

## АНАЛИЗ ПОВРЕЖДЕННОСТИ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОПАСНЫМ ОБЪЕМОМ

Журавков М.А., Щербаков С.С.

*Assessment of damage of active systems using the model of deformable rigid body with dangerous volume is considered. Definition of limiting criterion for determination of various dangerous volumes is presented. Formation of dangerous volumes under the contact of two deformable rigid bodies is studied.*

### Введение

Исследование поврежденности при взаимодействии элементов силовой системы в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1,2]. В рамках данной модели опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения достигают повреждающего уровня – нижней границы рассеивания предела выносливости.

Процедура расчета опасных объемов предполагает знание трехмерного напряженно-деформированного состояния элементов силовой системы, вызванного как локальным контактным так и объемным нагружением, а также предельного состояния данной системы

В силовой системе – в отличии, например, от изгибаемого вала – все шесть независимых компонент тензора напряжений являются ненулевыми. В общем случае предельное состояние (образование микротрещин) в некоторой точке силовой системы может быть обусловлено несколькими различными компонентами. Таким образом, предел выносливости для силовой системы определяется по каждой компоненте тензора напряжений как экстремальное значение ее распределения при действии предельной нагрузки [3 – 5].

### Предельные тензор механического параметра и дельная потенциальная энергия деформации

В рамках трибофатики развивается [2] комплексный подход к определению предельного состояния силовых систем. Так, состояние силовой системы в некоторой точке может оцениваться как предельное при достижении (в том числе одновременном) некоторыми компонентами тензора напряжений или деформаций, а также предельной удельной потенциальной энергии деформации, своих предельных значений.

Рассмотрим тензор механического параметра  $\varphi_{ij}$ , конкретизациями которого являются тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . В общем случае при действии на силовую систему предельной нагрузки  $F_{*lim}$  (обуславливающей, в общем случае, трехмерное НДС) для деформируемого твердого тела определим предельные значения для каждой независимой компоненты тензора  $\varphi_{ij}^{(\pm*lim)}$ ,  $i, j = x, y, z$ , каждого главного компонента  $\varphi_i^{(\pm*lim)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  и интенсивности  $\varphi_{int}^{(*lim)}$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})} &= \text{extr}_{dV} [\varphi_{ij}(F_{*\text{lim}}, dV)], \\
\varphi_i^{(\pm*\text{lim})} &= \text{extr}_{dV} [\varphi_i(F_{*\text{lim}}, dV)], \\
\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} [\varphi_{\text{int}}(F_{*\text{lim}}, dV)]
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\text{extr}(y) = \begin{cases} \max(y), & \text{при } y \geq 0, \\ \min(y), & \text{при } y < 0, \end{cases}$

Аналогично для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения  $\varphi_n^{(*\text{lim})}$  и  $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$  тензора  $\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})}$ , а также предельное главное значение тензора  $\varphi_1^{(*\text{lim})}$  и предельную интенсивность  $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i} \left( \left| \varphi_{ii}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\
\varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i,j} \left( \left| \varphi_{ij}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\
\varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left( \left| \varphi_1(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $dV$  – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор  $\varphi_{ij}$  в каждом элементарном объеме  $dV$  тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа тензора относительных повреждающих напряжений [2,3,6,7]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$g_{ij} = \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \quad g_i = \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \quad g_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, \tag{3}$$

где  $g_{ij}$ ,  $g_i$ ,  $g_{\text{int}}$ , вообще говоря, имеют вероятностную природу, поскольку в условиях прочности как действующие напряжения  $\varphi_{ij}$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{\text{int}}$ , так и предельные значения  $\varphi_k^{(*\text{lim})}$ ,  $\varphi_i^{(*\text{lim})}$ ,  $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$  являются случайными величинами с соответствующими плотностями распределения.

Тензор  $g_{ij}$  разложим на шаровую  $g^S$  и девиаторную  $g_{ij}^D$  части

$$g^S = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}^D) = (g_{ij}) - g^S = \begin{pmatrix} g_{11} - g & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - g & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - g \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где  $g = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3\sigma_k^{(*\text{lim})}} = \frac{1}{3}(g_{11} + g_{22} + g_{33})$ .

Рассмотрим также характеристику поврежденности основанную на удельной потенциальной энергии деформации

$$U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

которая в случае упругого деформирования имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \tag{6}$$

Для которой можно выделить две части отрывную и сдвиговую

$$U_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{ii} \varepsilon_{ii}, \quad U_{\tau} = \frac{1}{2} (1 - \delta_{ij}) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Введем по аналогии с тензором  $\varphi_{ij}$  и  $g_{ij}$  следующие характеристики

$$U^{(*\text{lim})} = \max_{dV} [U(F_{*\text{lim}}, dV)] \quad (8)$$

$$U_k^{(*\text{lim})} = \max_{dV} [U_k(F_{*\text{lim}}, dV)], \quad k = \sigma, \tau,$$

$$g^U = U / U^{(*\text{lim})}, \quad (9)$$

$$g_k^U = U_k / U_k^{(*\text{lim})}, \quad k = \sigma, \tau,$$

Величины  $g^U$ ,  $g_k^U$ , являются интегральной энергетической характеристикой повреждения твердого тела в элементарной объеме.

