September 2008. – P. 73.
2. Karpovich S., Jarski V. and Dainiak I. “Motion systems on the base of direct drive” // Minsk BSUIR – 2008 – 238 P. [in Russian]
Litvinau Y., Jarski V., Dainiak I. and Arebi M. “Hardware-software modeling of a control system of multicoordinate system of moving” // BSUIR Reports.– 2007.–№ 6.–P. 50–55

СЕМЕЙСТВО НОВЫХ ПРИКЛАДНЫХ КРИТЕРИЕВ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ-НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Гурвич Ю.А.

In this article a set of new applied criteria of oscillatory and a periodic movements that can be used in different fields of science and technology is described.

В курсе «Теоретическая механика» в разделе «Динамика» из дифференциального уравнения движения груза, прикрепленного к пружине, под действием двух сил: силы упругости и силы сопротивления среды, пропорциональной первой степени скорости, выводится критерий темпа затухания колебательного процесса – логарифмический декремент колебаний

$$D = \left(\ln \frac{A_t}{A_{t+1}} = nT \right),$$

где A_t – амплитуда; n – коэффициент демпфирования; T – период колебания.

Этот критерий до сих пор широко используется во многих областях науки и техники, например: при проектировании всех транспортных средств (самолетов, вертолетов, автомобилей и т.д.); на стадии проектирования звукоизолирующих перегородок в промышленных и гражданских зданиях.

Известно, что одним из средств борьбы с колебаниями упругих конструкций служат специальные покрытия, способные к интенсивному поглощению энергии колебаний. Эффективность применения на практике того или иного покрытия определяется критерием темпа затухания колебательного процесса D .

Однако Ю.К. Фавстовым [1] экспериментально было обнаружено парадоксальное явление, заключающееся в том, что покрытия, материал которых характеризуется большим значением критерия D , зачастую хуже демпфируют колебания, чем покрытия с меньшим значением этого критерия.

Рассмотрим виброграммы, приведенные на рис. 1. По ним можно сделать вывод: процесс, соответствующий кривой 1 затухает медленнее процесса, соответствующего кривой 2. Хотя логарифмический декремент в первом случае больше, чем

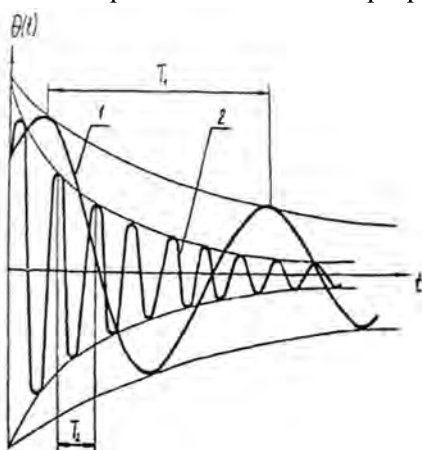


Рис.1. Какие колебания 1 или 2 затухают быстрее?

во втором. Объясняется это тем, как сообщалось в печати [2], что «... логарифмический декремент колебаний характеризует затухание не за объективную единицу времени (например, за одну секунду), а за один период колебаний».

Помимо такого серьезного недостатка, как «парадокс» у логарифмического декремента колебаний имеются еще недостатки, которые описаны в [3,4].

Поэтому для исследований различного рода колебательных процессов предлагается два семейства новых прикладных критериев колебательной устойчивости-неустойчивости движения, которые свободны от всех указанных недостатков.

При этом любой критерий из каждого семейства критериев должен удовлетворять следующим требованиям:

- не должен противоречить теории линейных колебаний;

- должен отличать «медленные» и «быстрые» движения;
- может оценить колебания с увеличивающейся амплитудой.

«Расшифруем» перечисленные требования.

Так, под «не противоречить теории линейных колебаний» понимается, что:

во-первых, критерий не должен противоречить логарифмическому декременту колебаний, с помощью которого определяется темп затухания любых колебаний – линейных (для них логарифмический декремент – постоянное число) и нелинейных (логарифмический декремент постепенно меняется);

во-вторых, его можно аппроксимировать экспонентой, поскольку в основу логарифмического декремента колебаний положена экспоненциальная функция;

в-третьих, с его помощью можно оценить колебания с увеличивающейся амплитудой (нарастающие или расходящиеся колебания – признак неустойчивости движения).

Второе требование связано с терминами «медленные» и «быстрые» движения. Чтобы понять, что под ними кроется, рассмотрим пример.

Допустим, что колебательная система, например управляемая ось автомобиля, имеет логарифмический декремент колебаний D , равный 10. Очевидно, что $D = 10$ можно получить бесчисленным числом способов сочетания n и T . Поэтому «медленными» будем считать те колебания, у которых $T \geq n$, а «быстрыми» — у которых, наоборот, $n \geq T$.

Физически это означает следующее. При ширине дорожного полотна 3 м автомобиль, движущийся, например, со скоростью 15 м/с (54 км/ч), при наезде передними колесами на неровность, вызвавшую «быстрые» движения этих колес (см. кривую 2 на рис. 1), с полосы не сойдет. Если же движения «медленные» (см. кривую 1 на рис. 1), автомобиль на полотне не удержится.

Исходя из сказанного, в качестве первого семейства критериев (без вывода) предлагается величина, обратная коэффициенту n демпфирования (затухания) системы

Критерии первого семейства

$$F_1 = \frac{\frac{T}{2}}{\ln \frac{A_i}{A_{i+1}}}, \dots, F_{\lambda} = \frac{\frac{\lambda T}{2}}{\ln \frac{A_i}{A_{i+\lambda}}}, \quad (1)$$

где i, λ – целые числа 1, 2, 3,

Критерий F_1 своим числителем оценивает время, а знаменателем – тенденции к нарастанию или затуханию колебаний: если знаменатель больше нуля, то имеет место колебательная устойчивость (затухание колебаний), если меньше – колебательная неустойчивость (нарастание колебаний).

Первое семейство критериев (1) необходимо применять, когда логарифмический декремент колебаний остается постоянным для всего процесса затухающих или нарастающих колебаний.

В качестве второго семейства критериев (без вывода) предлагается также величина, обратная коэффициенту n демпфирования (затухания) системы.

Приведем формулы для критериев второго семейства F_2, F_3, F_4, \dots . Здесь цифрами 2, 3, 4 и т.д. обозначается суммарное количество амплитуд отдельно для числителя и отдельно для знаменателя дроби, находящейся под знаком натурального логарифма.

Критерии второго семейства

Критерий F₂ (j > i).

$$F_2 = \frac{\frac{\lambda}{2}T}{\ln\left(\frac{A_i + A_j}{A_{i+\lambda} + A_{j+\lambda}}\right)}. \quad (2)$$

Если $\lambda = 1, i = 1, j = 3$, то

$$F_2 = \frac{\frac{T}{2}}{\ln\left(\frac{A_1 + A_3}{A_2 + A_4}\right)}.$$

Если $\lambda = 3, i = 1, j = 3$, то

$$F_2 = \frac{\frac{3}{2}T}{\ln\left(\frac{A_1 + A_2}{A_4 + A_5}\right)}.$$

Критерий F₃ (k > j > i).

$$F_3 = \frac{\frac{\lambda}{2}T}{\ln\left(\frac{A_i + A_j + A_k}{A_{i+\lambda} + A_{j+\lambda} + A_{k+\lambda}}\right)}. \quad (3)$$

Если $\lambda = 2, i = 1, j = 3, k = 4$, то

$$F_3 = \frac{T}{\ln\left(\frac{A_1 + A_3 + A_4}{A_3 + A_5 + A_6}\right)}.$$

Критерий F₄ (l > k > j > i).

$$F_4 = \frac{\frac{\lambda}{2}T}{\ln\left(\frac{A_i + A_j + A_k + A_l}{A_{i+\lambda} + A_{j+\lambda} + A_{k+\lambda} + A_{l+\lambda}}\right)}. \quad (4)$$

Если $\lambda = 4, i = 2, j = 3, k = 4, l = 5$, то

$$F_4 = \frac{2T}{\ln\left(\frac{A_2 + A_3 + A_4 + A_5}{A_6 + A_7 + A_8 + A_9}\right)}.$$

Второе семейство критериев (2) – (4) может применяться в тех случаях, когда логарифмический декремент колебаний не является постоянной величиной для всего процесса затухающих или нарастающих колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фастов Ю.К. «Известия АН СССР», ОТН, Механика и машиностроение, №3, 1963.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1967, - 420 с.
3. Гурвич Ю.А. Новые прикладные критерии колебательной и апериодической устойчивости движения колес транспортных средств. Актуальные проблемы в динамике и прочности в теоретической и прикладной механике: Сб. науч. тр. – Мн.: 2001. - с.148-162.
4. Гурвич Ю.А., Сыровкаш Ю.Д. Прикладные критерии устойчивости движения управляемых колес транспортных средств. Автомобильная промышленность. М.: 2005, - с.23-27.

ИНТЕНСИВНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Радаев С.Ю., Тихонов С.В., Чекмарев Г.Е.

Краеугольным камнем в современных образовательных технологиях и всевозможных методиках обучения специалиста с высшим профессиональным образованием является, на сегодняшний день, привитие ему навыков самостоятельной работы, творческого подхода к возникающим проблемам. Сюда же относятся умение мыслить нестандартно, быстро перестраиваться на новые формы и методы производства, если они оказываются лучше и эффективнее старых. Теоретическая механика, являясь фундаментальной дисциплиной физико-математического цикла, развивает и создает не только общеинженерный фундамент, но и в целом общенаучную базу будущего специалиста. Важное место в курсе отводится упражнениям и контролю усвоения практических навыков, т. к. решение примеров и задач – один из наиболее эффективных способов оценки уровня знаний.

К сожалению, существующая на сегодня традиционная схема обучения сильно отстает от достижений технического прогресса.

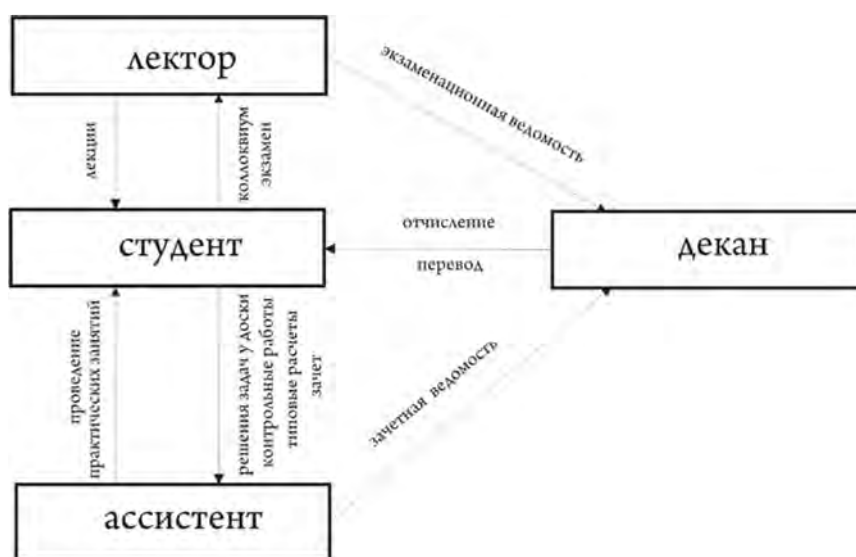


Рис. 1

Согласно ей лектор разрабатывает и читает основной курс, часть вопросов выносит на самостоятельное обучение и принимает отчет о самостоятельной работе на коллоквиуме. Ассистент проводит практические занятия, на которых разбираются стандартные и не очень задачи, проводятся письменные контрольные работы, выдает и принимает выполненные типовые расчеты. Таким образом, лекция представляет собой монолог профессора или доцента, а на практическом занятии активно работают у доски 3-7 студентов, оставленные являются пассивными участниками учебного процесса. Декан не может влиять на качество обучения, т. к. он не владеет информацией о текущей успеваемости студента. В лучшем случае у него есть сведения о пропусках. Свое решение о продолжении студентом обучения он выносит по итогам экзаменационной сессии. Описанная выше ситуация иллюстрируется рисунком 1.

Нами разработана автоматизированная обучающая система [1] (АОС), которая отличается от традиционной формы обучения наличием модульных лабораторных работ и после некоторой доработки может с успехом быть применена для работы над курсом теоретической механики. В этом случае взаимодействие основных субъектов учебного процесса описывается схемой, представленной на рис.2.

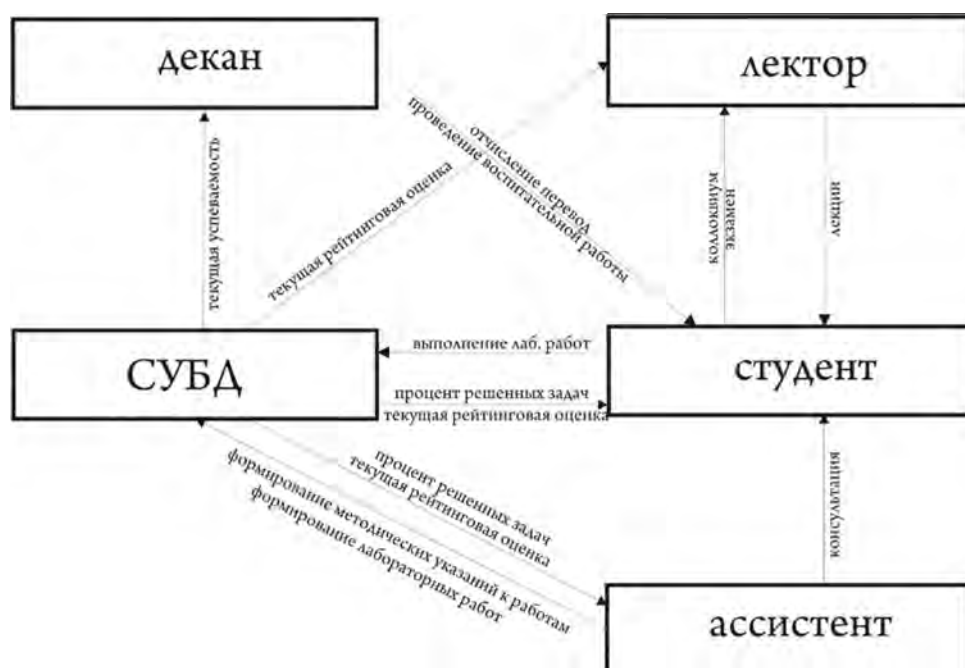


Рис. 2

Каждая дидактическая единица ГОС ВПО (раздел программы) разбивается на несколько модулей (рис. 3), а каждый модуль в свою очередь состоит из нескольких лабораторных работ (рис. 4), каждая из которых включает краткие теоретические сведения по теме и подборку задач (в количестве не менее 50-80). В АОС тренировочная состоит из 10 заданий текущей темы и дополнительно включает в себя по одному заданию из предыдущих лабораторных работ предыдущего модуля.



Рис. 3

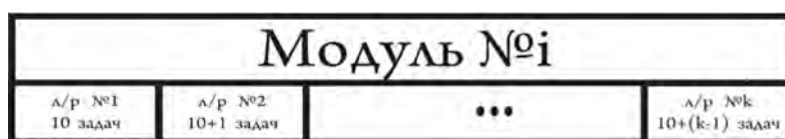


Рис. 4

Студент приходит на занятие и, пользуясь своим учебным шифром, создает себе индивидуальную тренировочную базу задач. Оценка выполнения задания из лабораторной работы производится по формуле:

$$C = b_0 k_1 k_2 k_3 + 0,1 d_0,$$

где k_1 – коэффициент качества выполнения лабораторной работы, k_2 – коэффициент уровня сложности задания, k_3 – коэффициент своевременности выполнения лабораторной работы, d_0 – коэффициент уровня остаточных знаний, если задание из предыдущих работ, b_0 – начальная стоимость занятия, она определяется ассистентом в зависимости от сложности и важности изучаемого материала.

В АОС приняты следующие значения вышеназванных коэффициентов:

$$k_1 = \begin{cases} 1 & \text{решены все задачи,} \\ 0,8 & \text{решено не менее 80\% задач,} \\ 0,6 & \text{решено от 70\% до 80\% задач,} \\ 0,5 & \text{решено менее 70\% задач,} \end{cases} \quad k_2 = \begin{cases} 1,2 & \text{задачи 3 уровня сложности,} \\ 1 & \text{задачи 2 уровня сложности,} \\ 0,8 & \text{задачи 1 уровня сложности,} \end{cases}$$

$$k_3 = \begin{cases} 1,2 & \text{досрочно,} \\ 1 & \text{в срок,} \\ 0,9 & \text{1 неделя опоздания,} \\ 0,8 & \text{2 недели опоздания,} \\ 0,7 & \text{3 недели опоздания,} \\ 0,6 & \text{4 недели опоздания,} \end{cases} \quad d_0 = n - 1,$$

где n – номер лабораторной работы.

Классификация задач по уровню сложности может быть следующей:

- 1 – й уровень – узнавание,
- 2 – й уровень – решение типовой задачи (известное сочетание типовых действий)
- 3 – й уровень – решение нетиповой задачи (новое сочетание типовых действий).

В соответствии с предложенной классификацией для создания банка заданий первого уровня сложности можно использовать [2], задания второго и третьего уровня сложности можно взять из [3]. Классический сборник задач [4] содержит все типы задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. К вопросу об организации АОС по курсу теории вероятностей на основе интенсивных лабораторных работ./ Радаев С.Ю., Тихонов С.В., Чекмарев Г.Е.//Электронная Казань 2009. Материалы международной научно-практической конференции. Казань: Универсум 2009.
2. Сборник коротких задач по теоретической механике./ О.Э. Кепе, Я.А. Вибо, и др.; под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высшая школа 1989. – 388 с.
3. Сборник задач по теоретической механике./Ф.Г. Будник, Ю.М. Зингерман, Е.И. Селенский.; под ред.А.С. Кельзона. – М.: Высшая школа 1987. –176 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике/ под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – Спб.: Олимп – 2005. – 448 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ MATHCAD В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПО КУРСУ ТММ

Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гапанюк Д.В.

Bases of computer laboratory work on modeling of dynamics of the machine unit in various modes are stated. Advantages of use of analytical computer transformations for solution of the differential equation of the machine unit movement supposed by last versions of MATHCAD are shown.

Ранее была показана эффективность применения MATHCAD при организации курсового проектирования [1]. Изложенные подходы [2] можно усовершенствовать, отказавшись от использования одно- и многомерных массивов при разработке соответствующего программного обеспечения для учебного процесса. На примере возможной компьютерной лабораторной работы покажем, как применение функциональных представлений в MATHCAD позволяет, с одной стороны, лучше и легче усвоить методы ТММ, а с другой служит хорошей практикой по применению современных компьютерных технологий при реализации этих методов.

Дополнительные возможности, заложенные в последних версиях MATHCAD, допускают использование многоуровневых функциональных вложений и, в результате, позволяют решать задачи динамического синтеза в функциональном виде, приблизив программирование к «формульным записям» учебника по ТММ, что значительно облегчает понимание материала.

Кроме этого, операторы MATHCAD, решающие дифференциальное уравнение движения машины, требуют представления всех величин в функциональном виде. Поэтому с самого начала целесообразно динамические характеристики механизмов, определенные для конечного числа положений, представить в функциональной форме.

Найденный в форме одномерного массива приведенный момент инерции механизма I_{pr} с помощью процедур интерполяции преобразуется в функцию обобщенной координаты. Для этого используются значения величины приведенного момента инерции (y) для двенадцати положений кривошипа, характеризуемых значениями его угла поворота (x)

$$x := \left(\frac{0\pi}{180} \quad \frac{30\pi}{180} \quad \dots \quad \frac{360\pi}{180} \right)^T, \quad (1)$$

$$y := (0,25 \ 0,32 \ 0,27 \ 0,18 \ 0,40 \ 0,53 \ 0,34 \ 0,20 \ 0,27 \ 0,32 \ 0,15 \ 0,04 \ 0,25)^T. \quad (2)$$

С помощью процедур

$$vs := pspline(x, y), \quad (3)$$

$$I_{pr}(\alpha) := int erp(vs, x, y, \alpha) \quad (4)$$

получим I_{pr} как функцию угла поворота кривошипа α (см. рис. 1).

