

ОБ ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БАРАБАННОЙ ПЕРЕПОНКЕ

Михасев Г.И., Квятковская Т.М.

The problem on calculation of the strain-stress state of the human tympanic membrane is considered. The tympanic membrane is assumed to be an elastic isotropic shallow conical shell that is conjoined with the malleus along the asymptotic line. The semi-moment equations of the thin shell theory are assumed as governing for the tympanic membrane. The boundary conditions at the shell edges as well as along the malleus are derived.

Для правильного понимания функционирования среднего уха, как механической колебательной системы, представляется важной задача об исследовании каждого составляющего элемента данной системы. Главным звеном в среднем ухе является барабанная перепонка (иначе, тимпанальная мембрана), которая, принимая внешний звуковой сигнал, приводит в движение цепь слуховых косточек. Динамические характеристики барабанной перепонки сильно зависят от степени ее натяжения, вызванного действием барабанной мышцы «*musculus tensor tympani*».

Целью настоящей работы является построение математической модели системы «барабанная перепонка – молоточек» с целью оценки напряжений в перепонке при заданном перемещении молоточка (рис.1).

Форма барабанной перепонки близка к конической, втянутой внутрь с углом конусности близким к $\pi/2$. По своим геометрическим и механическим характеристикам барабанная перепонка делится на две части – *pars flaccida* (мембрана Шрапнеля) и *pars tensa* (рис. 1). Натяжение перепонки является неравномерным: нижняя ее часть *pars tensa* натянута, в то время как верхняя *pars flaccida* ненатянута. Х. Вульштейн [1] считает, что *pars flaccida* не следует рассматривать как часть трансформатора звука. В свою очередь натяжение *pars tensa* также является неравномерным, что обусловлено направлением действия барабанной мышцы, вызывающей перемещение рукоятки молоточка.

Живая ткань *pars tensa* барабанной перепонки имеет сложную структуру и состоит из четырех слоев, из которых, в частности, два внутренних слоя представляют собой радиальные и нерадиальные волокна.

Для построения модели введем ряд упрощающих предположений:

- 1) Барабанная перепонка есть тонкая пологая круговая усеченная коническая оболочка с радиусом R в основании конуса и углом конусности γ , близким к $\pi/2$ (см. рис. 2 и 3).

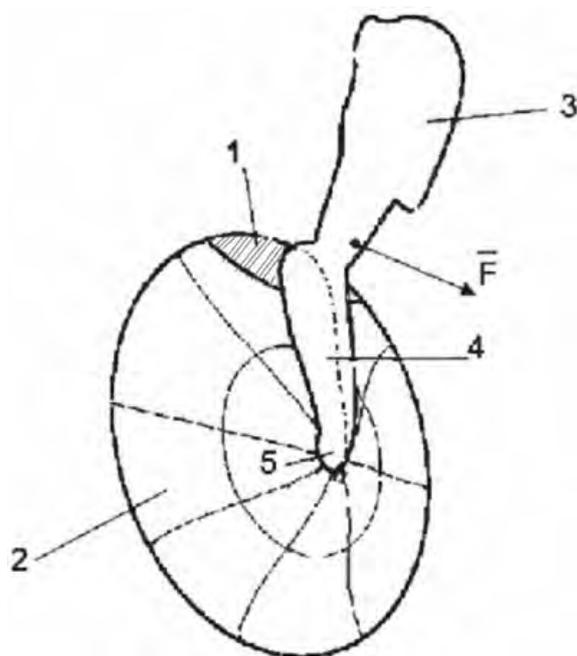


Рис.1 Система «барабанная перепонка - молоточек»: 1- *pars flaccida*; 2- *pars tensa*; 3-молоточек; 4-рукоятка молоточка «*malleus manubrium*»; 5 – *umbo*. F -сила, моделирующая действие барабанной мышцы.

- 2) Следуя работам [2, 3], считаем, что часть pars tensa обладают свойством изотропии с усредненным модулем упругости $E = 3.3 \times 10^7 \text{ Н/м}^2$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.4$.

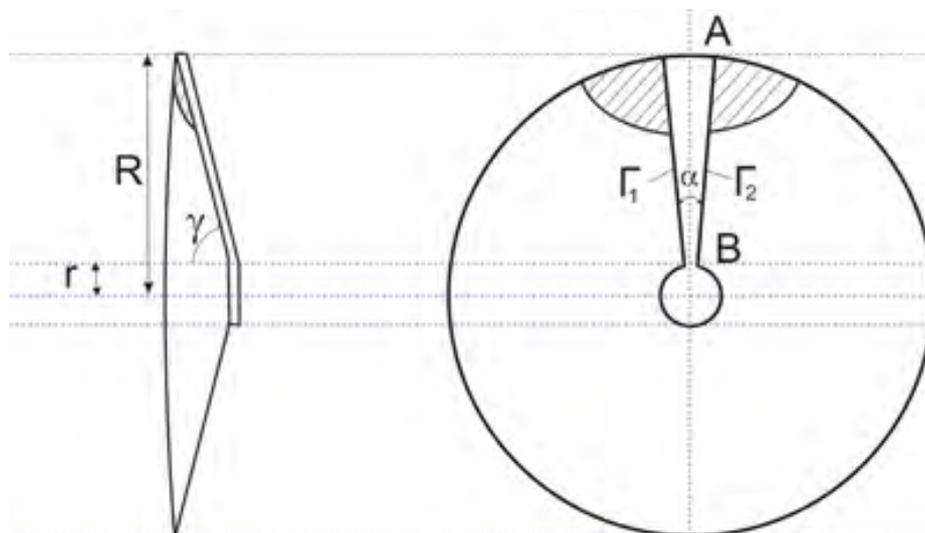


Рис.2. Поперечное сечение, а также вид сверху моделируемой системы «барабанная перепонка - молоточек»