### Опасные объемы в силовой системе

Критериальные условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (1)–(9) будут иметь вид

$$V_{ij} = \{dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad i, j = x, y, z, \quad m = \begin{cases} n, & \text{при } i = j, \\ \tau, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (10)$$

$$V_i = \{dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$V_{\text{int}} = \{dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\} \quad (12)$$

$$V_U = \{dV / U \geq U^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad (13)$$

$$V_{U_m} = \{dV / U_m \geq U_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k\}, \quad m = \sigma, \tau \quad (14)$$

$$V_{U_{\text{eff}}} = \{dV / U_{\Sigma}^{\text{eff}} \geq U_0, dV \subset V_k\}. \quad (15)$$

Поскольку применительно в силовой системе может исследоваться процесс ее повреждения при контактной усталости, то в выражениях (10)–(15) рабочий объем  $V_k$  представляет собой не весь объем деформируемого твердого тела, а лишь объем предельно допустимого износа [1, 2].

Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную и сложную форму, то их аналитическое определение, согласно формулам (10)–(15), может быть затруднено; в таких случаях их вычисляют методом Монте-Карло.

Графическая иллюстрация компонентных опасных объемов  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$ ,  $V_{zz}$ , их пересечений (совмещенных опасных объемов)  $V_{xx} \cap V_{yy}$ ,  $V_{yy} \cap V_{zz}$ ,  $V_{xx} \cap V_{zz}$ ,  $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$  и объединения  $V_{xx} \cup V_{yy} \cup V_{zz}$  (тензорного опасного объема) представлена на рис. 1. Там же показан тензор  $g_{ij}(dV)$  относительных повреждающих напряжений в соответствии с представлением (10). Видно, что при равновеликом значении компонент тензора  $g_{ij}(dV)$  наиболее опасной зоной, где ожидается зарождение разрушения, является пересечение трех компонентных объемов  $V_{xx} \cap V_{yy} \cap V_{zz}$ . В этой зоне тензор  $g_{ij}(dV)$  имеет вид:

В зонах трех компонентных объемов ( $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$ ,  $V_{zz}$ ) разрушение скорее начнется там, где тензор  $g_{ij}(dV)$  является наибольшим по величине. Вообще, рисунки типа рис. 1 позволяют проанализировать многообразные возможные особенности прогнозируемого повреждения. Они обнаруживаются, например, в зонах

пересечения (наложения) опасных объемов, обусловленных либо только нормальными, либо только касательными напряжениями, либо одновременным воздействием нормальных и касательных напряжений разных знаков. Таким образом, появляется возможность конкретного анализа роли процессов отрыва и сдвига в формировании комплексного повреждения.

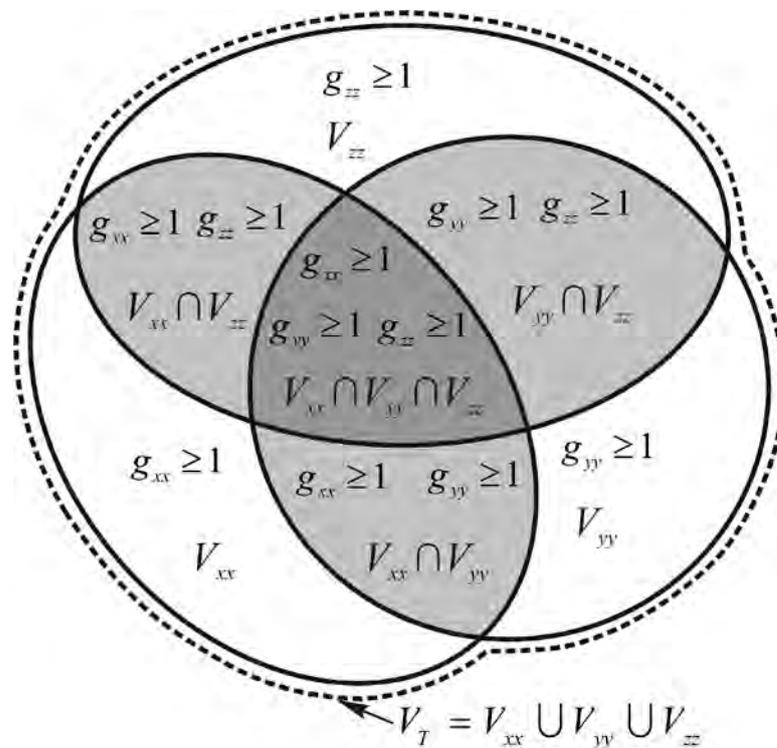


Рис. 1. Схема объединения (пунктирная линия) и пересечений (затемнено) опасных объемов, обусловленных нормальными напряжениями