Для дальнейшего понадобится производная $\frac{dI_{pr}}{d\alpha}$, которую получим, записав

$$DI_{pr}(\alpha) := \frac{d}{d\alpha} I_{pr}(\alpha). \quad (5)$$

Аналогично, используя значения величин приведенного момента сил сопротивления uu для двенадцати положений xx , приходим к зависимости $M_{pc}(\alpha)$

$$xx := \left(\frac{0\pi}{180} \quad \frac{30\pi}{180} \quad \dots \quad \frac{360\pi}{180} \right)^T, \quad (6)$$

$$yy := (50 \ 670 \ 1050 \ 1720 \ 2000 \ 902 \ -600 \ -1200 \ -901 \ -505 \ -202 \ -6050)^T, \quad (7)$$

$$vs := pspline(xx, yy), \quad (8)$$

$$M_{pc}(\alpha) := \text{int } erp(vs, xx, yy, \alpha). \quad (9)$$

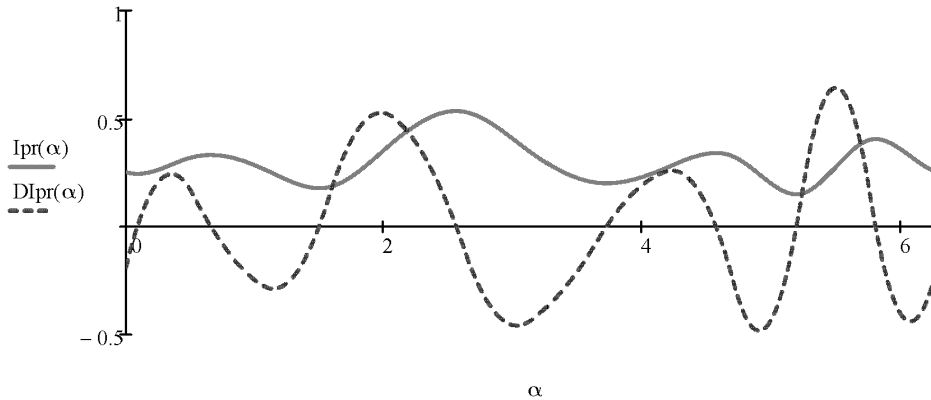


Рис. 1. Зависимость приведенного момента инерции (4) и его производной (5) от угла поворота кривошипа α

Интегрируя $M_{pc}(\alpha)$, находим работу сил полезных сопротивлений $A_{pc}(\alpha)$ и изменение кинетической энергии $\Delta K(\alpha)$ в зависимости от величины обобщенной координаты α

$$A_{pc}(\alpha) := \int_0^\alpha M_{pc}(\alpha) d\alpha, \quad (10)$$

$$Md := A_{pc}(2\pi) / 2\pi, \quad (11)$$

$$\Delta K(\alpha) := Md \cdot \alpha - A_{pc}(\alpha), \quad (12)$$

здесь Md – момент двигателя (рассматривается случай, когда $Md = const$).

Анализируя график, отражающий изменение ΔK (см. рис. 2), определяя экстремальные значения этой функции, находим наибольшее изменение функции ΔK , необходимое для расчета момента инерции маховика $I_{\max 0}$.

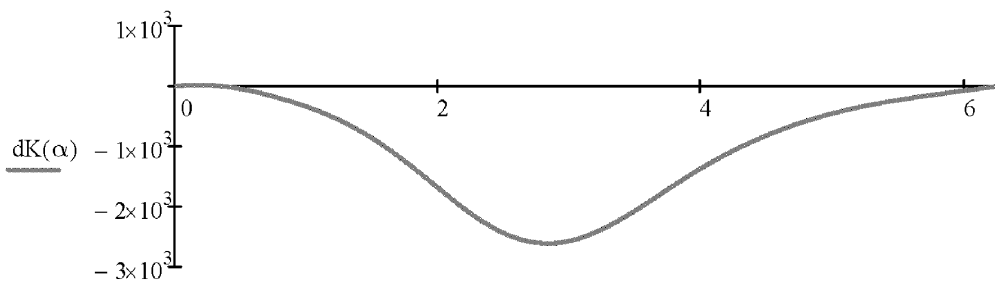


Рис. 2. Изменение кинетической энергии

Из графика $\Delta K(\alpha)$, следует

$$d1 := \text{Minimize}(\Delta K, 2\pi) = \Delta K_{\min} := \Delta K(d1), \quad (13)$$

$$d2 := \text{Maximize}(\Delta K, 2\pi) = \Delta K_{\max} := \Delta K(d2), \quad (14)$$

$$\Delta K_{naib} := \Delta K_{max} - \Delta K_{min}. \quad (15)$$

По среднему значению угловой скорости ($\omega_{cp} = \omega(0)$) и коэффициенту неравномерности работы находим момент инерции маховика

$$I_{max0} := \frac{\Delta K_{naib}}{\delta \omega_{(0)}^2}. \quad (16)$$

Тогда

$$I_{pr}(\alpha) := I_{pr}(\alpha) + I_{max0} \quad (17)$$

Вычисляем начальное значение кинетической энергии, а также кинетическую энергию $K = K(\alpha)$ в зависимости от угла поворота α

$$K(0) = 0,5 I_{pr}(0) \omega^2(0), \quad (18)$$

$$K(\alpha) := K(0) + \Delta K(\alpha). \quad (19)$$

Теперь рассчитываем угловую скорость $\omega = \omega(\alpha)$ и представляем ее графически (см. рис. 3)

$$\omega(\alpha) := \sqrt{\frac{2 \cdot K(\alpha)}{I_{pr}(\alpha)}}. \quad (20)$$

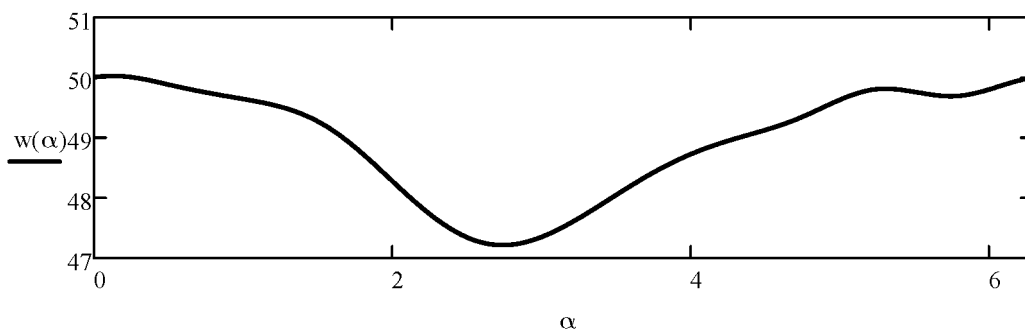


Рис. 3. Изменение угловой скорости звена привода

Двумя способами ведем расчет углового ускорения

$$\epsilon 1(\alpha) := \omega(\alpha) \frac{d\omega(\alpha)}{d(\alpha)}, \quad (21)$$

$$\epsilon 2(\alpha) := \frac{md - M_{pc}(\alpha) - 0,5 \omega^2(\alpha) D I_{pr}(\alpha)}{I_{pr}(\alpha)} \quad (22)$$

и строим графики функций $\epsilon 1$ и $\epsilon 2$ (рис. 4).

Далее рассмотрим решение дифференциального уравнения движения машины с учетом механической характеристики двигателя.

Зависимость момента двигателя, приведенного к приводному звену механизма, определяется по формуле [3]

$$M_{\partial} = 2\lambda_k U M_{\dot{a}.i} \frac{(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\dot{a}\dot{e}})(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\partial})}{(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\partial})^2 + (n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\dot{a}\dot{e}})^2}, \quad (23)$$

где U – передаточное отношение привода, $M_{\dot{a}.i}$ – значение номинального момента двигателя, $n_{\dot{a}\dot{n}}$, $n_{\dot{a}\dot{e}}$ и $n_{\dot{a}}$ – синхронная, критическая и текущая частоты вращения ротора, соответственно.

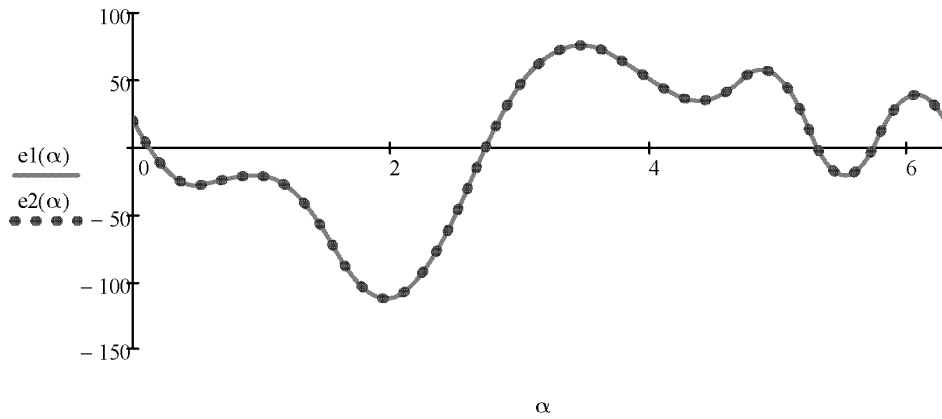


Рис. 4. Изменение углового ускорения звена привода

Для расчета параметров в приведенной формуле сначала вычислим среднюю эффективную мощность, потребляемую механизмом

$$N_{cp} = Md \cdot \omega(0). \quad (24)$$

Тогда мощность двигателя с учетом к.п.д. привода ($\eta = 0,9$) составляет

$$N_{\dot{a}} = N_{cp} \cdot \eta \text{ Вт.}$$

По таблице из [3] выбираем двигатель, с требуемыми характеристиками ($\eta_{\dot{a}}; \lambda_k; N_{\dot{a}}; n_{\dot{a}}$). Вычисляем $M_{\dot{a}} = \frac{N_{\dot{a}}}{\omega_{\dot{a}}}$. Вычисляем передаточное отношение при-

вода $U = \frac{n_{\dot{a}}}{n_{cp}}$. Находим $n_{a,k} = n_{a,n} - \lambda_e (n_{cн} - n_{\dot{a}})$. Тогда формула для расчета $\dot{I}_{\dot{a}}$ дает зависимость между моментом на валу двигателя и его угловой скоростью.

В свою очередь, обозначив зависимость угловой скорости ведущего звена от угла его поворота как $\omega l(\alpha)$, запишем

$$n_{\dot{a}} = \frac{\omega l(\alpha) \cdot U \cdot 30}{\pi}. \quad (25)$$

В итоге можем записать зависимость $M_{\dot{a}} = M_{\dot{a}}(\omega l(\alpha))$.

Для решения дифференциального уравнения и исследования переходных режимов функции $I_{pr}(\alpha)$, $DI_{pr}(\alpha)$ и $M_{pc}(\alpha)$ необходимо преобразовать в периодические с периодом 2π . Для этого используем процедуру

$$\tau(\alpha) := \alpha - 2\pi \cdot \text{trunc}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (26)$$

Решим дифференциальное уравнение, записав вычислительный блок Given

$$\omega l(\alpha) = \frac{M_d(\omega l(\alpha)) - M_{pc}(\tau(\alpha)) - 0,5 DI_{pr}(\tau(\alpha)) \cdot \omega l^2(\alpha)}{I_{pr}(\tau(\alpha)) \cdot \omega l(\alpha)}$$

$$\omega l(0) = 50$$

$$\omega l := \text{Odesolve}(\alpha, 20\pi).$$

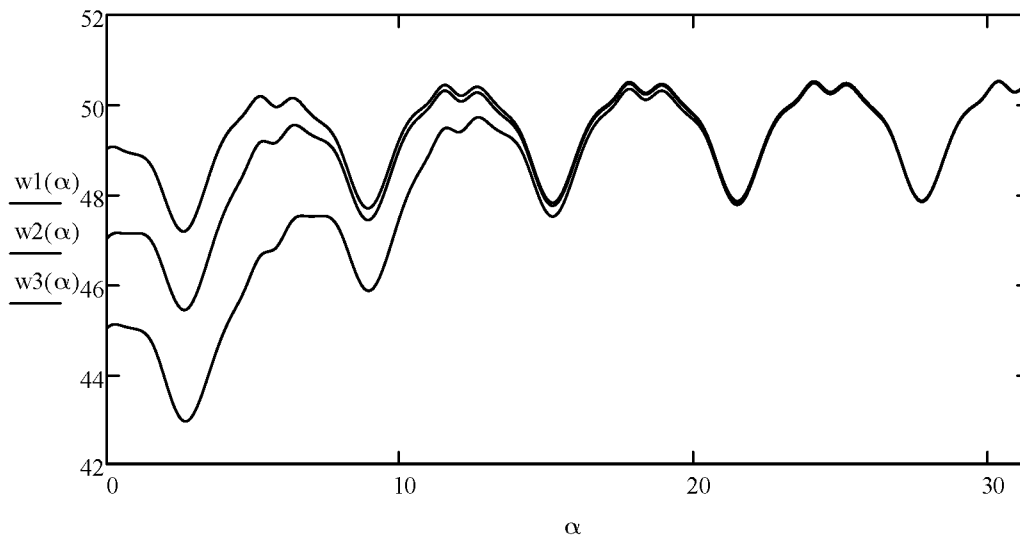


Рис. 5. Зависимости угловой скорости звена привода при различных начальных условиях

В итоге получим искомую зависимость $\omega_l = \omega_l(\alpha)$ на интервале в 10 периодов. Рассмотрим эту зависимость при различных значениях $\omega_l(0)$ (см. рис. 5). Затем данное уравнение используется для анализа различных режимов работы механизма при разнообразных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г.С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г.С. Бокун, В.С. Вихренко, С.А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2005. – Вып. 18. – С. 215–220.
2. Гляков, С.А. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ механических систем / С.А. Гляков [и др.]; под ред. М.А.Журавкова. – Мн.: БГУ, 2006. – 375 с.
3. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М.: Высшая школа, 2004. – 460 с.

РАЗРАБОТКА ФУНКЦИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Босяков С.М., Царева А.А., Скляр О.Н.

In this paper presents the basic user functions development results, which are implemented in task solution in theoretical and applied mechanics with the use of functional programming possibilities offered by the computer system Mathematica. Examples of implementation of the above mentioned functions in task solution on kinematics of a point in curve-wave orthogonal coordinates.

При решении многих задач теоретической и прикладной механики, допускающих применение функций для проведения определенных или типовых расчетов и вычислений, целесообразно применение систем компьютерной математики, реализующих функциональное программирование. В настоящей работе представлены результаты разработки собственных функций пользователя пакета *Mathematica* [1], предназначенных для решения задач кинематики и динамики точки в криволинейных ортогональных координатах.

Для заданной системы криволинейных координат коэффициенты Ламе определяются следующим соотношением [2]:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, i = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Для автоматизации подсчета коэффициентов Ламе в системе *Mathematica* разработана функция `LameCoefficients[H, {q1, q2, q3}, {x, y, z}]`, которая выполняет генерацию списка подстановок вида $H[x_i] \rightarrow \text{expr}$ для коэффициентов Ламе в соответствии с соотношением (1). Здесь аргументом H является обозначение коэффициентов Ламе, список $\{q1, q2, q3\}$ содержит обозначения для криволинейных координат, список $\{x, y, z\}$ – выражения, связывающие декартовы и криволинейные координаты. Ниже приведено определение функции `LameCoefficients`.

```
LameCoefficients[H_, {q1_, q2_, q3_}, {x_, y_, z_}] :=  
Thread[{H[q1], H[q2], H[q3]} -> PowerExpand[Simplify[{  
Sqrt[D[x, q1]^2 + D[y, q1]^2 + D[z, q1]^2],  
Sqrt[D[x, q2]^2 + D[y, q2]^2 + D[z, q2]^2],  
Sqrt[D[x, q3]^2 + D[y, q3]^2 + D[z, q3]^2}]]]]
```

Отметим, что в теле функции для упрощения результирующих выражений для коэффициентов Ламе можно использовать функцию `Simplify` с условиями $\{q1 > 0, q2 > 0, q3 > 0\}$ для криволинейных координат. В качестве примера проведем расчет коэффициентов Ламе для цилиндрической системы координат:

```
CoefficientsLame[H, {rho, phi, z}, {rho Cos[phi], rho Sin[phi], z}]  
  
{H[rho] -> 1, H[phi] -> rho, H[z] -> 1}
```

Проекции скорости на оси криволинейных координат задаются следующим соотношением [3]:

$$v_q = H_i \frac{dq_i}{dt}, i = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

где H_i – коэффициенты Ламе.

Для расчета проекций векторов скорости на оси криволинейных координат в системе *Mathematica*, соответствующих формуле (2) разработана функция `Velocity[v, {q1, q2, q3}, {x, y, z}]`, где аргумент v обозначает скорость. Функция определена следующим образом:

```
Velocity[v_, {q1_, q2_, q3_}, {x_, y_, z_}] :=
Thread[{v[q1], v[q2], v[q3]} (Simplify[PowerExpand[
FullSimplify[Table[(LameCoefficients[h, {q1, q2, q3},
{x, y, z}][[i, 2]]/.{q1-q1[t], q2-q2[t], q3-q3[t]})
D[{q1, q2, q3}][[i]][t], t], {i, 1, 3}]]]]]
```

Для формулировки выражений, связывающих декартовые и криволинейные координаты, применим функцию `CoordinatesToCartesian[pt, coordsys]` стандартного пакета *Calculus* расширения системы *Mathematica*. Она позволяет выражать декартовы координаты через координаты тринадцати систем криволинейных ортогональных координат: цилиндрической, сферической, параболического цилиндра, параболоидальной, эллиптического цилиндра, вытянутого эллипсоида вращения, сжатого сфероида, биполярной, бисферической, тороидальной, конической, софокусных эллипсоидов, софокусных параболоидов. Рассчитаем проекции векторов скорости на оси криволинейных координат и модуль скорости для сферической системы координат.

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
```

```
Sphsys = CoordinatesToCartesian[{ρ, ψ, φ}, Spherical]
```

```
{ρ Cos[φ] Sin[ψ], ρ Sin[φ] Sin[ψ], ρ Cos[ψ]}
```

```
Velocity[v, {ρ, ψ, φ}, Sphsys]
```



Определим функцию, предназначенную для вычисления проекций векторов ускорения на оси криволинейных координат. Предварительно зададим функцию `KEnergy[T, {q1, q2, q3}, {x, y, z}]`, позволяющую осуществлять генерацию выражения для кинетической энергии. Аргументом T данной функции является обозначение энергии. Кинетическая энергия определяется из соотношения [3]:

$$T = \frac{1}{2} \left(H_1^2 \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + H_2^2 \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 + H_3^2 \left(\frac{dq_3}{dt} \right)^2 \right). \quad (3)$$

Согласно формуле (3) функцию `KEnergy` определим следующим образом:

```
KEnergy[w_, {q1_, q2_, q3_}, {x_, y_, z_}] := (w -> Simplify[
PowerExpand[Simplify[(1/2) Sum[D[{q1, q2, q3}][[i]][t], t]^2
(LameCoefficients[h, {q1, q2, q3}, {x, y, z}][[i, 2]]/.
{q1-q1[t], q2-q2[t], q3-q3[t]})^2, {i, 1, 3}]]]]]
```

Вычислим кинетическую энергию точки для сферической системы координат:

`KEnergy[w, {ρ, ψ, φ}, Sphsys]`

$$w = \frac{1}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + \rho^2 \sin^2 \psi \dot{\phi}^2 \right)$$

Проекция ускорения на оси криволинейных координат имеют вид [3]:

$$w_{qi} = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \quad (4)$$

Функция `Acceleration[a, {q1, q2, q3}, {x, y, z}]` для расчета проекций ускорения на оси криволинейных координат определяется аналогично рассмотренной выше функции `Velocity`:

```
Acceleration[a_, {q1_, q2_, q3_}, {x_, y_, z_}] := Thread[{a[q1], a[q2], a[q3]}] -> Simplify[PowerExpand[FullSimplify[Table[1/(LameCoefficients[h, {q1, q2, q3}, {x, y, z}][[i, 2]] /. {q1 -> q1[t], q2 -> q2[t], q3 -> q3[t]}] (D[D[KEnergy[w, {q1, q2, q3}, {x, y, z}][[2]], D[{q1, q2, q3}][[i]][t], t] - D[KEnergy[w, {q1, q2, q3}, {x, y, z}][[2]], {q1, q2, q3}][[i]][t]])], {i, 1, 3}]]]]]
```

Заметим, что при нахождении проекций ускорения с применением этой функции следует предварительно загрузить функции `KEnergy` и `LameCoefficients`. Рассчитаем проекции ускорения для определенной выше сферической системы координат:

`Acceleration[w, {ρ, ψ, φ}, Sphsys]`

$$\begin{aligned} w_{\rho} &= \ddot{\rho} \\ w_{\psi} &= 2\dot{\rho}\dot{\psi} \\ w_{\phi} &= 2\rho\dot{\psi}\dot{\phi} \end{aligned}$$

Разработанные функции могут использоваться для решения теоретических и прикладных задач механики деформируемого твердого тела, механики сплошной среды и теории упругости в численном и символьном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
2. Лурье, А. И. Теория упругости / А.И. Лурье; М. Наука, 1970. – 940 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах // Т. 3. Специальные главы механики / М.И.Бать; под редакцией Г.Ю. Джанелидзе – М.: Наука, 1973. – 488 с.

ВЫВУЧЭННЕ РАЎНАВАГІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ СА СЛІЗГАЛЬНЫМІ ЗАМАЦОЎКАМІ НА ПАДСТАВЕ ПРЫНЦЫПА МАГЧЫМЫХ ПЕРАМЯШЧЭННЯЎ

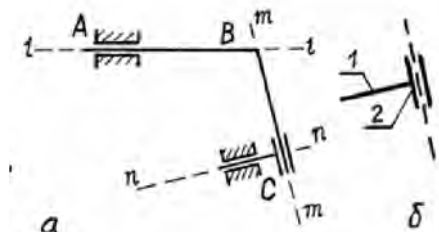
Русан С. І.

In article possibility of practical application of the general equation of a statics to the analysis of balance of flat mechanical systems with sliding fastenings and sliding connections of their parts is shown. On many examples the technique of application of a principle of possible movings to definition of reactions of external relations is considered. Work can be used in educational process on the theoretical mechanics.

Агульныя заўвагі.

У тэарэтычным плане прынцып магчымых перамяшчэнняў – найбольш распрацаваны раздзел аналітычнай механікі. Змест прынцыпа выкладзены амаль ва ўсіх падручніках па тэарэтычнай механіцы. Яго перавагі перад ураўненнямі геаметрычнай статыкі пры аналізе раўнавагі сістэм з ідэальнымі сувязямі адзначаны ў артыкуле [1]. Варта падкрэсліць, што прымяненне прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у той версіі, якая развіваецца ў рабоце [1], патрабуе ад студэнтаў выразнага разумення структуры складаных сістэм і уласцівасцей накладзеных на іх сувязей. Таму рашэнне задач з дапамогай названага прынцыпа механікі, як, мабыць, ніякая іншая вучэбная праца па тэарэтычнай механіцы, стымулюе фарміраванне так неабходных інжынеру творчых якасцей. Уцешна, што гэты працэс пачынаецца ўжо на малодшых курсах і можа быць развіты і замацаваны ў навучальнай установе пры вывучэнні наступных дысцыплін. Да таго ж, засваенне прынцыпа магчымых перамяшчэнняў стварае падмурак для вывучэння структуры рычажных механізмаў і робатаў-маніпулятараў у тэорыі механізмаў і машын.

Не гледзячы на ўсе перавагі прынцыпа магчымых перамяшчэнняў, па шыраце прымянення ён саступае ўраўненням геаметрычнай статыкі. Гэта тлумачыцца адсутнасцю досведа яго практычнага прымянення да рашэння некаторых тыпаў задач. Тут разглядаецца адзін з іх – раўнавага сістэм са слізгальнымі відамі сувязей. У тэорыі механізмаў і машын такія злучэнні звенняў называюць паступальнымі кінематычнымі парамі. Знешнія сувязі апісанага тыпу будзем далей называць *слізгальнымі замацоўкамі*, унутраныя – *слізгальнымі злучэннямі*. На рысунку 1, а паказан стрыжань *ABC* са слізгальнай замацоўкай *A* і падвойнай слізгальнай замацоўкай *C*. Першая з іх дапускае лінейнае перамяшчэнне стрыжня па напрамку *l-l*, другая – па напрамках *m-m* і *n-n*. Злучальнае звяно замацоўкі *C* уяўляе сабою жорсткае спалучэнне штока 1 і ўтулкі 2 (рыс. 1, б). Прыклады рашэння апісаных задач з дапамогай прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у вучэбнай літаратуры адсутнічаюць. Гэта стварае ўражанне яго абмежаванасці, што, як паказана ніжэй, не адпавядае рэчаіснасці.

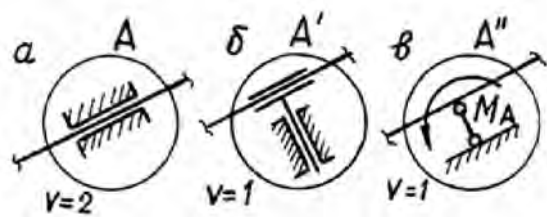


Рыс. 1

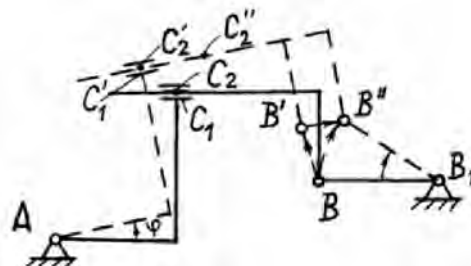
Методыка прымянення прынцыпа магчымых перамяшчэнняў да рашэння задач.

Спынімся спачатку на ўласцівасцях плоскіх механічных сувязей. Будзем разглядаць, толькі ідэальныя двухбаковыя сувязі. У агульным выпадку сувязь можа накладваць на матэрыяльны аб'ект адно, два альбо тры геаметрычныя абмежаванні. У адпаведнасці з гэтым будзем называць іх *адно-*, *двух-* альбо *трохвалентнымі*. Да трохвалентных плоскіх сувязей адносіцца жорсткая замацоўка. Аднавалентныя сувязі інакш называюць *простымі*. Сувязі са слізгальным злучэннем частак сістэмы могуць быць толькі простымі і двухвалентнымі. Да іх адносяцца згаданыя вышэй звычайная (са слізганнем у адным і супрацьдзеяннем у двух напрамках) і падвойная (са слізганнем у двух напрамках і супрацьдзеяннем у адным) слізгальныя замацоўкі. Падвойнае слізгальнае злучэнне ў якасці ўнутранай сувязі выкарыстана далей у механічнай сістэме, паказанай на рысунку 16. Валентнасць сувязі будзем абазначаць літарай *v*.

Для рацыянальнага прымянення прынцыпа магчымых перамяшчэнняў неабходна паніжаць валентнасць сувязей. У падручніках па тэарэтычнай механіцы адсутнічаюць аксіёмы, якія дазвалялі б выконваць такую трансфармацыю абгрунтавана. Паводле асноўнай *аксіёмы аб сувязях* можна вызваляцца толькі ад усіх накладзеных на матэрыяльны аб'ект сувязей адначасова. У артыкуле [1] адпаведная аксіёма сфармулявана ў больш агульным выглядзе пад назваю: *Аксіёма аб паніжэнні валентнасці сістэмы сувязей*. Прыводзім яе змест: *Валентнасць сувязі альбо сістэмы сувязей, накладзеных на матэрыяльны аб'ект, можна панізіць, уводзячы адпаведныя знятым сувязям рэакцыі*. Калі валентнасць сістэмы сувязей панізіць да нуля, то атрымаем свабодны матэрыяльны аб'ект, як і на падставе вядомай аксіёмы аб сувязях. Больш падрабязна аб уласцівасцях і трансфармацыі сувязей напісана ў работах [1,2]. На рысунку 2 паказана пераўтварэнне сувязі *A* – слізгальнай замацоўкі – пры розных варыянтах паніжэння яе валентнасці на адзінку. Для вызначэння рэакцыі R_A яна пераўтвараецца ў падвойную слізгальную замацоўку *A'* (рыс. 2, б), а для вызначэння рэактыўнай пары M_A – у бязважкі стрыжань *A''* (рыс. 2, в). Калі на матэрыяльны аб'ект накладзена падвойная слізгальная замацоўка, напрыклад, сувязь *C* на рыс. 1, а, то пры вызначэнні рэактыўнай пары M_C неабходна вызваляцца ад сувязі цалкам.



Рыс. 2



Рыс. 3

Спынімся на ўмовах сумеснасці слізгальных злучэнняў частак складанай сістэмы. Яны істотна адрозніваюцца ад умоў сумеснасці шарнірных злучэнняў і могуць стаць крыніцай памылак пры рашэнні задач. У адрозненне ад шарнірных злучэнняў, у якіх магчымы адносныя *вярчальныя* перамяшчэнні, слізгальныя злучэнні дапускаюць адносныя *паступальныя* перамяшчэнні частак сістэмы. Для высвятлення паходжання такіх перамяшчэнняў будзем прадстаўляць іх у павялічаным выглядзе. На рысунку 3 суцэльнымі лініямі паказан механізм з адной ступенню свабоды ў пачатковым становішчы. Утулку, змацаваную з левай часткай

сістэмы, абазначым праз C_1 . Пункт правага стрыжня, які знаходзіцца ў цэнтры ўтулкі, абазначым праз C_2 . Уявім спачатку, што сувязь BB_1 адсутнічае. Тады пры павароце левай часткі AC_1 на вугал φ правая, дзякуючы ўтулцы, павернецца на той самы вугал; пры гэтым утулка C_1 займе палажэнне C'_1 , а пункт C_2 апыніцца ў становішчы C'_2 . Нагадаем, такое перамяшчэнне пункта C_2 атрымаў бы пры адсутнасці стрыжня BB_1 . Пры яго наяўнасці пункт B перамяшчаецца не ў палажэнне B' , а ў палажэнне B'' . Вектар $\overline{B'B''}$ і вызначае велічыню адноснага паступальнага перамяшчэння ўсёй левай часткі сістэмы 2, у выніку якога ў слізгальным злучэнні пункт C_2 пераходзіць у палажэнне C''_2 . Тут варта звярнуць увагу, што велічыня адноснага слізгальнага перамяшчэння пункта C_2 у слізгальным злучэнні C вызначаецца з аналізу перамяшчэння пункта B і роўна $\overline{C'_2C''_2} = \overline{B'B''}$.

Прынцып магчымых перамяшчэнняў матэматычна выражаецца агульным ураўненнем статыкі:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1)$$

або

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0, \quad (2)$$

дзе \vec{F}_i , $\delta \vec{r}_i$ – сіла і магчымае перамяшчэнне пункта яе прылажэння;

X_i , Y_i , Z_i і δx_i , δy_i , δz_i – праекцыі сілы F_i і магчымага перамяшчэння $\delta \vec{r}_i$ на восі каардынат.

Для абазначэння магчымых перамяшчэнняў у выпадку складнага руху будзем выкарыстоўваць індэксы «e» і «r», уведзеныя ў кінематыцы, і ўлічваем, што абсалютнае магчымае перамяшчэнне пункта роўна геаметрычнай суме пераноснага і адноснага. Напрыклад, для некаторага пункта A : $\delta \vec{s}_A = \delta \vec{s}_A^e + \delta \vec{s}_A^r$.

Метад рашэння задач, заснаваны на ўраўненні (1), называецца *геаметрычным*, а на (2) — *каардынатным*. Апошні ў значнай ступені фармалізаваны. Яго можна паспяхова прымяняць, не аналізуючы структуру механічнай сістэмы. Паколькі мы ставім на мэце развіццё інтэлекта і інжынернай інтуіцыі, то для рашэння задач будзем прымяняць геаметрычны метады. Нагадаем паслядоўнасць дзеянняў пры вызначэнні рэакцый сувязей.

1. Паніжаем на адзінку валентнасць сувязі, рэакцыю каторай неабходна знайсці. Пры гэтым механічная сістэма ператвараецца ва ўраўнаважаны механізм з адной ступенню свабоды.

2. Выбіраем незалежнае перамяшчэнне і паказваем на рысунку (пункцірам) механізм у зрушаным становішчы. Абазначаем магчымыя перамяшчэнні ўсіх пунктаў і вуглавая перамяшчэнні частак сістэмы, да якіх прыкладзены дадзеныя сілы, пары сіл і невядомая рэакцыя. У складаных сістэмах паказваем таксама магчымыя перамяшчэнні ўнутраных сувязей.

3. Для атрыманай сістэмы запісваем агульнае ўраўненне статыкі (1).

4. Выражаем усе магчымыя перамяшчэнні пунктаў і цел праз незалежнае магчымае перамяшчэнне і падстаўляем іх у атрыманае агульнае ўраўненне.

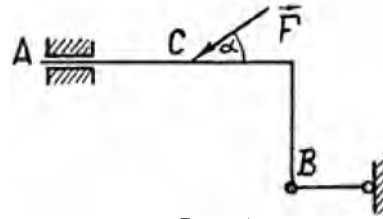
5. У левай яго частцы выносім за дужкі незалежнае магчымае перамяшчэнне і прыходзім да ўраўнення з адной невядомай рэакцыяй сувязі.

6. Вызначаем рэакцыю.

Апісаная метадыка паўтараецца пры вызначэнні кожнай рэакцыі. Пры гэтым, як правіла, выбіраецца іншае незалежнае магчымае перамяшчэнне.

Раўнавага аднаго цела.

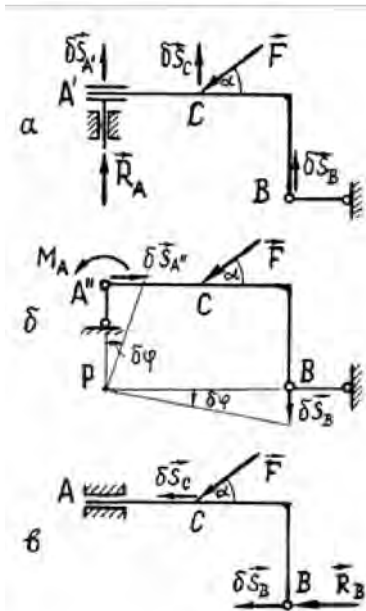
Пад дзеяннем плоскай сістэмы сіл цела будзе заставацца ў раўнавазе, калі на яго накладзена трохвалентная карэктная сістэма сувязей. Ніжэй разглядаюцца механічныя сістэмы з рознай структурай сувязей. Для вызначэння рэакцый выкарыстана апісаная вышэй метадыка.



Рыс. 4

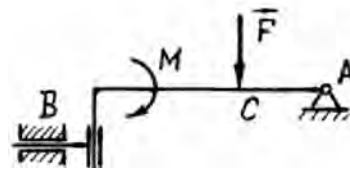
Прыклад 1. Дадзеная сістэма (рыс. 4) уяўляе сабою ломаны стрыжань ACB , нагружаны сілай F . Неабходна вызначыць рэакцыі R_A , M_A , R_B . Вызначэнне R_A . Паніжаем валентнасць слізгальнай замацоўкі A . Атрыманы механізм паказаны на рысунку 5, а. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{A'}$, дзе літарай A' абазначаны пункт стрыжня $A'CB$, змешчаны ў цэнтры ўтулкі. Запісваем ураўненне работ: $R_A \delta s_{A'} - F \sin \alpha \delta s_C = 0$. Паколькі падвойная слізгальная замацоўка не дапускае павароту, то стрыжань $A'CB$ перамяшчаецца паступальна і $\delta s_C = \delta s_{A'}$. Ураўненне работ прымае выгляд: $(R_A - F \sin \alpha) \delta s_{A'} = 0$. Адсюль $R_A - F \sin \alpha = 0$ і $R_A = F \sin \alpha$.

Вызначэнне M_A . Пераўтвараем сувязь A , як паказана на рысунку 5, б. Стыгань $A''CB$ атрымлівае магчымасць плоскага павароту вакол імгненнага цэнтры P . На рысунку літарамі $\delta s_{A''}$ і δs_B абазначаны магчымыя перамяшчэнні пунктаў A'' і B . За незалежнае прымаем магчымае перамяшчэнне $\delta \varphi$ стрыжня $A''CB$. Ураўненне работ мае выгляд: $M_P(\vec{F}) \delta \varphi - M_A \delta \varphi = 0$. Адгэтуль знаходзім $(M_P(\vec{F}) - M_A) \delta \varphi = 0$, $M_P(\vec{F}) - M_A = 0$ і $M_A = M_P(\vec{F})$, дзе $M_P(\vec{F})$ — момант сілы F адносна цэнтры P .



Рыс. 5

Вызначэнне R_B . Вызваляем ад сувязі B (рыс. 5, в). За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем δs_B . Паколькі стрыжань ACB можа здзяйсняць паступальнае перамяшчэнне, то $\delta s_C = \delta s_B$. Ураўненне работ прымае выгляд:



Рыс. 6

$$(R_B + F \cos \alpha) \delta s_B = 0.$$

Адсюль знаходзім $R_B = -F \cos \alpha$.

Прыклад 2. Стрыжань ACB нагружаны сілай F і парай M . Сістэма сувязей складаецца з ідэальнага нерухомага цыліндра A і падвойнай слізгальнай замацоўкі B (рыс. 6). Вызначыць рэакцыі сувязей.

Вызначэнне M_B . Вызваляем ад сувязі B (рыс. 7, а). Стрыжань ACB можа здзяйсняць паварот вакол нерухомага цэнтра A . За незалежнае прымаем магчымае вуглавое перамяшчэнне стрыжня $\delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ: $(M_B + M_A(\vec{F}) - M)\delta\varphi = 0$. Знаходзім $M_B = M - M_A(\vec{F})$, дзе $M_A(\vec{F})$ — момант сілы F адносна цэнтра A .

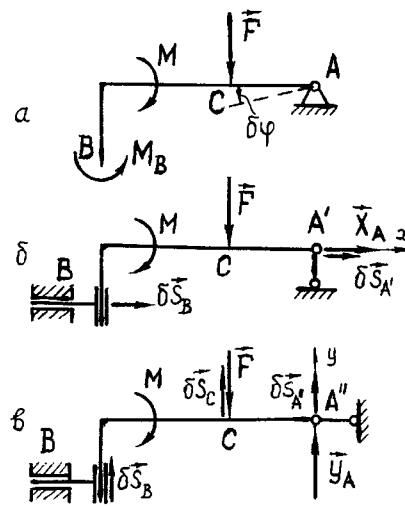
Вызначэнне X_A . Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 7, б). Паколькі сувязь B не дапускае павароту стрыжня $A'CB$, то ён атрымлівае магчымасць здзяйсняць паступальнае гарызонтальнае перамяшчэнне, пры якім пара M і сіла F работы не выконваюць. Таму $X_A \delta s_{A'} = 0$, адкуль $X_A = 0$.

Вызначэнне Y_A . Трансфармуем сувязь A , як паказана на рысунку 7, в. Стрыжань $A''CB$ атрымлівае магчымасць вертыкальнага перамяшчэння; пры гэтым $\delta s_B = \delta s_C = \delta s_{A''}$. Ураўненне работ прыводзіцца да выгляду: $(Y_A - F)\delta s_{A''} = 0$, адкуль $Y_A = F$.

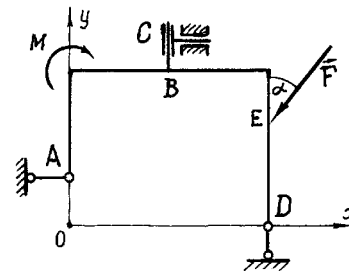
Прыклад 3. Рамная сістэма $ABCD$ (рыс. 8) нагружана сілай F і парай M . На яе накладзена сістэма аднавалентных сувязей A, C, D . Вызначыць іх рэакцыі.

Вызначэнне R_A . Вызваляем раму ад сувязі A (рыс. 9, а). Цяпер яна атрымлівае магчымае гарызонтальнае паступальнае перамяшчэнне. За незалежнае прымаем $\delta s_{A'}$. Паколькі $\delta s_E = \delta s_C = \delta s_{A'}$, то ўраўненне работ прыводзіцца да выгляду: $(R_A - F \sin \alpha)\delta s_{A'} = 0$. Атрымліваем: $R_A - F \sin \alpha = 0$ і $R_A = F \sin \alpha$.

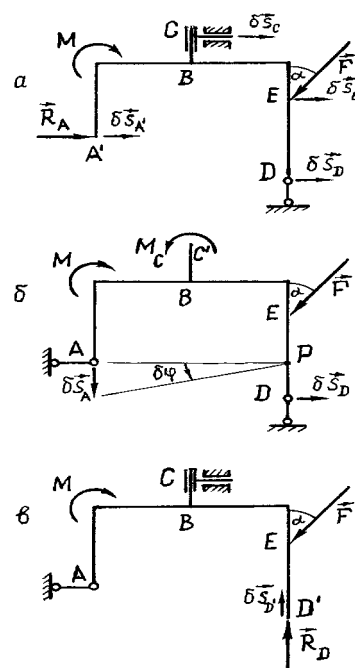
Вызначэнне M_C . Вызваляем ад сувязі C (рыс. 9, б). Атрыманы механізм можа паварочвацца вакол імгненнага цэнтра павароту P . За незалежнае прымаем вуглавое перамяшчэнне $\delta\varphi$. Запісваем ураўненне работ: $(M_A - M + M_P(\vec{F}))\delta\varphi = 0$. Атрымліваем: $M_A - M + M_P(\vec{F}) = 0$ і $M_A = M - M_P(\vec{F})$, дзе $M_P(\vec{F})$ — момант сілы F адносна цэнтра P .



Рыс. 7



Рыс. 8