- 3) Рукоятку молоточка рассматриваем как недеформируемый стержень переменного сечения, жестко сопряженный с конической поверхностью оболочки по асимптотическим линиям; нижнюю часть рукоятки в области Umbo заменяем на недеформируемое цилиндрическое твердое тело с радиусом r в основании, которое жестко связано со стержнем и поверхностью конуса (см. рис. 2).

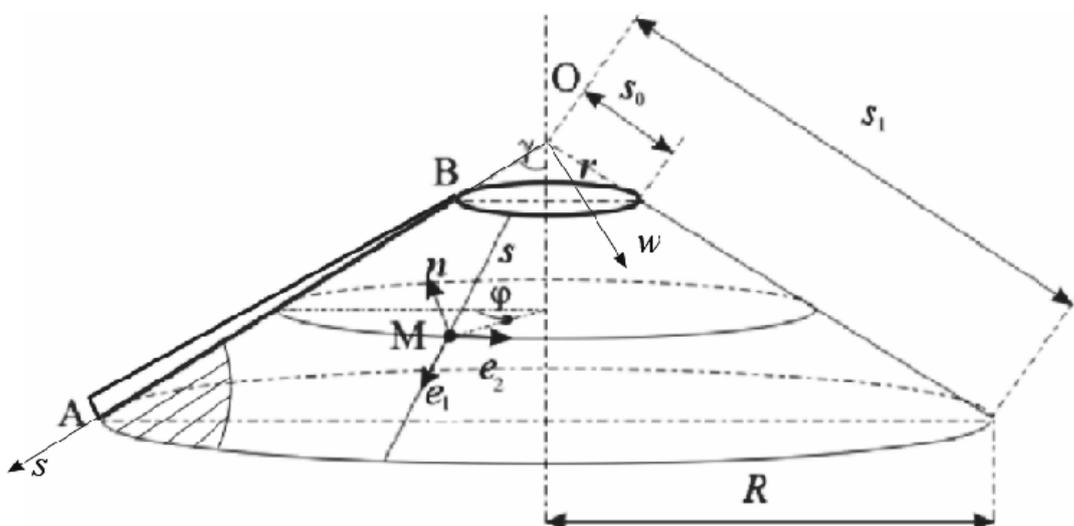


Рис. 3. Геометрическая модель барабанной перепонки в виде пологой конической оболочки

- 4) Действие барабанной мышцы заменяется силой, которая обуславливает перемещение молоточка.
 5) На нижнем крае конуса (т.е. на тимпанальном кольце) части pars tensa рассматриваем условия жесткого или упругого защемления оболочки [2].

б) Учитывая отсутствие сил натяжения в части *pars flaccida* и принимая во внимание относительную подвижность молоточка в его основании, будем считать, что нижний край конической оболочки части *pars flaccida* является свободным.

Последнее предположение является важным в предлагаемой модели, ибо оно учитывает возможность перемещения молоточка как абсолютно твердого тела под действием барабанной мышцы.

Введем на срединной поверхности конической оболочки криволинейную систему координат s, φ , где s – расстояние, отсчитываемое от вершины конуса до точки M , а φ – окружная координата, как показано на рис. 3. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$ – орты введенной криволинейной системы, где \bar{n} – внешняя нормаль к поверхности конуса. Под действием силы, приложенной к молоточку, его рукоятка совершает некоторое перемещение. Пусть в принятой системе координат нормальная составляющая перемещения средней линии AB стержня (т.е. проекция перемещения на направление нормали \bar{n}) равна

$$w_{AB} = ks + d, \quad (1)$$

где k и d – некоторые константы. Данное перемещение, а также разность внешнего атмосферного давления и давления в полости среднего уха ($q^* \approx 20$ Па), вызовут деформирование упругой оболочки, моделирующей барабанную перепонку. Изучим напряженное состояние оболочки, которое будет смешанным и состоять из мембранных и изгибных усилий, имеющих один порядок. Для его описания может быть использована система уравнений технической теории тонких оболочек [4]:

$$\begin{aligned} -D\Delta^2 w + [k/(Rs) + \kappa_2]T_2 + \kappa_1 T_1 + 2\tau S + q^* &= 0, \\ (Eh)^{-1} \Delta^2 \Phi + k(Rs)^{-1} \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 - \tau^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, который в принятой криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta w = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial w}{\partial s} \right). \quad (3)$$