Рыс. 9

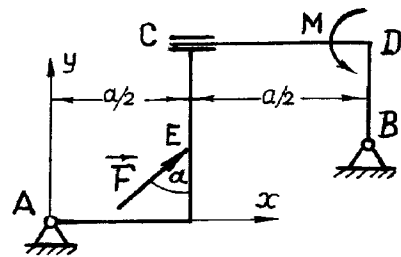
Вызначэнне R_D . Вызваляемся ад сувязі D (рыс. 9, в). За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta_{D'}$. Паколькі магчымае перамяшчэнне рамы паступальнае, то пара M работы не выконвае. Канчаткова знаходзім: $R_D = F \cos \alpha$.

Раўнавага складаных сістэм са слізгальнымі злучэннямі і замацоўкамі.

Звернемся да механічных сістэм, якія ўтвораны з двух целаў. Сумарная валентнасць знешніх і ўнутраных сувязей такіх сістэм роўна шасці. У большасці сістэм унутраная сувязь двухвалентная – цыліндрычны шарнір або слізгальнае злучэнне. У такім выпадку агульная валентнасць знешніх сувязей роўна чатыром. У статычна вызначальных сістэмах, якія тут разглядаюцца, магчымы два варыянты размеркавання валентнасці знешніх сувязей паміж цэламі. У *першым* варыянце на кожнае цела накладзена двухвалентная сістэма сувязей; гэта могуць быць дзве простыя сувязі або адна двухвалентная. У *другім* — адно цела замацавана з дапамогай трохвалентнай сістэмы сувязей, на другое накладзена адна простая сувязь. У апошнім варыянце дзеянне на грузкі, прыкладзенай да першага цела, не распаўсюджваецца на другое. Больш складаным з'яўляецца аналіз раўнавагі сістэм, якія належаць да першага варыянта.

Прыклад 1. Механічная сістэма і на грузкі на яе паказаны на рысунку 10. Вызначыць рэакцыі знешніх сувязей A і B .

Рашэнне. Як бачым, на кожную частку сістэмы накладзены двухвалентныя сувязі A, B . Таму яна адносіцца да першага варыянта размеркавання валентнасці сувязей.



Рыс. 10

Вызначыце X_A . Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 11, а). Атрымліваем механізм з адной ступенню свабоды. Надамо шарніру A' магчымае перамяшчэнне $\delta s_{A'}$. Тады другі канец стрыжня $A'C$ — утулка C — атрымае перамяшчэнне δs_C (утулка можа слізгаць па стрыжню CD).

Паколькі $\delta s_C \parallel \delta s_{A'}$, то заключаем, што магчымае перамяшчэнне ўсёй левай часткі сістэмы паступальнае; таму $\delta s_C = \delta s_E = \delta s_{A'}$. Пры гэтым правая частка BC застаецца нерухомай. Запісваем ураўненне: $X_A \delta s_{A'} + F \sin \alpha \delta s_E = 0$. Адсюль $X_A + F \sin \alpha = 0$ і $X_A = -F \sin \alpha$.

Вызначэнне Y_A . Паніжаем валентнасць сувязі A , як паказана на рысунку 11, б. У атрыманым механізме абсалютнае магчымае перамяшчэнне правай часткі BC сістэмы вярчальнае вакол цэнтра B , левай $A''C$ — складанае. Апошняя можа ў пераносным перамяшчэнні паварочвацца разам з правай часткай вакол пункта B і адначасова перамяшчацца паступальна; пры гэтым утулка C у адносным руху слізгае ўправа па стрыжню CD . За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем вугал павароту $\delta \varphi$. Сувязь паміж адносным магчымым перамяшчэннем $\delta s_{A''}^r$ і $\delta \varphi$ устанавліваем, аналізуючы перамяшчэнні шарніра A'' , для якога вядомы напрамкі адноснага $\delta \vec{s}_{A''}^e$, пераноснага $\delta \vec{s}_{A''}^e$ і абсалютнага $\delta \vec{s}_{A''}^r$ перамяшчэнняў і справядліва залежнасць: $\delta \vec{s}_{A''}^r = \delta \vec{s}_{A''}^e + \delta \vec{s}_{A''}^e$. На рысунку 11, б $\delta \vec{s}_{A''}^e \perp A''B$, $\delta s_{A''}^r = \delta s_E = \delta s_{A''}^e \sin \beta = A''B \sin \beta \delta \varphi$. Запісваем ураўненне работ:

$$M_B(\vec{Y}_A)\delta\varphi + M_B(\vec{F})\delta\varphi + F \sin \alpha \delta s_E - M\delta\varphi = 0$$

або

$$\left(Y_A a + F \cos \alpha \frac{a}{2} + F \sin \alpha \sin \beta A''B - M \right) \delta\varphi = 0$$

Адсюль знаходзім:

$$Y_A = \frac{1}{a} \left(M - F \cos \alpha \frac{a}{2} - F \sin \alpha \sin \beta A''B \right).$$

Вызначэнне X_B . Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс. 11, в). Аналіз атрыманага механізма паказвае, што яго правая частка $B'C$ атрымлівае паступальнае магчымае перамяшчэнне (паколькі $\delta\vec{s}_{B'} \parallel \delta\vec{s}_C$), а левая застаецца нерухомай. Таму знешнія сілы работы не выконваюць і ўраўненне работ запісваецца ў выглядзе $X_B \delta s_{B'} = 0$, адкуль $X_B = 0$.

Вызначэнне Y_B . Атрыманы пасля пераўтварэння сувязі B механізм паказаны на рысунку 11, г. Магчымае перамяшчэнне яго левай часткі AC — паварот вакол цэнтра A ; правая $B''C$ можа выконваць складаны рух: вярчальны пераносны разам з левай часткай вакол цэнтра A і паступальны адносна левай часткі. Пры гэтым стрыжань CD слізгае гарызонтальна ва ўтулцы C . За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta\varphi$. Тады пераноснае магчымае перамяшчэнне

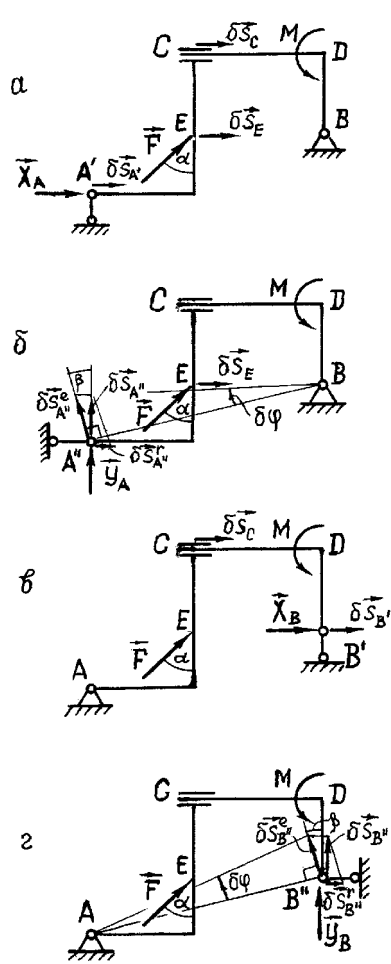
$\delta\vec{s}_{B'}^e = AB''\delta\varphi$. Раскладваем яго на абсалютнае $\delta\vec{s}_{B'}^r$, перпендыкулярнае да сувязі $B''B_1$, і адноснае $\delta\vec{s}_{B'}^t$, паралельнае да стрыжня CD (рыс. 11, г). На правую частку сістэмы дзейнічаюць рэакцыя Y_B і пара M , якія на яе адносным гарызонтальным перамяшчэнні работы не выконваюць. Таму ўраўненне работ запісваем толькі на пераносным перамяшчэнні ўсей сістэмы: $M_A(\vec{Y}_B)\delta\varphi + M\delta\varphi + M_A(\vec{F})\delta\varphi = 0$ або $\left(Y_B a + M + F \cos \alpha \frac{a}{2} - F \sin \alpha \frac{h}{2} \right) \delta\varphi = 0$. Адсюль $Y_B = \left(\frac{h}{2a} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) F - M/a$.

Прыклад 2. Механічная сістэма і нагрузка на яе паказаны на рысунку 12. Неабходна вызначыць рэакцыі сувязей A і B .

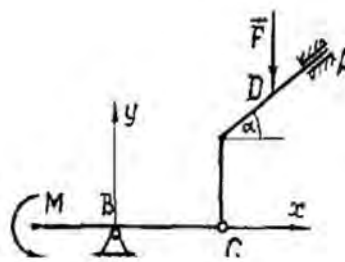
Вызначэнне X_B . Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс 13, а). У атрыманым механізме левая частка $B'C$ можа здзяйсняць плоскае перамяшчэнне вакол імгненнага цэнтра P , правая AE — паступальнае ўздоўж напрамку EA . Прымем у якасці незалежнага вуглавае магчымае

перамяшчэнне $\delta\varphi$. Запішам ураўненне работ: $M_P(\vec{X}_B)\delta\varphi + M\delta\varphi - F \sin \alpha \delta s_D = 0$. З улікам $\delta\vec{s}_D = \delta\vec{s}_C = \delta\varphi \cdot PC$ атрымаем: $(X_B \cdot B'P + M - F \sin \alpha \cdot PC)\delta\varphi = 0$, адкуль

$$X_B = \frac{1}{B'P} (F \sin \alpha PC - M).$$



Рыс. 11



Рыс. 12

Визначення Y_B . Пераўтвараем сувязь B (рыс 13, б). Левая частка атрымлівае магчымаць плоскага перамяшчэння з цэнтрам павароту P , які супадае з пунктам C , правая можа перамяшчацца паступальна. За незалежнае прымаем вуглавое перамяшчэнне $\delta\varphi$. Паколькі нерухомы пункт C належыць і стрыжню CEA , то апошні таксама будзе заставацца нерухомым. Работу выконваюць толькі сілы, прыкладзеныя да левага стрыжня. Ураўненне работ мае выгляд: $M_C(\vec{Y}_B)\delta\varphi - M\delta\varphi = 0$, альбо $(Y_B \cdot B'C - M)\delta\varphi = 0$, адкуль $Y_B = M/B'C$.

Визначення R_A . Паніжаем валентнасць слізгальнай замацоўкі A . Атрымліваем падвойную слізгальную замацоўку A' (рыс. 13, в). Левая частка ўтворанага механізма можа паварочвацца вакол цэнтра A , правая здольна здзяйсняць складаны рух: паступальны ў напрамку рэакцыі R_A і адносны ўздоўж участка EA' . За незалежнае магчымае перамяшчэнне прыем абсалютнае перамяшчэнне δs_C . Яно раскладваецца на пераноснае $\delta s_C^e = \delta s_D^e = \delta s_{A'}^e = \delta s_C \cos \alpha$ і адноснае $\delta s_C^r = \delta s_D^r = \delta s_C \sin \alpha$; магчымае вуглавое перамяшчэнне стрыжня BC роўна $\delta\varphi = \delta s_C / BC$. Запісваем ураўненне работ:

$$M\delta\varphi - F \sin \alpha \delta s_D^r - F \cos \alpha \delta s_D^e + R_A \delta s_{A'}^e = 0 \text{ альбо } (M/BC - F \sin^2 \alpha - F \cos^2 \alpha + R_A \cos \alpha) \delta s_C = 0; \text{ адгэтуль } R_A = (F - M/BC) / \cos \alpha.$$

Визначення M_A . Пераўтвараем сувязь A ў A'' (рыс. 13, г). Тады звенні механізма атрымліваюць абсалютныя перамяшчэнні: левы — вярчальнае вакол цэнтра A , правы — плоскае вакол імгненнага цэнтра P . У якасці незалежнага магчымага перамяшчэння прымаем $\delta\varphi$. Для агульнага шарніра C відавочны залежнасці:

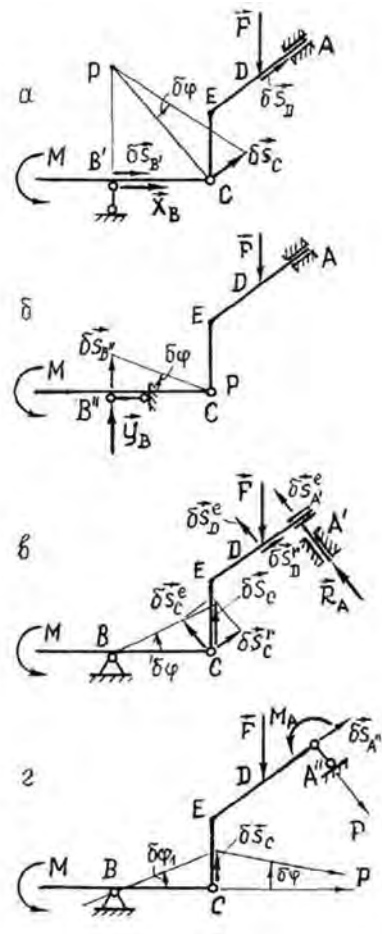
$$\delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot BC \text{ і } \delta s_C = \delta\varphi \cdot CP, \text{ адкуль } \delta\varphi_1 \cdot BC = \delta\varphi \cdot CP \text{ і } \delta\varphi_1 = \frac{PC}{BC} \delta\varphi. \text{ Складаем}$$

$$\text{ураўненне работ: } M\delta\varphi_1 - M_P(\vec{F})\delta\varphi - M_A\delta\varphi = 0 \text{ альбо } \left(M \frac{PC}{BC} - M_P(\vec{F}) - M_A \right) \delta\varphi = 0.$$

$$\text{Адгэтуль знаходзім: } M_A = \frac{PC}{BC} M - M_P(\vec{F}).$$

Аналіз складаных сістэм з аднавалентнай унутранай сувяззю.

Як раней адзначалася, сумарная валентнасць сувязей, накладзеных на механічную сістэму, што ўтворана з двух цел, роўна шасці. Таму пры аднавалентнай унутранай сувязі валентнасць знешняй сістэмы сувязей роўна пяці. Пры гэтым магчымы толькі адзін варыянт размеркавання яе валентнасцей паміж цэламі: адно цэла з двухвалентнай сістэмай сувязей, другое — з трохвалентнай.



Рыс. 13

Прыклад 1. Механічная сістэма і нагрузка паказаны на рысунку 14. Унутраная сувязь уяўляе сабою ненагружаны стрыжань C_1C_2 . Знайсці рэакцыі X_A, M_A, X_B .

Вызначэнне X_A . Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 15, а). Пасля гэтага левы стрыжань атрымлівае магчымае гарызантальнае паступальнае перамяшчэнне, правы — вертыкальнае. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{A'}$. Запісваем ураўненне работ:

$$X_A \delta s_{A'} + F \cos \alpha \delta s_D = 0.$$

Паколькі тут $\delta s_D = \delta s_{C_2} = \frac{PC_2}{PC_1} \delta s_{C_1} = \frac{PC_2}{PC_1} \delta s_{A'}$,

то $\left(X_A + F \cos \alpha \frac{PC_2}{PC_1} \right) \delta s_{A'} = 0$, адкуль

$$X_A = -F \cos \alpha \frac{PC_2}{PC_1}.$$

Вызначэнне M_A . Замяняем жорсткую замацоўку A на нерухома цыліндрычны шарнір (рыс. 15, б). У атрыманым механізме стрыжань $A'C_1$ можа паварочвацца вакол нерухомага цэнтра A'' , стрыжань BC_2 — здзяйсняць вертыкальны паступальны рух, а сувязь C_1C_2 — плоскі рух вакол імгненнага цэнтра P . За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta \varphi$. Ураўненне работ мае выгляд:

$$M_A \delta \varphi + M \delta \varphi - F \cos \alpha \delta s_D = 0.$$

Тут

$$\delta s_D = \delta s_{C_2} = \frac{PC_2}{PC_1} \delta s_{C_1} = \frac{PC_2 \cdot A''C_1}{PC_1} \delta \varphi.$$

Канчаткова

знаходзім: $M_A = \frac{PC_2 \cdot A''C_1}{PC_1} F \cos \alpha - M.$

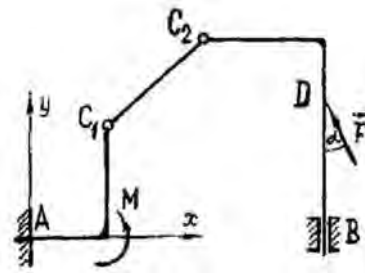
Вызначэнне X_B . Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс. 15, в). У атрыманай сістэме стрыжань AC_1 нерухома. Сувязь C_1C_2 можа паварочвацца вакол цэнтра C_1 , а стрыжань C_2B' выконвае паступальны рух (паколькі сувязь B' не дапускае павароту). Работу могуць выконваць толькі сілы, прыкладзеныя да рухомай правай часткі сістэмы. У якасці незалежнага магчымага перамяшчэння прымаем δs_{C_2} . Запісваем ураўненне работ:

$$F \sin \alpha \delta s_D^X + F \cos \alpha \delta s_D^Y - X_B \delta s_{B'}^X = 0.$$

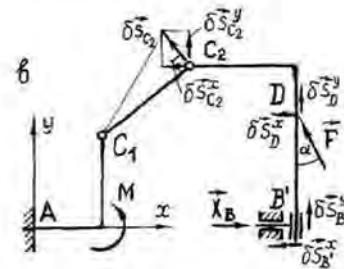
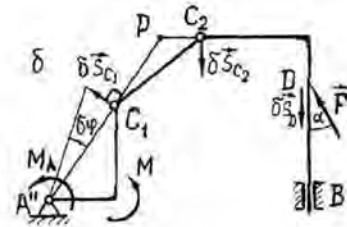
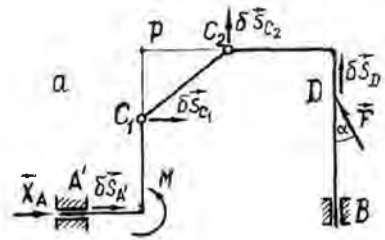
Падстаўляем

сюды $\delta s_{B'}^X = \delta s_D^X = \delta s_{C_2}^X = \delta s_{C_2} \cdot \sin \beta$, $\delta s_D^Y = \delta s_{C_2}^Y = \delta s_{C_2} \cos \beta$. Атрымліваем:

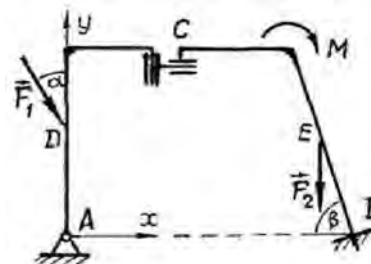
$$(F \sin \alpha \cdot \sin \beta + F \cos \alpha \cos \beta - X_B \sin \beta) \delta s_{C_2} = 0, \text{ адкуль } X_B = F \cos(\alpha - \beta) / \sin \beta.$$



Рыс. 14



Рыс. 15



Рыс. 16

Прыклад 2. Дадзена механічная сістэма, унутраная сувязь C у якой уяўляе сабою падвойную слізгальную замацоўку (рыс. 16). Знайсці рэакцыі сувязей X_A , X_B , M_B .

Вызначэнне X_A . Паніжаем валентнасць сувязі A (рыс. 17, а). Аналіз сувязей атрыманага механізма паказвае, што яго левая частка $A'C$ можа перамяшчацца паступальна, а правая застаецца нерухомай. Прымем у якасці незалежнага магчымае перамяшчэнне $\delta s_{A'}$. Складаем ураўненне работ: $X_A \delta s_{A'} + F \sin \alpha \delta s_D = 0$. Тут $\delta s_D = \delta s_{A'}$. Таму $(X_A + F \sin \alpha) \delta s_{A'} = 0$; адгэтуль $X_A = -F \sin \alpha$.

Вызначэнне X_B . Пераўтвараем жорсткую замацоўку B у слізгальную B' (рыс. 17, б). У атрыманай сістэме правая частка можа перамяшчацца паступальна, левая – нерухомая. За незалежнае магчымае перамяшчэнне прымаем $\delta s_{B'}$. Запісваем ураўненне работ: $X_B \delta s_{B'} = 0$. Адгэтуль $X_B = 0$.

Вызначэнне M_B . Паніжаем валентнасць сувязі B (рыс. 17, в). Левая і правая часткі атрыманай сістэмы могуць паварочвацца вакол нерухомых цэнтраў A і B'' . Няхай $\delta \varphi$ — незалежнае магчымае перамяшчэнне. Паколькі сувязь C выключае ўзаемны паварот частак сістэмы, то $\delta \varphi_1 = \delta \varphi$, г.зн. магчымыя вуглавыя перамяшчэнні для правай і левай частак сістэмы аднолькавы. Ураўненне работ запісваецца ў выглядзе: $(M_B + M_{B''}(\vec{F}_2) - M - M_A(\vec{F}_1)) \delta \varphi = 0$.

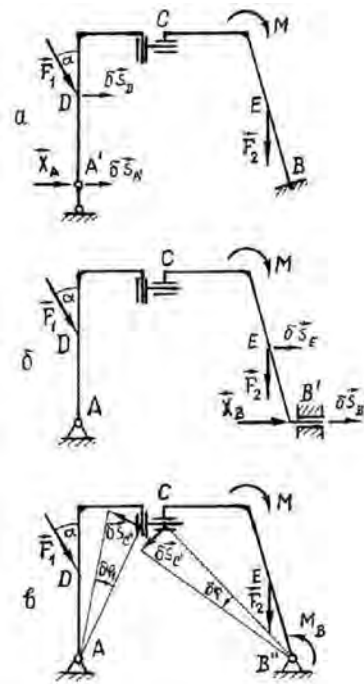
$$\text{Адгэтуль знаходзім: } M_B = M + M_A(\vec{F}_1) - M_{B''}(\vec{F}_2).$$

Заклучэнне.

У артукуле паказана магчымасць прымянення агульнага ўраўнення статыкі да аналізу раўнавагі распаўсюджанага тыпу механічных сістэм, якія традыцыйна даследуюцца з дапамогай ўраўненняў геаметрычнай статыкі. Методыка рашэння задач падрабязна праілюстравана на сямі прыкладах, кожны з якіх можа ўспрымацца аўтаномна. Кола закранутых тут пытанняў адпавядае вучэбнай праграме тэхнічнай ВНУ. Вынікі работы даступны для ўкаранення ў вучэбны працэс па агульнатэхнічных дысцыплінах.

ЛІТАРАТУРА

1. Русан, С. І. Асаблівасці методыкі выкладання прынцыпа магчымых перамяшчэнняў у тэхнічных універсітэтах / С. І. Русан // *Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб.* — Мінск : БНТУ, 2005. — №18. — С. 234—240.
2. Русан, С. І. Структура плоскіх статычна вызначальных механічных сістэм. / С. І. Русан — Баранавічы : РВА БарДУ, 2007. — 69 с.



Рыс. 17

СОВРЕМЕННЫЙ ВЗГЛЯД НА ТЕРМИНОЛОГИЮ В КУРСЕ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Анципорович П.П., Кудин В.В., Кудин М.В.

The questions concerning the terminology in the course "Theory of Mechanisms and Machines" in a modern interpretation.

Терминология является важной составляющей любой научной дисциплины, в том числе и теории механизмов и машин (ТММ). Она обеспечивает единообразие в понимании объекта исследования, его характеристик, свойств и методов анализа и синтеза. Развитие науки непосредственно связано с появлением новых терминов, а также требуется периодическое обновление и дополнение терминологии.

Основой терминологического толкования терминов по ТММ является прежде всего сборник рекомендуемых терминов, разработанных комитетом научно-технической терминологии АН СССР [1], международная терминология по теории механизмов и машин, опубликованная в журнале ИФТОММ, а также учебники и учебные пособия [2]. Непосредственно белорусских трудов в области терминологии по ТММ не существует, за исключением научных статей и отдельных работ.

В современный курс по ТММ включены новые разделы, как, например «Колебания в механизмах» и др. Вместе с тем, терминология этих разделов должна входить составной частью динамики механизмов и машин. В базовых учебниках по ТММ за основу взяты термины из ранее изданного в СССР сборника Комитета научно-технической терминологии АН СССР по механическим колебаниям [3].

Большое внимание следует уделить фундаментальным, устоявшимся с годами терминам, к которым относятся такие термины, как «механизм», «звено», «кинематическая пара», «кинематическая цепь», «кинематическое соединение», «гидравлический механизм», «пневматический механизм» и т.д.

Работы по уточнению, как базовых терминов, так и всей терминологии по ТММ выполняются кафедрой «Теория механизмов» МГТУ им. Н.Э. Баумана [4].

В определении термина «механизм» говорится об устройстве, предназначенном для преобразования движения. Известно, что преобразование движения в механической системе всегда сопровождается преобразованием сил. Вместе с тем целевое назначение механизма может состоять либо только в преобразовании движения (например, направляющий механизм), либо только в преобразовании сил (например, механизм домкрата), либо в том и другом одновременно. И эти обстоятельства обязаны быть учтены в термине «механизм».

Современная трактовка термина «звено», как одна или несколько «жестко» соединенных между собой деталей (твердых тел) подвержена изменению.

Нельзя признать удовлетворительным и существующее определение термина «кинематическая пара» как соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающих их относительное движение, т.к. кинематическая пара может быть образована с помощью нескольких промежуточных тел, образующих кинематическую цепь, но не участвующих в заданном преобразовании движения (например, шарикоподшипники, образующие вращательную, цилиндрическую либо сферическую пары).

В ТММ введено понятие «кинематическое соединение», которое представляет собой дополнительную кинематическую цепь, предназначенную заменить ту или иную кинематическую пару. Однако звенья, образующие кинематическое соединение не являются звеньями механизма, а следовательно при структурном анализе эти звенья не учитываются в преобразовании движения. Следовательно, они должны по-

лучить некоторое другое определение. По предложению разработчиков терминологии [4] введен термин «элемент механизма», входящий в противоречие с существующим понятием кинематической пары, как соприкосновение двух звеньев. Кинематическое соединение (элемент механизма) по своей сущности не может подходить под определение кинематической пары и в тоже время заменяет ее.

С целью устранения указанных недостатков разработчиками предложено новое определение кинематической пары как «подвижное соединение двух звеньев и (или) твердотельных элементов механизма». В случае образования кинематической пары, образованной непосредственно твердыми телами, предложен термин «сопряжение», а для кинематической цепи, сохранить термин «кинематическое соединение».

Измененные понятия «звено», «кинематическая пара», введение параметра «сопряжение» влечет за собой изменения ряда терминов «структура механизмов».

В учебном пособии «Теория механизмов и машин. Терминология» [4], авторы предлагают свое видение на терминологию по ТММ. В этом пособии в виде соответствующих таблиц приведены термины как «Общие понятия теории механизмов и машин», так и термины по структуре механизмов и их кинематике, а также по динамике механизмов и динамике приводов, колебаниях в механизмах [6].

Многие из терминов совпадают по назначению с ранее принятыми, но имеются и такие, которые следовало бы обсудить, прежде чем рекомендовать для применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория механизмов и машин. Терминология. Буквенные обозначения величин. Комитет научно-технической терминологии АН СССР. М.: Наука, 1987, 43с.
2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин : Учебное пособие М.: Наука, 1993, 626с.
3. Механические колебания. Основные понятия. Терминология. Комитет научно-технической терминологии АН СССР. М.: Наука, 1990.
4. Новый подход к определению некоторых фундаментальных терминов теории механизмов и машин / Плахтин В.Д., Гуревич Ю.Я., Тимофеев Г.А., Яминский А.В.// Инженерный журнал, 2002, №1 С.61-63.
5. Теория механизмов и машин: Учебн. для втузов/К.В. Фролов, С.А. Попов, А.В. Мусатов и др.; Под. ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987 – 496с.
6. Теория механизмов и машин. Терминология : Учебное пособие / Н.И. Левитский, Ю.Я. Гуревич, В.Д. Плахтин и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 80с.

КОНЦЕПЦИЯ МАРКЕТИНГА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

Акунец В.П., Ивашин Э.Я.

For marketing planning the system of scientifically grounded norms is required. The article gives the main principles of working up of production plans.

Маркетинг в сфере образования – это своеобразный вид управленческой деятельности, направленный на удовлетворение нужд и потребностей посредством обмена научной, учебной, методической и других видов информации.

Цель маркетинга в сфере образования заключается в том, чтобы познать и понять потребности студента, разработать соответствующую образовательную услугу и установить правильную цену услуги. Причем цена образовательной услуги должна соответствовать общественно необходимым затратам, адекватным условиям деятельности предприятий – потребителей. С одной стороны предприятия – потребители предъявляют определенные требования к выпускникам ВУЗов и колледжей. С другой стороны материальная база этих ВУЗов и колледжей часто отстает от уровня оснащенности передовых предприятий, банков, совместных и иностранных предприятий.

Сущность концепции маркетинга образовательных услуг на современном этапе развития нашего общества заключается в установлении механизма взаимодействия субъектов и объектов в сфере образования, который позволит повысить уровень образовательных услуг.

Распространена упрощенная точка зрения, что маркетинг – это особая специальная функция внутрифирменного управления. Если бы это было так, то основным субъектом маркетинга образовательных услуг был бы конкретный университет и маркетинг был бы его внутренним делом, к которому не могли бы иметь дело ни государство, ни сами потребители образовательных услуг.

Между тем субъектами маркетинга выступают все субъекты рынка, а не только университеты и фирмы – посредники. Реальными участниками маркетинговых отношений являются далеко не только образовательные учреждения. К субъектам маркетинга образовательных услуг относятся: учебное заведение; личность учащегося, студента, аспиранта; предприятия и организации; министерство образования; институт контроля знаний; органы регистрации, лицензирования и аккредитации образовательных учреждений; структуры, финансирующие образовательную услугу; прочие структуры, причастные к продвижению образовательной услуги на рынке.

Безусловно, особую роль среди субъектов маркетинга образовательных услуг имеет личность учащегося, студента, слушателя. Личность – это не просто материальный носитель образовательных услуг, не только пользователь информации в процессе учебы, но и их единственный конечный потребитель. Личность отличается от остальных потребителей образовательных услуг тем, что использует образовательный потенциал не только для создания материальных благ в будущем, не только для зарабатывания средств к жизни, но еще и для удовлетворения собственных потребностей в познании мира. Именно личность, как конечный потребитель образовательной услуги, осуществляет конкретный выбор своей будущей специальности, сроков, места и формы обучения, источников его финансирования, а также выбор будущего места работы.

Авторы внимательно проанализировали литературные источники по проблемам маркетинга образовательных услуг и обратили внимание, что недостаточно изучена роль такого субъекта маркетинга как личность преподавателя.

Для создания эффективного механизма взаимодействия субъектов маркетинга следует особое внимание обращать на эффективность информационных потоков. Информационные потоки в процессе получения образовательной услуги следует четко классифицировать на учебную, научную, нормативно-справочную, нормативно – законодательную информацию. Каждый из видов информации имеет свою ценность и роль в обеспечении качества образовательной услуги.

С точки зрения маркетинга в функции образовательного учреждения входит: оказание обучающимся образовательных услуг; передача желаемых знаний, умений и навыков; оказание сопутствующих образовательных услуг; оказание воспитательных воздействий, формирующих личность; оказание информационно-посреднических услуг обучающимся и работодателям.

В механизме взаимодействия субъектов маркетинга образовательных услуг недостаточно изучена роль и значение фирм – работодателей будущих специалистов. В зарубежных странах фирмы – работодатели будущих специалистов часто выступают в лице спонсоров университетов и оборудуют лаборатории конкретной вычислительной техникой или специальным оборудованием. В таком случае они не являются потребителями бесплатной рабочей квалифицированной силы. Механизм взаимодействия субъектов маркетинга в таком случае работает более эффективно.

Следует отметить, что в маркетинге образовательных услуг в нашей стране особенно весома роль государства и его органов управления. Государство осуществляет правовую защиту субъектов маркетинга и прежде всего потребителей от монополизма, от недобросовестности в бизнесе, в обеспечении качества учебного материала и услуг, ведет статистику и содействует проведению масштабных рыночных исследований.

В данной статье авторы остановились лишь на некоторых аспектах взаимодействия субъектов и объектов маркетинга в сфере образования. Концепция маркетинга образовательных услуг требует глубокого исследования закономерностей в системе образования. Необходимо четко определить роль значение в образовании таких категорий как научное мировоззрение специалиста, цена образовательной услуги стоимость соответствующих видов работ. При проведении маркетинговых исследований необходимо обращать внимание не только на плату за обучение, но и на ценность представляемой услуги. В маркетинге есть такая категория «элиминация товара». Сущность стратегии элиминации образовательной услуги состоит в выделении таких услуг, которые выглядят сомнительными с точки зрения дальнейшей привлекательности на рынке и подлежат переаттестации.

Таким образом, концепция маркетинга образовательных услуг в результате оптимизации механизма взаимодействия субъектов в сфере образования позволит избежать принятия ошибочных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багиев Г.Л., Тарасевич В.М., Анн Х. «Маркетинг» СПб.: «Питер», 2007.
2. Панкрухин А.П. «Маркетинг образовательных услуг» М.; «Прогресс», 1995.

ОБУЧЕНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ WINDOWS-ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Анципорович П.П., Алейникова О.И., Войтович О.Н., Луцко Н.Я.

The article tells about teaching to use some principles of the decision technical objectives by the instrumentality of Windows application.

В настоящее время рабочими инструментами профессиональной деятельности инженера повсеместно являются высокотехнологичные компьютерные рабочие станции и компьютерные сети, оснащенные специальным программным обеспечением. Эффективное использование их требует повышения уровня подготовки студентов в области компьютерных информационных технологий и использования их в учебном процессе и последующей работе. Изучая дисциплину «Информатика», студент должен не только изучать непосредственно сам компьютер и программное обеспечение, но и получать навыки использования этих технологий для решения инженерных задач.

В процессе решения технической вычислительной задачи с использованием компьютера реализуются следующие этапы:

- 1) постановка задачи в формализованном виде;
- 2) разработка математической модели изучаемого объекта или процесса;
- 3) построение алгоритма решения задачи;
- 4) реализация алгоритма в среде наиболее эффективного для решения поставленной задачи программного обеспечения;
- 6) всестороннее тестирование построенного программно-вычислительного комплекса;
- 7) его использование для проведения вычислительного эксперимента.

Дисциплина «Информатика» изучается студентами машиностроительного факультета на протяжении первых четырех семестров. Эта особенность определяет набор решаемых задач, которые должны базироваться на знаниях студентов по дисциплинам «Физика», «Математика», «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». В качестве изучаемого программного обеспечения целесообразно использовать табличный процессор Excel и математическую систему MathCad.

Документ, созданный в Excel или MathCad для решения технической задачи, должен содержать:

- название задачи;
- сведения о разработчике;
- исходные данные с указанием наименований и технических обозначений параметров, их числовых значений и единиц измерений;
- формулы, построенные для определения промежуточных и результирующих параметров;
- вычисленные значения, представленные в удобном для чтения и смыслового понимания виде.

Среди технических задач широко встречаются такие, в которых необходимо исследовать зависимость результирующих параметров от исходных данных и сделать вывод о характере протекания процесса. В этом случае построенный в соответствии с вышеизложенными требованиями Excel или MathCad документ может использоваться для проведения вычислительного эксперимента. Создается его копия, в

которой достаточно задать новые значения исходных данных. Пересчет результатов происходит автоматически. Совокупность полученных таким образом документов предоставит разработчику необходимый числовой материал для анализа и формулирования выводов.

В учебном процессе по дисциплине «Информатика» в качестве примера рассматривается известная задача исследования движения тела массой m , брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_{\text{нач}}$, на которое действуют сила тяжести $G = mg$ и сила сопротивления воздуха $F_C = kv$, где v – скорость тела, k – коэффициент пропорциональности. Требуется исследовать характер изменения скорости и высоты подъема тела в зависимости от времени при движении вверх и определить максимальную высоту подъема.