В (2) введены следующие обозначения: $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость оболочки, h – ее толщина, ν – коэффициент Пуассона, w, κ_i, τ – нормальный прогиб, изгибные деформации и кручение срединной поверхности оболочки соответственно, Φ – функция напряжений, связанная с мембранными усилиями T_1, T_2, S соотношениями

$$T_1 = \frac{1}{R^2 s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2 s} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad T_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}, \quad S = -\frac{1}{R^2 s} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right). \quad (4)$$

Дополним уравнения (2), (4) соотношениями упругости [5]

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_2 = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad H = (1-\nu) D \tau \end{aligned} \quad (5)$$

где M_i, H – изгибающие и крутящий моменты, а $\varepsilon_{ij} (i, j = 1, 2)$ – тангенциальные деформации срединной поверхности. В свою очередь, изгибные и тангенциальные деформации $\kappa_i, \varepsilon_{ij}$, а также кручение τ выражаются через нормальное и тангенциальные перемещения w и $u_i (i = 1, 2)$ по формулам:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Rs} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2 s} u_1 - \frac{w}{R_2},$$

$$\varepsilon_{12} = \omega + \gamma_1 \gamma_2, \quad \omega = \frac{s}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_2}{s} \right) + \frac{1}{R s} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{R s} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

Здесь ω - угол сдвига в касательной плоскости, а γ_1, γ_2 - углы поворота нормали \mathbf{n} вокруг ортов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 соответственно.

Уравнения (2), (4) - (6) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных перемещений w, u_1, u_2 . Дополним ее граничными условиями на краях $s = s_0, s = s_1$, а также на образующих $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$, соответствующих асимптотическим линиям Γ_1 и Γ_2 (см. рис.2 и 3).

На нижнем крае рассмотрим условия жесткой заделки

$$u_1 = u_2 = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1. \quad (7)$$

Перемещение (1) молоточка приведет к перемещению верхнего края оболочки, а также точек, лежащих на линиях Γ_i . Отсюда, получаем

$$\begin{aligned} u_1|_{s=s_0} &= -\frac{y_0}{\sqrt{1+\mu^2}} \cos \varphi - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} z_0 - \frac{s_0}{2(1+\mu^2)} + \\ &+ \frac{s_0 \cos \varphi (\cos \varphi - \sqrt{1+k^2} \sin \varphi - k\mu)}{\sqrt{1+k^2} (1+\mu^2)}, \\ u_2|_{s=s_0} &= y_0 \sin \varphi + \frac{s_0 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right), \\ w|_{s=s_0} &= \frac{z_0}{\sqrt{1+\mu^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} y_0 \cos \varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{1+\mu^2} + \frac{s_0 (k + \mu \cos \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{1+k^2} (1+\mu^2)}, \\ \frac{\partial w}{\partial s}|_{s=s_0} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \right) \cos \varphi, \\ u_1|_{\Gamma_1} = -u_1|_{\Gamma_2} &= (s_1 - s) \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{tg} A \equiv F_1, \\ u_2|_{\Gamma_1} = u_2|_{\Gamma_2} &= (s_1 - s) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right) \equiv F_2, \\ w|_{\Gamma_1} = u_3|_{\Gamma_2} &= \sqrt{\left[2(s_1 - s) \sin \frac{\beta}{2} \right]^2 - F_1^2 - F_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{B}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{C}{\operatorname{tg} \varphi} + B \right)^2}}, \\ B &= 2s_1 \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\beta}{2} + \gamma \right), \quad C = s_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \mu = \operatorname{ctg} \gamma. \end{aligned}$$

Краевая задача (7), (8) для системы уравнений (2), (4)-(6) является достаточно сложной и может быть решена численно, либо с использованием метода возмущений после введения дополнительных предположений. В качестве одного из таких предположений может быть принята близость угла конусности γ к $\pi/2$, то есть ма-

лость параметра μ . Заметим, что при $\mu \rightarrow 0$ данная задача вырождается в более простую задачу о расчете НДС круглой пластинки, сопряженной со стержнем. Будет также считать, что перемещение молоточка под действием силы F является малым. Тогда нелинейные компоненты в соотношениях (6) для деформаций могут быть отброшены и поставленная задача решена в рамках линейной теории тонких оболочек. Искомое НДС оболочки, моделирующей барабанную перепонку, может быть представлено в виде суммы основного НДС, характеризуемого мембранными усилиями, простых краевых эффектов вблизи краев $s = s_i$ и обобщенного краевого эффекта в окрестности молоточка (асимптотических линий Γ_i на поверхности конуса). Дальнейшие исследования будут связаны с асимптотическим построением всех перечисленных составляющих НДС барабанной перепонки, которые впоследствии будут учтены при исследовании колебаний тимпанальной мембраны и всех составляющих элементов среднего уха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вульштейн, Х. Слухоулучшающие операции. – М: Медицина, 1972.- 423.
2. *Wada, H.* Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otolaryngology (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
3. Koike T. Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (Rosowski, J. J., Merchant, S. N. eds). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309-320.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы.–М.: Наука. Физматлит, 1995.–320 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек.- Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.