Математической моделью процесса является задача Коши вида

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v - g, \\ v(t_{\text{нач}}) = v_{\text{нач}}. \end{cases}$$

Ее решение, например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности, на промежутке времени $[t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}]$ покажет характер изменения скорости тела при полете вверх.

Учитывая, что $v(t) = \frac{dh}{dt}$, высоту подъема получим в виде

$$h_i = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_i} v(t) dt.$$

Отсюда максимальная высота равна

$$h_{\text{max}} = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} v(t) dt.$$

Ниже показан Excel-документ, построенный по данной математической модели

Исследование движения тела, брошенного вертикально вверх

Петров В.И., группа 103117

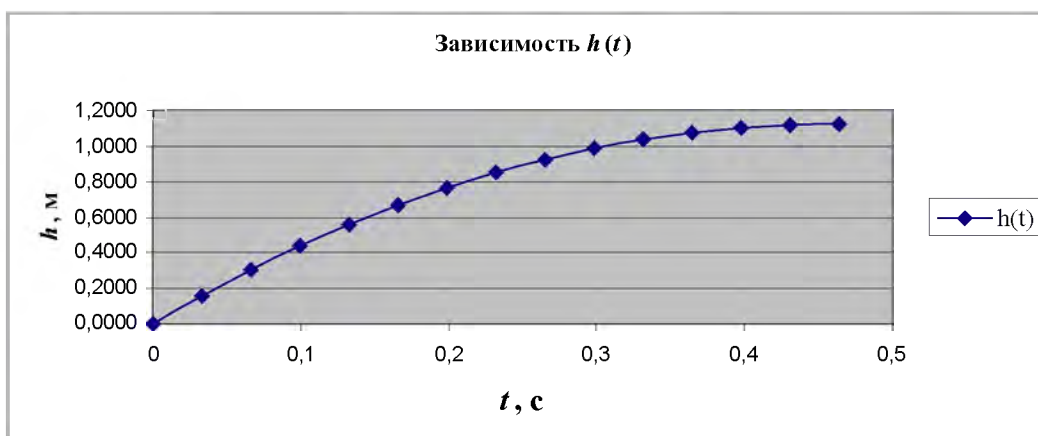
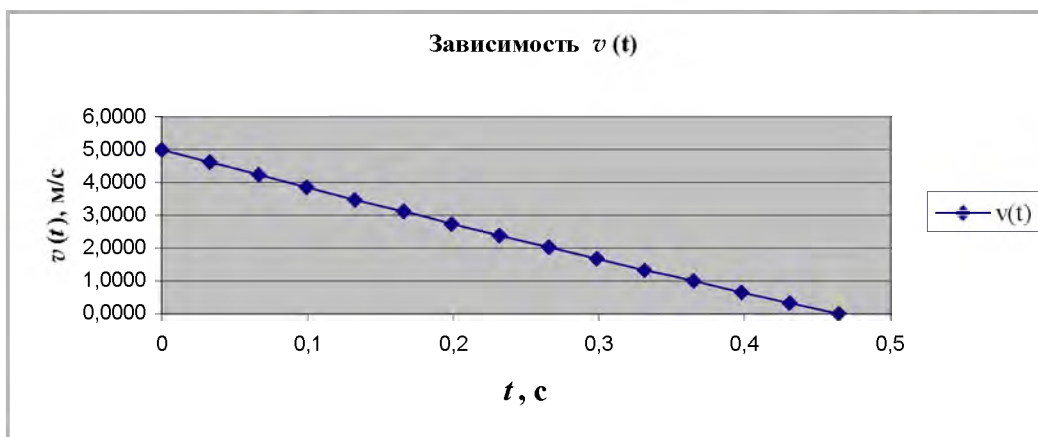
Исходные данные:

Масса тела m	=	0,50 кг
Начальное время $t_{\text{н}}$	=	0,00 с
Начальная скорость движения $v_{\text{нач}}$	=	5,00 м/с
Коэффициент сопротивления среды k	=	0,20
Ускорение свободного падения g	=	9,80 м/с ²
Количество участков разбиения n	=	14,00
Общее время полета $t_{\text{к}}$	=	0,46429 с
Элементарный интервал времени Δt	=	0,03316 с

Результаты вычислений

№ точки	t, c	$k1$	$k2$	$k3$	$k4$	$v, m/c$	h, m
1	0					5,0000	0,0000
2	0,03316	-11,8000	-11,7217	-11,7223	-11,6445	4,6113	0,1594
3	0,06633	-11,6445	-11,5673	-11,5678	-11,4910	4,2276	0,3059
4	0,09949	-11,4911	-11,4148	-11,4153	-11,3396	3,8491	0,4399
5	0,13266	-11,3396	-11,2644	-11,2649	-11,1902	3,4755	0,5613
6	0,16582	-11,1902	-11,1160	-11,1165	-11,0427	3,1068	0,6705
7	0,19898	-11,0427	-10,9695	-10,9700	-10,8972	2,7430	0,7675
8	0,23215	-10,8972	-10,8249	-10,8254	-10,7536	2,3840	0,8525
9	0,26531	-10,7536	-10,6823	-10,6828	-10,6119	2,0297	0,9257
10	0,29847	-10,6119	-10,5415	-10,5420	-10,4720	1,6801	0,9872
11	0,33164	-10,4721	-10,4026	-10,4031	-10,3340	1,3351	1,0372
12	0,3648	-10,3341	-10,2655	-10,2660	-10,1979	0,9947	1,0758
13	0,39797	-10,1979	-10,1302	-10,1307	-10,0635	0,6587	1,1032
14	0,43113	-10,0635	-9,9967	-9,9972	-9,9309	0,3272	1,1196
15	0,46429	-9,9309	-9,8650	-9,8654	-9,8000	0,0000	1,1250

Максимальная высота полета $h_{max} = 1,1250m$



Для этой же задачи документ, построенный с использованием математической системы MathCad, имеет вид

РОЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ТВОРЧЕСКОЙ САМОРЕАЛИЗАЦИИ ЛИЧНОСТИ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

Баранова А.С.

The article deals with the role of informational technologies in a person's self-realization at the present time, the ways of its informational competency improvement

Информационные технологии (ИТ) имеют большое значение для творческой самореализации личности, повышения уровня креативности её мышления, формирования умений разрабатывать стратегию поиска решения как учебных, так и практических задач, прогнозировать результаты реализации принятых решений на основе моделирования изучаемых объектов, явлений, процессов, взаимосвязей между ними. Однако недостаточно изучены и проработаны психолого-педагогические аспекты создания и внедрения в образовательный процесс современных информационных технологий.

В американском докладе "To Learning", опубликованном в 1970 г. в Нью-Йорке и Лондоне, впервые даются два определения технологии: в первом – технология обучения характеризуется как совокупность способов и средств связи (общения) между людьми, возникших в результате информационной революции и используемых в дидактике, во втором – технологии обучения рассматриваются как нечто более значительное, чем просто совокупность педагогических методов и средств.

Применение в вузах новых аппаратных и программных средств, наращивающих возможности компьютера, переход в разряд анахронизма понимания его как вычислителя, постепенно привели к вытеснению термина "компьютерные технологии" понятием "информационные технологии". Под последними понимаются процессы накопления, обработки, представления и использования информации с помощью электронных средств.

Существуют различные подходы к оценке сущности и места ИТ в образовательном процессе. Так, в справочной литературе информационная технология обучения (computerized teaching technology) определена как совокупность теоретических знаний компьютерных средств, а также методик, регламентирующих их использование в обучении. Л.В. Луцевич определяет ИТ как технологию машинной (с помощью ЭВМ) обработки, передачи, распространения информации, создания вычислительных и программных средств информатики.

Более широкая трактовка этого термина приведена М.И. Жалдаковым. Он предлагает понимать под ИТ совокупность методов и технических средств сбора, организации, хранения, обработки, передачи, и представления информации, расширяющей знания людей и развивающих их возможности по управлению техническими и социальными процессами.

Е.И. Машбиц и Н.Ф. Талызина рассматривают информационную технологию обучения как некоторую совокупность обучающих программ различных типов: от простейших программ, обеспечивающих контроль знаний, до обучающих систем, базирующихся на искусственном интеллекте.

В.Ф. Шолохович предлагает определять ИТ с точки зрения ее содержания как отрасль дидактики, занимающуюся изучением планомерно и сознательно организованного процесса обучения и усвоения знаний, в которых находят применение средства информатизации образования.

Содержательный анализ приведенных определений показывает, что в настоящее время существует два явно выраженных подхода к определению ИТ. В первом

из них предлагается рассматривать ее как дидактический процесс, организованный с использованием совокупности внедряемых (встраиваемых) в системы обучения принципиально новых средств и методов обработки данных (методов обучения), представляющих целенаправленное создание, передачу, хранение и отображение информационных продуктов (данных, знаний, идей) с наименьшими затратами и в соответствии с закономерностями познавательной деятельностью обучаемых. Во втором случае речь идет о создании определенной технической среды обучения в которой ключевое место занимают используемые информационные технологии. Таким образом, в первом случае речь идет о информационных технологиях обучения (как процессе обучения), а во втором случае о применении информационных технологий в обучении (как использование информационных средств в обучении).

П.И.Образцов(2) приводит различные информационные технологии, применяемые в высшей школе России:

№ п/п	Название ИТ	Англоязычное название	Сокращенное название
1	Электронный учебник	electronic textbook	e-tbook
2	Мультисредовая система	multimedia system	CD-sys
3	Экспертная система	experts system	ex.sys
4	Система автоматизированного проектирования	computer aided design system	CAD
5	Электронный библиотечный каталог	electronic library	e-libr
6	Банк данных, база данных	database	db
7	Локальные и распределенные (глобальные) вычислительные системы	Local and Wide area networks	LAN/WAN
8	Электронная почта	electronic mail	e-mail
9	Голосовая электронная почта	voice-mail	v-mail
10	Электронная доска объявлений	bulletin system	BS
11	Система телеконференций	teleconference	t-conf
12	Автоматизированная система управления научными исследованиями	Computer research system	aided CAR
13	Автоматизированная система организационного управления	Management information system	MIS
14	Настольная электронная типография	dest-top publishing	d.t.-publ

Перечень указанных информационных технологий значительно расширяет область творческой самореализации личности. Разнообразие используемых информационных технологий способствует реализации принципа стимулирования и мотивации положительного отношения обучающихся к учению, отражает закономерную связь между успешностью их учебно-познавательной деятельности и возбуждением интереса к ней. Он указывает на необходимость непрерывного побуждения к овладению содержанием обучения. Соблюдение этого принципа является одним из важнейших условий эффективного применения информационных технологий. Он пред-

писывает рассматривать учение как процесс проявления активности субъекта, отвечающий мотиву.

Согласно принципу ориентированности обучения на активность и самореализацию личности, проектирование информационных технологий изначально должно быть нацелено на развитие личности, выявление особенностей обучаемого (способностей, интересов, потребностей) как субъекта, признание его субъективного опыта как самобытности и самооценности, построение педагогических воздействий с максимальной опорой на этот опыт (постоянном согласовании в ходе обучения двух видов опыта—общественного и индивидуального), раскрытие индивидуального своеобразия получения знаний через анализ способов учебной работы. Задаваемое в обучении содержание (понятия, правила, приемы), фиксирующее результаты общественно-исторического опыта научного познания, обязательно переосмысливается в ходе его усвоения и применения. Информационные технологии, направленные на личностно-развивающее обучение, предполагают не только накопление знаний, умений, но и непрерывное формирование механизма самоорганизации и самореализации будущего специалиста, развития его познавательных способностей. Обучающая среда при таких технологиях не навязывает будущему специалисту нормативное построение его деятельности, а создает более свободные условия, предоставляющие ему возможность самому определять траекторию индивидуального развития. Преподаватель, опираясь на выявленные интересы и субъективный опыт обучаемого, формирует содержание обучения (научное знание), которое должно быть принято обучаемым как личностно-значимое для него, "пропущенное" через собственный субъективный опыт. Такое содержание будущий специалист усваивает с помощью форм, методов и средств активного обучения. Все это требует того, чтобы в целях активизации учебно-познавательной деятельности обучаемых комплексно использовались самые различные средства обучения (информационные, экспертно-обучающие, тренажерные, помогающие производить расчеты, проектировать и др.). Сущность комплексного применения средств обучения в рамках информационных технологий связывается с их способностью, в сочетании с организующим и направляющим началом преподавателя, активизировать мышление обучаемых, придать проблемно-деятельностный характер учебно-познавательному труду студентов.

Применение ИТ уже сегодня существенно изменяет роль и функции педагога и обучаемых, оказывает значительное влияние на все компоненты учебного процесса обучения: меняется сам характер, место и методы совместной деятельности педагогов и обучаемых; соотношение дидактических функций, реализуемых в системе "педагог-ИТО-обучаемый"; усложняются программы и методики преподавания различных дисциплин; видоизменяются методы и формы проведения учебных занятий. Иначе говоря, внедрение в учебный процесс ИТ неизбежно влечет за собой существенные изменения в структуре всей педагогической системы вуза. Причем, схема "человек—компьютер" обладает неизмеримо большими возможностями, способна предложить принципиально новый подход к решению задач учебного процесса, отличный от традиционного. Информационные технологии влияют на деятельность преподавателя. В современных условиях можно выделить следующие тенденции: педагог все больше освобождается от некоторых дидактических функций, в том числе контролирующих, оставляя за собой творческие; значительно изменяется его роль и расширяются возможности по управлению познавательной деятельностью обучаемых; изменяются качественные характеристики обучающей деятельности, происходит передача компьютеру все новых дидактических функций (предъявление учебной информации, демонстрация процессов и явлений); повышаются требования к компьютерной подготовке педагога. По мнению С.И.Архангельского: "изменяется сам характер преподавательского труда, он становится "консультационно-творческим".

Творческая самореализация в условиях «информационного общества» предполагает, что каждый индивидуум должен:

- иметь возможность доступа к базам данных и средствам информационного обслуживания;
- понимать различные форма и способы представления данных в вербальной, графической и числовых формах;
- знать о существовании общедоступных источников информации и уметь ими пользоваться;
- уметь оценивать и обрабатывать имеющиеся у него данные с различных точек зрения;
- уметь анализировать и обрабатывать статистическую информацию;
- уметь использовать имеющиеся данные при решении стоящих перед ним задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новые информационные технологии образования: экспериментальная проверка педагогической эффективности / под ред. В.Г.Разумовского, И.М. Бобко.- Новосибирск: НИИИВТ,1991.-69с.
2. Образцов П. И. Психолого-педагогические аспекты разработки и применения в вузе информационных технологий обучения. – Орловский государственный технический университет. - Орел, 2000. - 145 с.
3. Сергеева Т. Новые информационные технологии и содержание обучения // Информатика и образование.-1991.-№1.

¹*Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск*

²*Белорусский государственный университет, Минск*

ДИНАМИКА НАНОМАШИН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

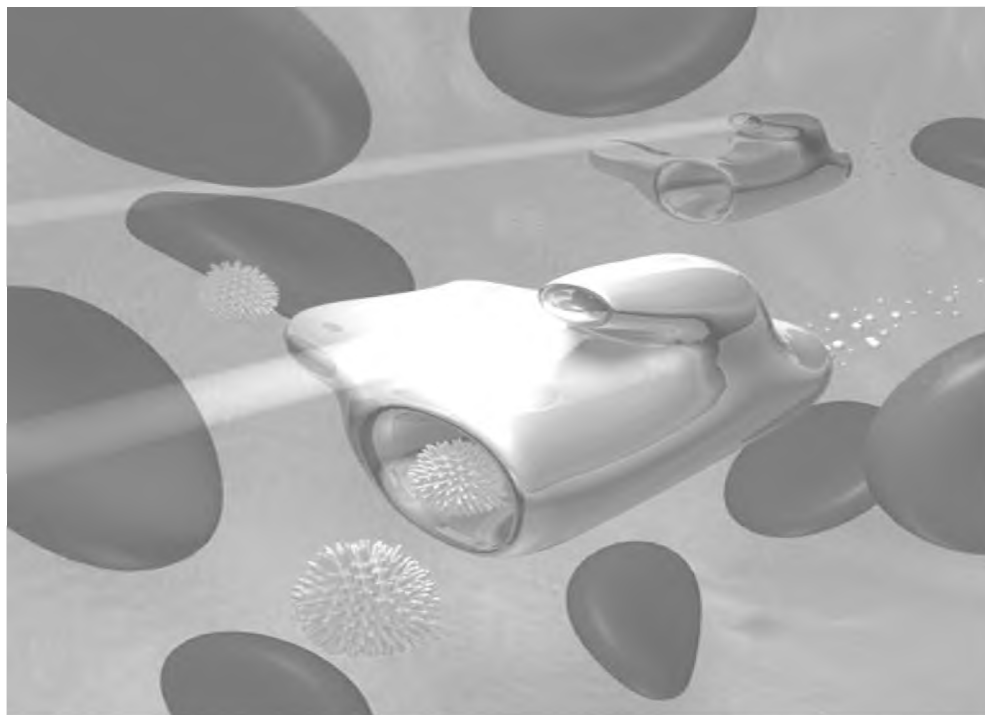
Плескачевский Ю.М.¹, Чигарев А.В.², Василевич Ю.В.²

Проектирование, конструирование и производство наномашин разного назначения из стадии научных проектов переходят в стадию опытно-конструкторских разработок и их физической реализации. Из многочисленных проблем, требующих исследования и решения в этой области рассмотрим вопросы динамики наномашин и ее управляемости в реальных средах, а так же вопросов, связанных с расчетом напряженно-деформированных состояний в таких структурах.

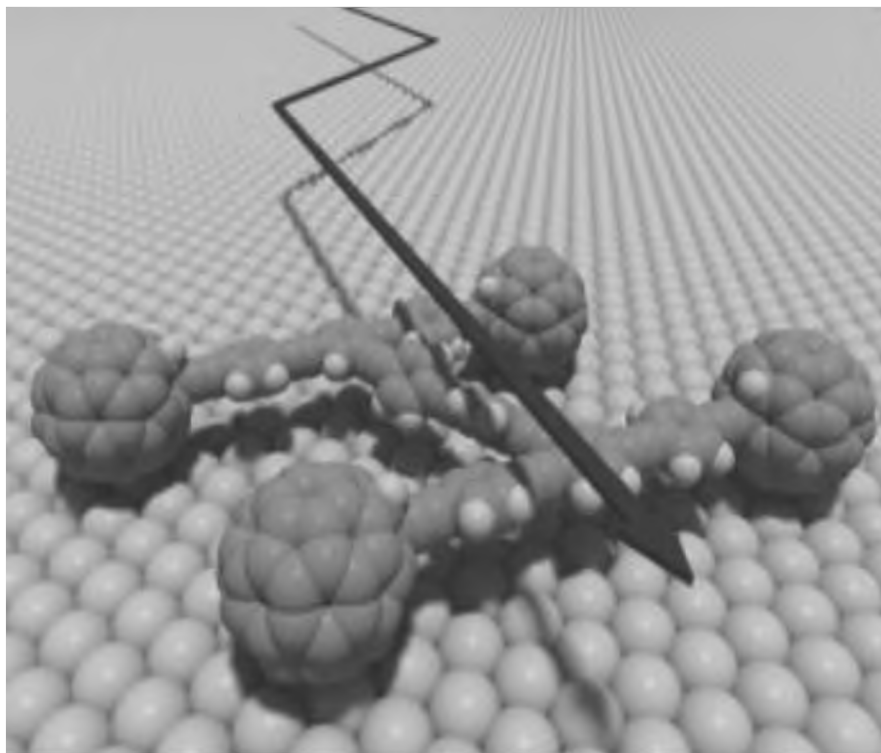
Приведем некоторые данные сравнительного анализа структур из рассматриваемого диапазона

Проекты конструкций наномашин:

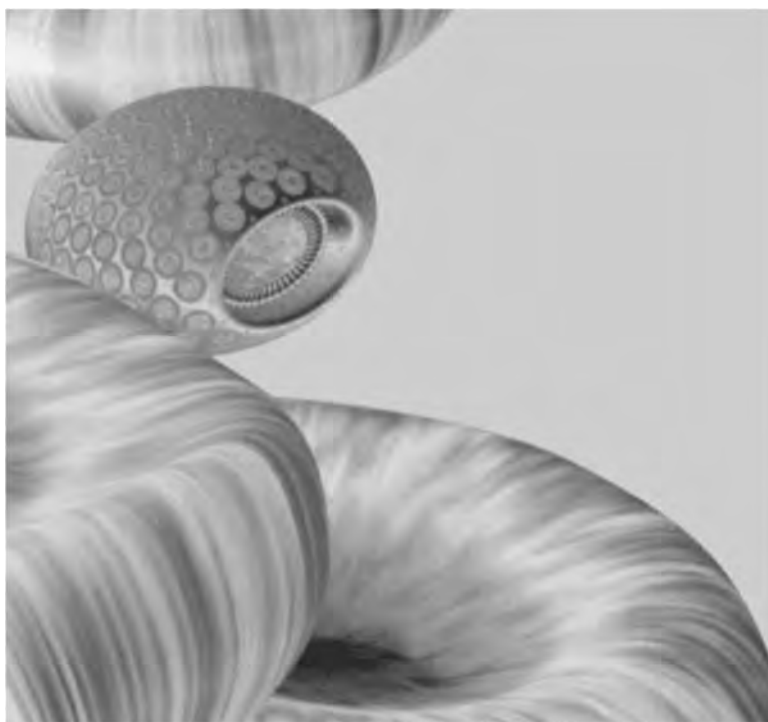
Проекты наномашин Медицинский наноробот:



Наноавтомобиль



*Микрофагоцит по сравнению с эритроцитом
(взято из Наномедицинской Галереи Института Предвиденья),
автор: Forrest Bishop.*



Сравнительный анализ масштабов объектов наномира:

2 nm – диаметр двойной спирали ДНК

20 nm – диаметр бактерии

90 nm – вирус HIV

200 nm – бактерия микоплазма, наименьшая форма клеточной жизни

1–10 μm (=1000 nm) – длина типичной бактерии

80 μm – диаметр человеческого волоса

$d_{\text{эритроцита}} \approx 8$ мкм,

$d_{\text{капилляра}} = 3$ мкм.

В линейном приближении динамика наноструктуры может быть описана системой уравнений вида

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B \bar{u} + \bar{\xi}, \quad (1)$$

где \bar{x} – вектор обобщенных координат центра масс частицы и углов Эйлера размерности $n = 6$, \bar{u} – вектор управляющих воздействий размерности m , $\bar{\xi}(t)$ – случайный процесс, определяющий воздействия со стороны среды на наномашину, A , B матрицы $n \times n$, $n \times m$, элементы которых могут зависеть от t и возможно некоторых $\bar{y}(t)$.

Вследствие малой массы наноструктура обладает малой инерцией. Уравнение (1) можно представить в виде системы уравнений 2го порядка с малым параметром при старшей производной. Вместо уравнений Ньютона-Эйлера целесообразно использовать уравнения Брауна, описывающие брауновское движение.

Устойчивость однородного плоского движения центра масс наноробота при скачкообразных изменениях параметров

Конкретизируем (1) в виде

$$\dot{x} = A(t, y)x + F(t)\frac{d\omega}{dt}, \quad (2)$$

где x смещение от номинальной плоской траектории движения вдоль оси y ($z = 0$).

Пусть $y(t)$ скачкообразный случайный процесс с двумя состояниями y_0, y_1 , причем переход из одного состояния в другое происходит в случайные независимые моменты времени с вероятностями

$$\text{в состояние } y_0 - \beta_0 \Delta t + o(\Delta t) \text{ и в состояние } y_1 - \beta_1 \Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Можно рассмотреть два процесса с матрицами

$$A^{(0)}(t) = A(t, y_0) \text{ и } A^{(1)}(t) = A(t, y_1). \quad (4)$$

Если матрицы (4) удовлетворяют условиям устойчивости или неустойчивости, то процесс $x(t)$ будет устойчивым или неустойчивым.

Процесс $x(t)$ является p -устойчивым, если устойчиво тривиальное решение для p -моментов процесса $x(t)$.

Рассмотрим некоторые случаи когда одна из матриц $A^{(0)}$ или $A^{(1)}$ может быть неустойчивой. Например, пусть $\beta_0 = 0$, $\beta_1 > 0$, тогда для устойчивости этих уравнений нужно, чтобы были устойчивыми матрицы $A^{(0)}$, $A^{(1)} - (\beta_1/p)I$, т.е. матрица $A^{(1)}$ неустойчива, но если вещественные части ее характеристических чисел меньше β_1/p , то имеет место устойчивость. Физически это означает, что если в момент времени t' было принято значение y_0 и далее оно не меняется, то матрица $A^{(0)}$ будет устойчивой. Поэтому если начальное значение было y_1 , а в момент t' принято значение y_0 , но даже при неустойчивой матрице $A^{(1)}$ процесс $x(t)$ не уйдет далеко от заданной траектории. Аналогично можно рассмотреть случай когда $A^{(0)}$ неустойчива, а $A^{(1)}$ устойчива.

Соотношения между числами β_0, β_1 и элементами матриц $A^{(0)}, A^{(1)}$ при которых процесс $x(t)$ будет p -устойчивым можно получить на основе критерия Рауса-

Гурвица. Например, для устойчивости процесса $x(t)$ по первому моменту (математическое ожидание) необходимо, чтобы была устойчива матрица

$$\begin{vmatrix} A^{(0)} - \beta_0 I & \beta_1 I \\ \beta_0 I & A^{(1)} - \beta_1 I \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Пусть процесс движения центра масс наномашин рассматривается в одномерном случае около положения $x \equiv 0$.

$$\dot{x} = a(y)x.$$

а уравнения для математических ожиданий имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{m}_1^{(0)} &= a_0 m_1^{(0)} + \beta_1 m_1^{(1)} - \beta_0 m_1^{(0)}, & a_0 &= a(y_0), \\ \dot{m}_1^{(1)} &= a_1 m_1^{(1)} + \beta_0 m_1^{(0)} - \beta_1 m_1^{(1)}, & a_1 &= a(y_1), \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (5) устойчивы, если

$$a_0 + a_1 < (\beta_0 + \beta_1), \quad a_0 a_1 (\beta_0 a_1 + \beta_1 a_0). \quad (6)$$

На рис. 1 представлена область значений a_0, a_1 . В заштрихованной области система устойчива. Видно, что параметры a_0, a_1 могут принимать положительные значения, т.е. могут быть неустойчивыми.

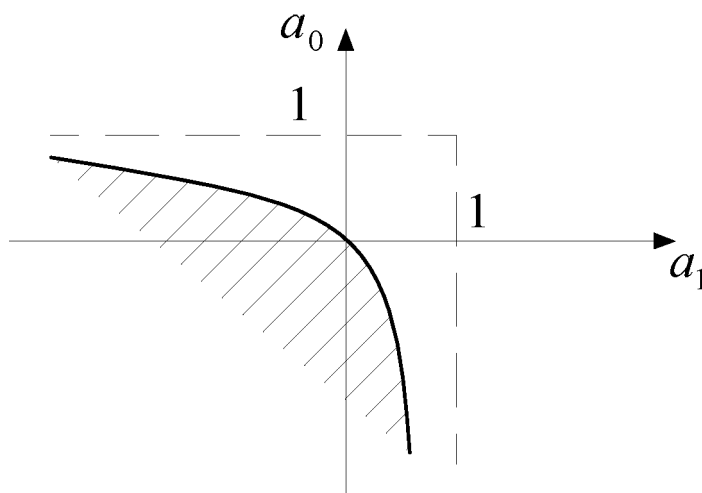


Рис. 1

Оптимальное управление наномашинной может быть программным или иметь обратную связь.

Таким образом, в принципе несмотря на то, что движение наномашин происходит в среде со случайными воздействиями по реальной траектории, которая отличается от заданной, однако целенаправленное движение может быть в среднем осуществлено.

Как следует из вышесказанного наномашинной будут работать в условиях постоянных динамических и статических воздействий, которые будут вызывать изменение их параметров. Поэтому актуальной проблемой наномеханики является вопрос о создании моделей наноструктур, позволяющих получать расчет напряжений, деформаций, (обратимых и необратимых) в таких структурах.

Как известно, реальный мир дискретен и механически поведение структур от микроуровня до макроуровня наиболее точно можно было бы описать на основе методов кристаллической решетки.

Однако объем вычислений в дискретной математической модели твердого тела еще не под силу и современным вычислительным системам поэтому методы контину-

альной механики, основанной на моделях сплошных сред, продолжают оставаться базой для инженерного проектирования, конструирования машин.

После открытия наноструктур, некоторые из которых подобны, известным в механике деформируемого твердого тела: оболочкам (трубки, фуллерены), пластинам (графены), стержни, проволоки, возникли проблемы, связанные с расчетом их физико-механических свойств, (материальная жесткость, плотность, твердость, прочность, пластичность), а также геометрии (формы) и внутренней структуры и т. д.

Дискретность структуры, континуальное приближение

В континуальной механике характерный, представительный объем V содержит n структурных элементов объемом каждый V_0 значительно больше 1

$$n = V/V_0 \gg 1. \quad (7)$$

Неоднородность, анизотропия свойств объема V ужесточает требование (7). Если объем V состоит из кластеров с неоднородными границами (горные породы) компонентов, то обычно требуется, чтобы масштаб неоднородности (средний размер кластера) был значительно меньше диаметра характерного объема. Наноматериалы, применяемые в различных областях должны обладать высокой степенью однородности (примесей не более 1%), что позволяет на первый взгляд измерять их физико-механические характеристики на приборах с меньшей осредняющей базой, однако проведение опытов по растяжению нанообразцов сегодня затруднительно, т.к. сложно получить захваты, надежно удерживающие образец и основным методом является индентирование.

Модельные расчеты показывают, что в наноматериалах сильное влияние на величину, например, упругих модулей оказывает масштабный фактор и напрямую связанная с этим дискретность структуры и возможность континуального приближения.

Как известно, в континуальных моделях неоднородных сред имеет место масштабный эффект, проявляющийся в зависимости средних упругих модулей от масштаба осреднения.

Пример: [8] Пластина, растягивается в направлении оси x силами величиной σ_0 . Неоднородность пластины задана законом

$$\gamma = \gamma(y) = \frac{1-\nu^2}{E(y)}; \quad q = q(y) = \frac{1+\nu}{E(y)}. \quad (7)$$

Случайные статистически однородные функции $\gamma(y)$, $q(y)$ заданы своими моментами

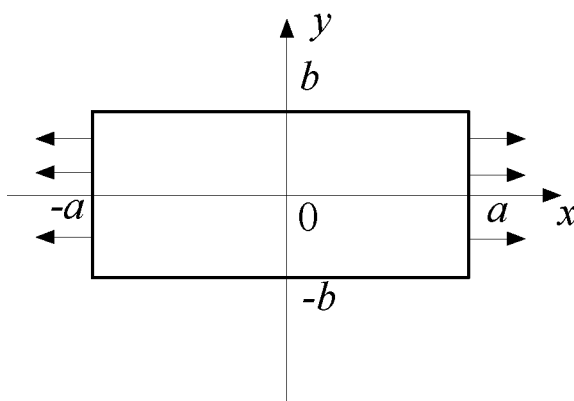


Рис. 1

Зависимость $\langle E_* \rangle / \langle E \rangle$ (кривая 1 при $\delta = 0,3$), E_s / E_σ (кривая 2) пластины показаны на рис. 2

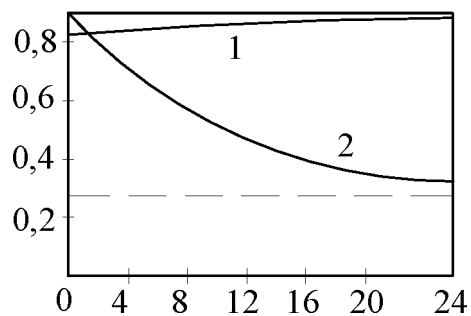


Рис. 2. Растяжение микронеоднородной упругой пластины [8]

Здесь $E_* = \frac{\sigma_0}{e_*}$, $E_s = \sqrt{\langle (E_* - \langle E_* \rangle)^2 \rangle}$, $\delta = E_\sigma / \langle E \rangle$.

Масштабный эффект хорошо выражен для дискретных структур. Показано [6], что в случае растяжения нанослоя

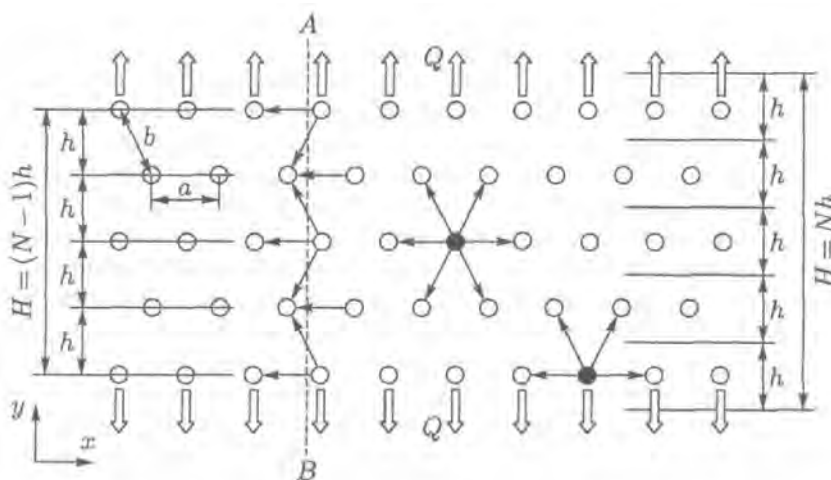


Рис. 3. Растяжение двумерного нанокристалла [6]

Зависимость E_1^{\max} / E_∞ от N числа атомных слоев в направлении растяжения может изменяться практически в два раза рис. 4

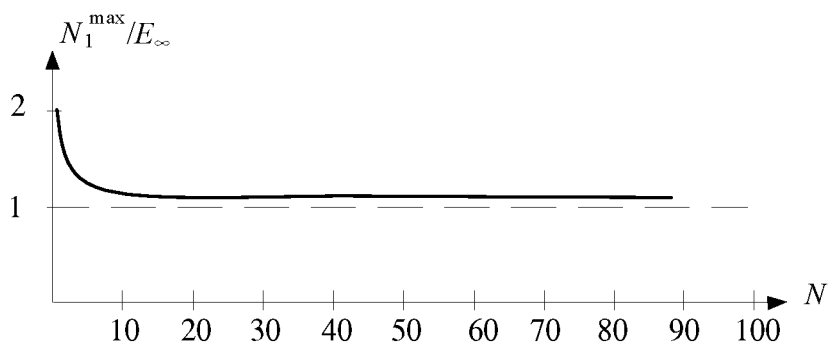


Рис.4

$$E_1 = \frac{N}{N_*} E_\infty, \quad N - 1 \leq N_* \leq N.$$

Поведение упругих модулей в неоднородной среде и дискретной наноструктуре согласно рисунков 3, 4 указывает на наличие краевых эффектов, что требуется учитывать при постановке граничных задач. Так в приближении квазиконтинуума [9] (нелокальная теория упругости) граничные условия ставятся с учетом изменения характера упругих связей в граничной области.

Отметим некоторые механические свойства наноматериалов.

Медь, которая проявляет в макромасштабе свойства материала пластичного, с малой выносливостью, прочностью при достижении зерном размера меньше 20 *nm* демонстрирует пластичность порядка 1GPa. Пластичность мала, а поведение материала близко к хрупкому (~2%). Высокую выносливость и малую пластичность демонстрируют и другие наноматериалы.

Как известно, при механическом размоле материалов, твердость и прочность (выносливость) материалов для обычного масштаба зерна $d > 1 \mu m$, можно описать с помощью эмпирического закона Холла-Петча

$$\sigma = k \langle d \rangle^{-1/2} + \sigma_0$$

где k и σ_0 постоянные, d – размер зерна. При $d < 20 \text{ nm}$ обнаруживаются отклонения от этого закона и даже обратная зависимость.

Растяжение и трещиностойкость наноматериалов зависят от 3^x факторов: дефектов, возникающих в процессах производства (например: пористость, нанотрещины), нестабильность, обусловленная торможением и распространением нанотрещин, пластическая нестабильность при растяжении.

Наличие дефектов связывается со значительным ограничением растяжимости наноматериалов. Для традиционно существующих размеров зерна полезным для сопротивления трещинообразованию является его уменьшение. Для случая наноматериалов граница пластичности сильно вырастает как результат дробления структуры и, в общем, возможно, что она становится более прочной с большим сопротивлением на разрушение. Кроме того, напряжение разрушения может быть меньше с учетом снижения активности дислокации и увеличения пористости границ зерен. Высокая энергия и большое количество таких областей позволяют трещинам относительно легко распространяться вдоль границ или через зерно.

Ползучесть традиционных материалов сильно зависит от размера зерна, а при сверхпластичности удлинения могут достигать 100-1000% при температурах $0,5T_m$.

В области микрометровой одновременно с уменьшением зерна материал становится сверхпластическим при значительно более низкой температуре, растет скорость деформирования. Основным уравнением, описывающим ползучесть и сверхпластичность является уравнение.

$$\dot{\epsilon} = A \frac{D G b}{k_B T} \left(\frac{b}{\langle d \rangle} \right)^s \left(\frac{\sigma}{G} \right)^n$$

где A – постоянная, зависит от механизма ползучести, σ – приложенное напряжение, s – показатель величины зерна, n – показатели деформирования.

Сверхпластичность является частным случаем ползучести при большой скорости деформирования.

Можно было бы предположить, что для малых размеров зерен и низкой температуре T/T_m доминирующим механизмом транспорта массы в наноматериалах является ползучесть. Можно было бы также ожидать явления сверхпластичности при более низкой температуре. Однако оказывается, что скорость ползучести наномате-

риалов такая же как и в области зерен микрометрового размера. Не установлена возможность сверхпластичности при $T < 0,5T_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nanoscale Science and Technology, Editors: Robert W. Kelsall, Mark Geoghegan, 2005. John Willey & Sons Ltd. England. P 469.
2. R. A. Jones. Soft Machines, Oxford University Press, Oxford. 2004.
3. K. E. Drexler. Engines of Creation, Fourth Estate, London, 1990.
4. 4). Morris D.G. Mechanical. Behavior of Nanostructured Materials. Trans. Tech., Szwajcaria, 1998.
5. 5). Перспективные материалы (к 60-летию д.т.н. В.В. Рубашка) авт.: сост.: М.В. Астахов и др., Витебск, изд-во УО «ВГТУ» 2009, 548 с.
6. 6). Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Две причины проявления масштабного фактора при описании механических свойств наноструктур. - Проблемы механики, сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Шилинского, Минск, Физмалит, 2003, с. 485-489.
7. 7). Дудукаленко В.В., Чигарев А.В. О связи масштабного и кривого эффектов в стохастически неоднородных средах, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1969 г., № 4, с. 70-74.
8. 8). Ломалин В.А. Статистические задачи механики деформируемых тел. – Минск, «Наука», 1970 г., 139 с.
9. 9). Кунин И.А. Теория упругости неоднородных сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – Минск, «Наука», 1975 г., 412 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС ЧЕХЛА ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СБОРКИ (ТВС) ЯДЕРНОГО РАКТОРА С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА ANSYS 12

Куликов И.С., Коваль Ю.Г., Томило Е.В.

The definition of the stress-strain condition of a fuel elements assemblies hexagonal shell of a nuclear reactor is presented.

Advantage of the decision of the combined temperature-deformation problem with use of software package ANSYS 12 that has allowed to simplify the solution of problem of stress-strain of the hexagonal shell subjected to non-uniform heating and loaded with external allocated pressure is shown.

Для обеспечения энергетической безопасности в Республике Беларусь планируется строительство атомной электростанции мощностью около 2,4 тыс. МВт. Ввод первого энергоблока запланирован на 2016 год, второго – на 2018-й. Для строительства выбран проект реактора Санкт-Петербургского «Атомэнергопроекта».

При разработке проекта строительства АЭС применяется компьютерная высокопроизводительная техника и современное программное обеспечение, что позволяет ученым решать комплекс задач по научному сопровождению строительства атомной электростанции, в том числе по созданию и внедрению инноваций для повышения ядерной, радиационной и экологической безопасности станции. Возможности пакетов программ можно применять также для разработки методов контроля качества оборудования, совершенствования технологий обращения с радиоактивными отходами, анализа и моделирования процессов использования оборудования АЭС на всех жизненных циклах.

В данной работе рассмотрен вариант расчета чехла тепловыделяющей сборки ядерного реактора нагруженного внешним распределенным давлением и подвергнутого неравномерному нагреву. Размеры чехла: высота 1500 мм, ширина ребра 60 мм, толщина стенки 2 мм. Температура внутри чехла 530°C, по наружной поверхности 500°C.

Чехол ТВС представляет собой шестигранную оболочку с днищем. Расчёт можно проводить, рассматривая отдельно грани и решая задачу для закреплённой по трём кромкам пластины, четвёртая кромка которой свободна (рис. 1). Закрепление осуществлено по кромкам $y=0$ и $x=\pm a/2$, кромка $y=b$ оставлена свободной. Под равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q пластина испытывает прогиб w , эквивалентный результату наложения трёх прогибов [1]:

$$w = w_1 + w_2 + w_3$$

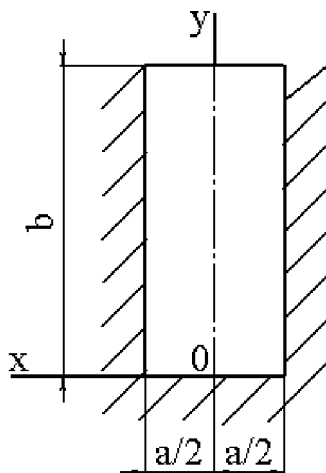


Рис. 1. Пластина, закреплённая по трём кромкам

Первый из них
$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a},$$

Второй
$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_m (-1)^{(m-2)/2} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (1)$$

Третий
$$w_3 = \frac{qa^4}{D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(F_n \gamma_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} - F_n \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b} \right) \sin \frac{n\pi y}{2b} +$$

$$+ \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(G_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + H_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + I_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}.$$

Также учтём:
$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M,$$

где $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D$; $\gamma_n = \frac{n\pi a}{4b}$; F_n, \dots – постоянные, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Поскольку пластина закреплена по трём кромкам ($y=0, x=\pm a/2$), граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} w_3 &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} &= 0; \quad \left(\frac{\delta w_3}{\delta y} \right)_{y=0} = 0; \\ \left(\frac{\delta(w_1 + w_2 + w_3)}{\delta x} \right)_{x=\pm a/2} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Далее рассмотрим температурное воздействие на данную пластину. Рассмотрим изменение температуры по толщине пластины h . Определение нестационарного температурного поля при постоянных теплофизических характеристиках сводится к решению уравнения [2]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\delta T}{\delta t} \quad (3)$$

Решение уравнения должно удовлетворять следующим начальным и граничным условиям:

$$T = T_0 \text{ при } t = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta n} &= -\frac{a_0}{\lambda_T} (T - v_0) \text{ на контуре пластины,} \\ \frac{\delta T}{\delta z} &= -\frac{a_3}{\lambda_T} (T - v_3) \quad z = \frac{h}{2}, \\ \frac{\delta T}{\delta z} &= -\frac{a_4}{\lambda_T} (T - v_4) \quad z = -\frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь T – температура пластины; T_0 – начальная температура пластины; v_0, v_3, v_4 – температуры среды соответственно на контуре пластины и на её поверхностях; a_0, a_3, a_4 – коэффициенты теплоотдачи соответственно на контуре пластины и на её поверхностях; λ_T и a – коэффициенты теплопроводности и температуропро-

водности материала пластины; соответственно n – внешняя нормаль на контуре пластины. Решение уравнения (3) может быть получено численно, например методом конечных разностей.

Приведенный способ расчёта с использованием зависимостей (1)-(4) является крайне громоздким, трудоёмким и сложным в использовании, также практически не позволяет учитывать в расчетах такие факторы, как радиационное распухание и пол-

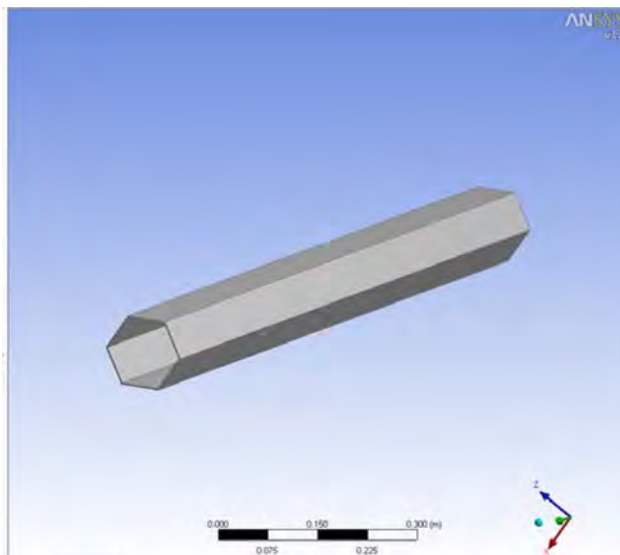


Рис. 2. Твёрдая модель чехла ТВС ядерного реактора

зучесть.

По этой причине был выбран метод конечных элементов, реализованный в программном пакете ANSYS 12. Он позволяет быстро, наглядно и достаточно точно произвести данный расчёт для всего чехла целиком.

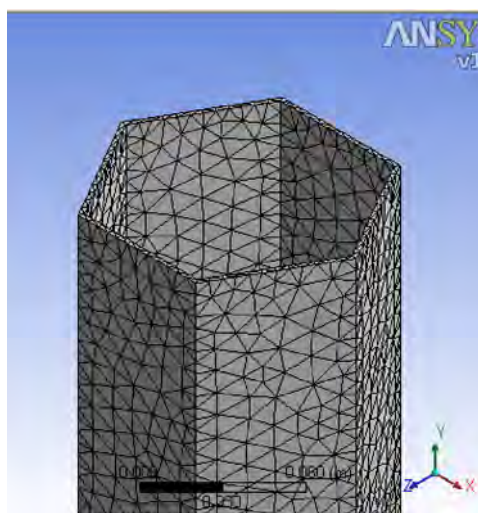


Рис. 3. Сеточная модель чехла ТВС ядерного реактора

В первую очередь следует построение модели в SolidWorks с учётом параметров $a=60$ мм, $b=1500$ мм, $h=2$ мм. За модель чехла взята шестигранная оболочка с днищем. Далее построенная модель импортируется в ANSYS 12 (рис. 2), с последующим заданием свойств материала: нержавеющая сталь с модулем упругости $2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона 0,3. Модель разбивается 462422 элемента, количество узлов 152783 (рис. 3). Непосредственное решение задачи проходит с использованием двух модулей. Steady-State Thermal (ANSYS), где производится расчет неравно-

мерного нагрева чехла. Чехол подвергают нагреву 500°C по внешней поверхности (рис. 4а) и 530°C по внутренней (рис. 4б). Результат неравномерного нагрева импортируется в модуль Static Structural (ANSYS), где производится нагружение модели внешней распределенной нагрузкой 0.8 МПа (рис. 5а) и задаются условия перемещения. Учтена сила тяжести чехла, и налагаются ограничения на перемещения дна вдоль оси y .

Распределение температуры и вызванные этим деформации представлены на рис. 5b и 6а соответственно.

Анализируя полученное решение, можно утверждать, что наибольшие перемещения наблюдаются на вершине чехла, а наибольшие напряжения около граней чехла.

После задания нагрузки, равной 0.8 МПа , на внешней поверхности чехла тепловыделяющей сборки, интенсивность деформаций не сильно изменила свое значение и распределение, однако максимальная интенсивность напряжения увеличилась с 63 МПа (рис. 5b) до 152 МПа (рис. 6).

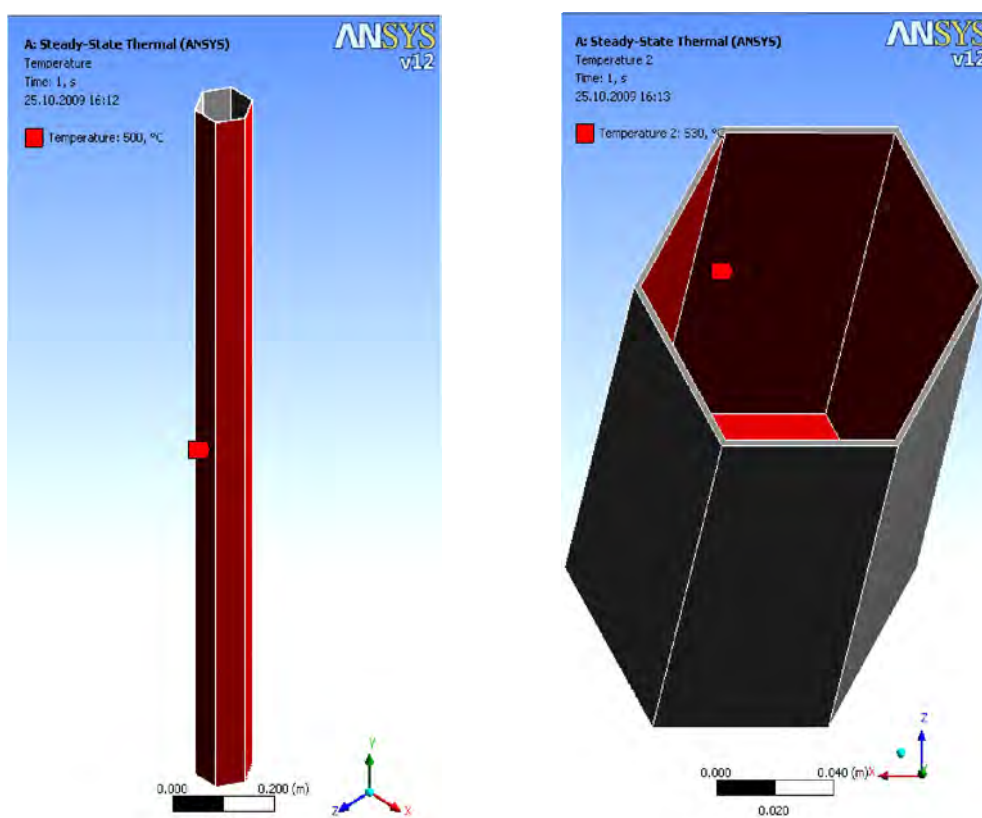


Рис. 4. Температура (а) внутренняя (б) внешняя

Распределение интенсивности напряжений и их максимальное значение представлены на рис. 7. Из этих данных следует, что максимальные значения возникли на внутренних гранях чехла тепловыделяющей сборки.

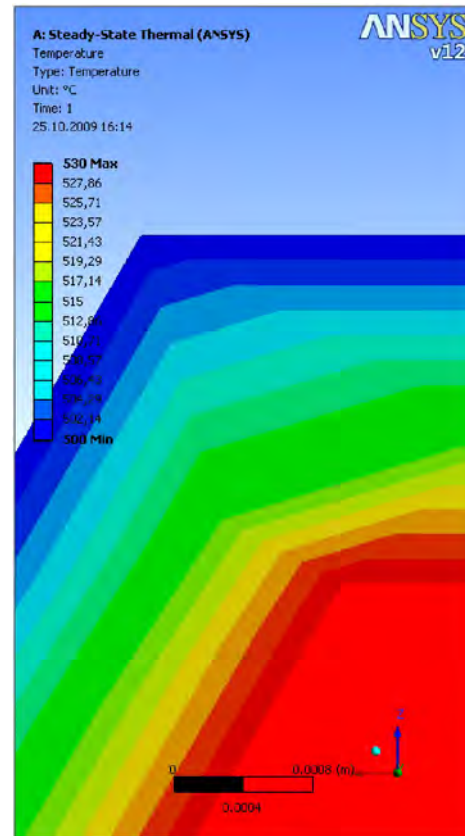
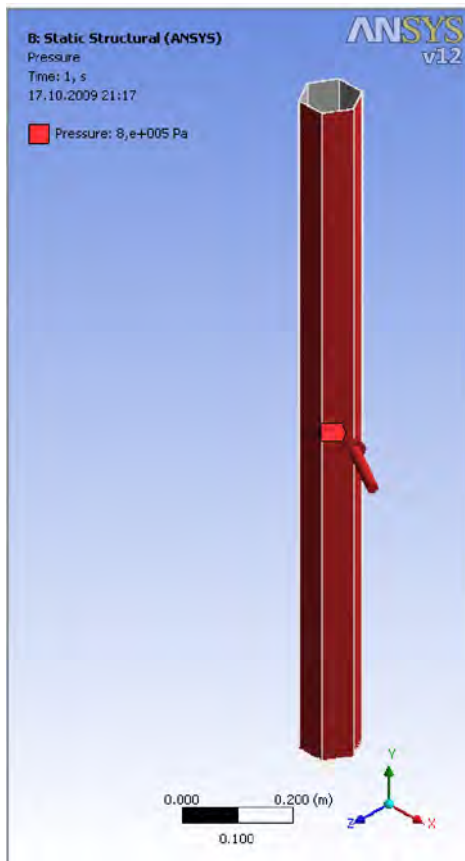


Рис. 5. Нагрузка (а) распределение температуры (b)

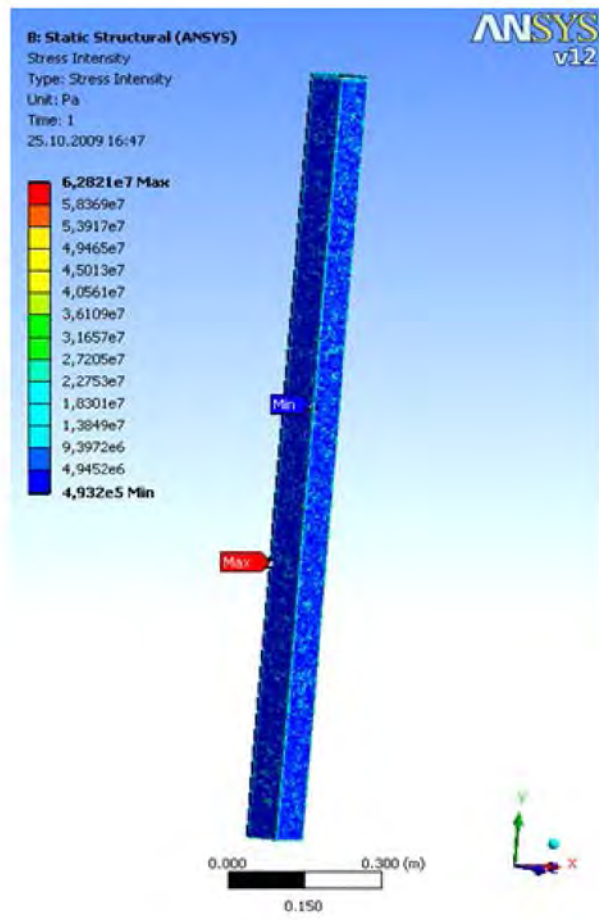
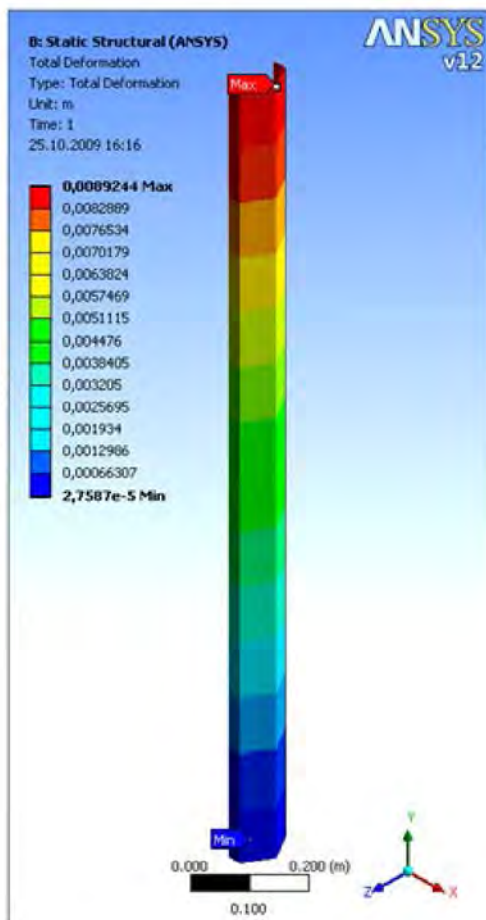


Рис. 6. Распределение интенсивности деформации (а) и напряжений (b) в модели чехла ТВС

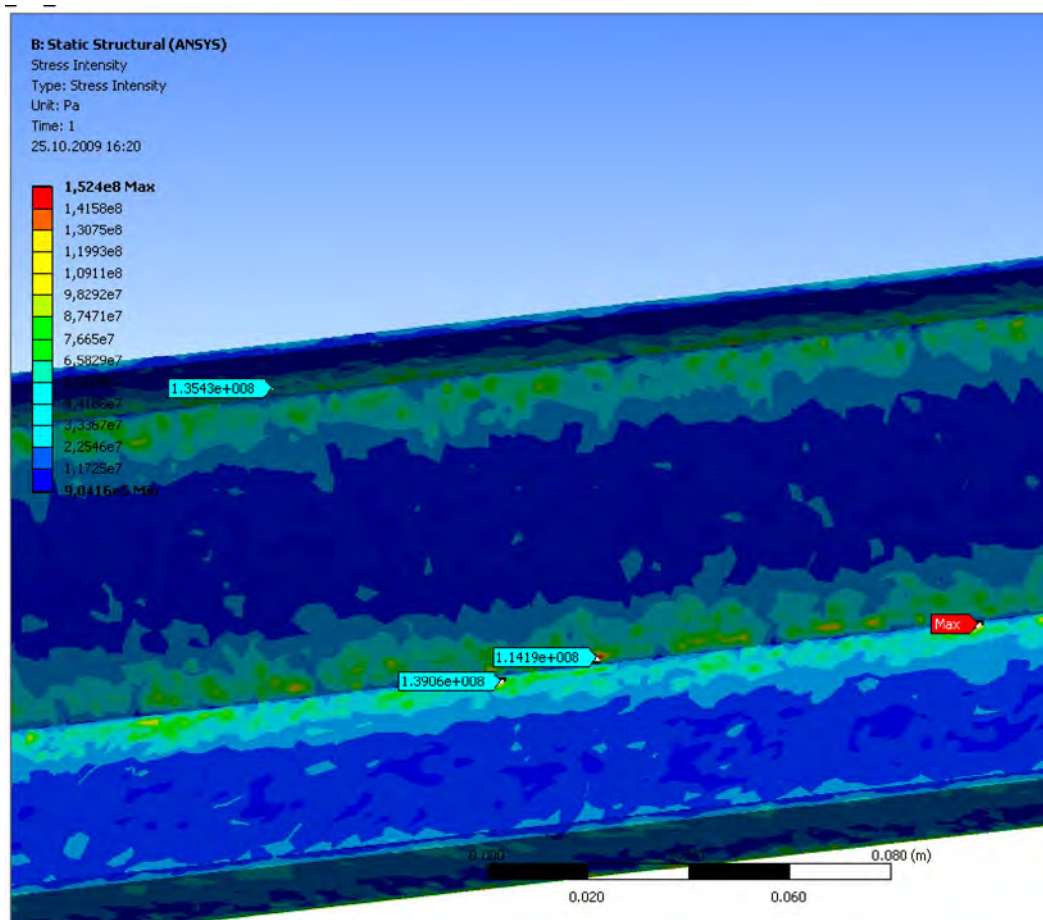


Рис. 7. Распределение интенсивности напряжений

Из рисунка 7 можно также заключить, что при линейном распределении температуры по толщине стенки чехла и избыточном внешнем давлении 0,8 МПа максимальные напряжения достигают величины 152 МПа при пределе тугоучести материала чехла 200 МПа, что можно считать предельным состоянием.

В проведенных расчетах не учитывались такие факторы как радиационная ползучесть, вызванная воздействием быстрых нейтронов с энергией $E > 0,1$ МэВ и радиационное распухание материала чехла (объемное изменение материала под воздействием быстрых нейтронов, зависящее от температуры). В дальнейшем, учитывая длительность работы чехла в условиях ядерного реактора (8000-16000 часов), радиационную ползучесть и радиационное распухание необходимо учесть, адаптировав прорамный комплекс ANSYS 12 для этой цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М: Наука, 1966. – 636 с.
2. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1965. – 204 с.
3. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М: Машиностроение, 2004. – 506 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Е.И.Шемякин	3
Высоцкий М.С., Харитончик С.В. Методы компьютерной механики в проектировании перспективных машин.....	6
Харитончик С.В. Синтез подходов при проектировании кабин грузовых автомобилей.....	19
Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное профилирование армированных дисков с учетом явления ползучести..	29
Немцов В.Б. Статистическая теория вязкости сетчатых полимерных систем.....	34
Михасев Г.И., Квятковская Т.М. Об оценке напряжений в барабанной перепонке.....	39
Журавков М.А., Щербаков С.С. Анализ поврежденности силовой системы с помощью модели деформируемого твердого тела с опасным объемом.....	44
Куликов И.С., Шпургалова М.Ю. Выпучивание неравномерно нагретой сферической оболочки в условиях ползучести и облучения нейтронным потоком.....	50
Сосновский Л.А., Шевченко Д.Н. Функции некоторых типовых распределений случайных величин.....	54
Гмырак А.С., Матулевич А.И., Вихренко В.С. Математическое моделирование динамических характеристик механизма привода лесопильной рамы.....	79
Ботогова М.Г. Локальные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием осевого нагружения.....	85
Колешко В.М., Гулай А.В., Гулай В.А., Ульянов В.Б. Квантовый баллистический наносенсор: генетический алгоритм моделирования и Оптимизации.....	90
Nemtsov V.B., Kamluk A.N., Shirko A.V. Strain fluctuational theory of elastic constants of nematic elastomers.....	99
Локтионов А.В., Соколова А.С. Оценка методов расчета уравнения относительного радиального перемещения тела по вращающемуся диску.....	103
Чигарев В.А., Чигарев Ю.В. Влияние случайной неоднородности материала на устойчивость пластины при малых деформациях.....	107
Савенков В.А. Произвольно ориентированная трещина в анизотропной кусочно-однородной плоскости.....	115
Сунка В.Я., Колешко Л.А. Механические параметры широкополосных ультразвуковых микро-наноактюаторов.	121
Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Проектирование равнопрочных упругих эллипсоидальных оболочек вращения в условиях термосилового нагружения.....	127
Косых Э.Г. Поперечный изгиб тонкостенного стержня с переменной по длине жесткостью.....	138
В.М. Колешко, В.Я. Сунка, Е.В. Крупская Проектирование интеллектуальной сенсорной системы измерения вязкости жидкости в широком диапазоне значений.....	142
Немировский Ю.В., Янковский А.П. Оценка предельных уровней нагружения сложно армированных пологих оболочек в условиях ползучести.....	150

Гавриленко С.Л. Анализ упругопластических свойств асфальтобетона в условиях малоцикловой усталости при изгибе.....	158
Ермоченко С.А. Напряженно-деформированное состояние тимпанальной мембраны с учетом тангенциальных усилий.....	163
Гончарова С.В. Операторный метод решения задачи о распространении волн в термоупругом слое...	169
Белодед Л.В., Юркевич К.С., Босяков С.М. Конечно - элементный анализ напряжений, возникающих в системе «штифт – корень зуба» под действием статической нагрузки.....	171
Авсиевич А.М., Реут Л.Е., Николаев В.А., Адаменко Д.В. Определение напряжений на рабочих поверхностях вращательных пар трения рычажных механизмов.....	175
Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. Кинематический и силовой анализ рычажного механизма с входным поршнем.....	180
Акимов В.А. Приведение операторного метода нахождения коэффициентов разложения функций к общеизвестным интегральным формулам.....	184
Гончарова С.В. Распространение волн в упругом слое.....	187
Гурвич Ю.А. Оптимизация параметров управляемой оси автобусов и автомобилей «МАЗ».....	189
Куликов И.С., Глембоцкий А.В., Левчук А.В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического тепловыделяющего элемента.....	204
Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. О возможности заклинивания в кулачковом механизме с тарельчатым толкателем.....	211
Пронкевич С.А., Орловская А.А., Томило Е.В. Физико-механические свойства тканей человеческого организма при моделировании в программном комплексе ANSYS.....	214
Щербаков С.С. Напряженно-деформированное состояние системы диск-цилиндр в условиях контактного взаимодействия и изгиба цилиндра.....	219
Локтионов А.В., Жерносек С.В., Соколова А.С. Разработка кинематических параметров исполнительных механизмов при переработке текстильных отходов.....	226
Солошенко Д.С., Пронкевич С.А. Зависимость результатов расчета от типа конечных элементов и размера сетки.....	235
Ширвель П.И., Клус С.А., Глембоцкий А.В. Методика оценки прочностных характеристик призматического чехла тепловыделяющей сборки атомного реактора.....	238
Клус С.А., Ширвель П.И., Левчук А.В. НДС тонкостенных цилиндрических оболочек при неравномерном нагреве и нейтронном облучении с учетом тепловой и радиационной ползучести.....	244
Славашевич И. Л., Михасев Г. И. Оценка усилий, действующих на установленный протез типа torp, при тимпаностапедопластике среднего уха.....	252
Гурвич Ю.А., Вареник А.А. Анализ кинематических характеристик одношарнирной и двухшарнирной карданных передач.....	258
Горбач Н.И., Луцевич С.В. Определение рабочей скорости торфоуборочной машины.....	263

Акимов В.А.	
Исследование сходимости функций разложенных в неортогональные и ортогональные ряды операторным методом.....	269
Куриленко А.В.	
Влияние геометрических характеристик эндопротеза на устойчивость и работоспособность системы «кость-имплантант».....	273
Степаненко Д.А., Минченя В.Т., Чигарев А.В.	
Собственные колебания ультразвуковых волноводов для минимально-инвазивной хирургии.....	276
Пронкевич С.А., Коваль Ю.Г.	
Моделирование отклонения лепестка клапана сердца в ANSYS.....	282
Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П.	
Расчет величины зоны и запаса устойчивого скольжения ползуна прессы в направляющих.....	287
Испеньков С.А., Ракицкий А.А.	
Моделирование динамического поведения карьерных самосвалов особо большой грузоподъемности в среде ANSYS.....	295
Dainiak I.V., Arebi M.A., Alekhnovich G.N.	
Computer simulation of 6-dof parallel mechanism.....	301
Гурвич Ю.А.	
Семейство новых прикладных критериев колебательной устойчивости-неустойчивости движения.....	306
Радаев С.Ю., Тихонов С.В., Чекмарев Г.Е.	
Интенсивная технология изучения курса «теоретическая механика» с использованием автоматизированной обучающей системы.....	309
Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гапанюк Д.В.	
Использование функциональных представлений Mathcad в задачах динамики по курсу ТММ.....	312
Босяков С.М., Царева А.А., Скляр О.Н.	
Разработка функций пользователя для решения задач теоретической механики.....	317
Русан С.І.	
Вивучэнне раўнавагі механічных сістэм са слізгальнымі замацоўкамі на падставе прынцыпа магчымых перамяшчэнняў.....	320
Анципорович П.П., Кудин В.В., Кудин М.В.	
Современный взгляд на терминологию в курсе теории механизмов и машин.....	330
Акунец В. П., Ивашин Э. Я.	
Концепция маркетинга образовательных услуг.....	332
Анципорович П.П., Алейникова О.И., Войтович О.Н., Луцко Н.Я.	
Обучение использованию windows-приложений для решения технических задач.....	334
Баранова А.С.	
Роль информационных технологий в творческой самореализации личности на современном этапе.....	339
Плескачевский Ю.М., Чигарев А.В., Василевич Ю.В.	
Динамика наномашин в неоднородных средах.....	343
Куликов И.С., Коваль Ю.Г., Томило Е.В.	
Определение НДС чехла тепловыделяющей сборки (ТВС) ядерного реактора с помощью программного пакета ANSYS 12.....	351
Содержание.....	351