### Результаты расчетов

Рассмотрим формирование опасных объемов в условиях контактного взаимодействия в соответствии с (10). Определение опасных объемов выполним при следующих исходных данных:  $\sigma_n^{(*\text{lim})} = 0,3p_0$ ,  $\sigma_\tau^{(*\text{lim})} = 0,09p_0$ ,  $f = 0,05$ ,  $b/a = 0,813$  ( $a$  и  $b$  – большая и меньшая полуоси эллипса контакта соответственно). Результаты вычислений представлены на рис. 2. Из данного рисунка видно, что наибольшими по величине являются опасные объемы  $V_{zz}$ ,  $V_{xz}$  и  $V_{yz}$ , соответствующие наибольшим напряжениям  $\sigma_{zz}^{(n)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(n)}$  и  $\sigma_{yz}^{(n)}$ . Отметим, что, несмотря на небольшое значение коэффициента трения  $f$ , действие распределенных касательных усилий  $q(x, y)$  приводит к изменению форм и величин опасных объемов, обусловленных действием нормальных усилий  $p(x, y)$ . Особенно заметна асимметрия объема  $V_{xz}$  (см. рис. 2) относительно плоскости  $x = 0$ .

Поскольку опасные объемы являются мерой поврежденности деформируемых тел, то, анализируя рис. 2, можно указать конкретные области (зоны), в которых возможно зарождение и развитие как поверхностных, так и внутренних трещин. Очевидно, что действие необратимых повреждений реализуется там, где соответствующие опасные объемы пересекаются (т. е. накладываются друг на друга) или совмещаются друг с другом. Условия взаимодействия опасных объемов (и,

следовательно, повреждений в них) так же многообразны (см. рис. 2), как и условия нагруженности силовых систем.

Анализ рис. 2 позволяет сделать следующие два принципиальных заключения. С одной стороны, процесс повреждаемости в общем случае является рассеянным, т. е. первичные трещины могут появиться в любой точке опасного объема. С другой стороны, процесс повреждаемости оказывается дискретным в том смысле, что существуют локальные области, в которых появление первичных трещин представляется наиболее вероятным (например, в совмещенных опасных объемах – пересечениях компонентных опасных объемов). По данному рисунку можно сделать более глубокий анализ повреждаемости как следствия возникновения, развития и взаимодействия опасных объемов.

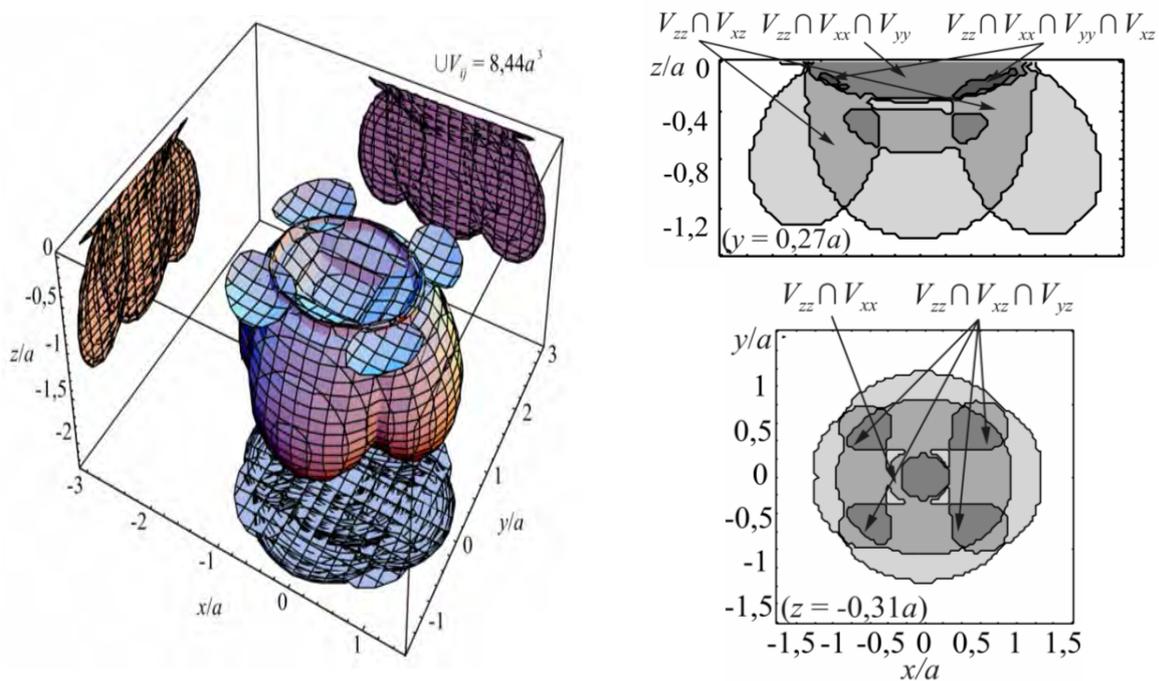


Рис. 2. Объединение опасных объемов и его сечения

По результатам численного расчета для  $R_{11} = 0,005$  м,  $R_{12} = 0,05$  м,  $R_{21} = 0,005$  м,  $R_{12} = 0,01$  м,  $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$  Па построен график, представленный на рис. 3, из которого видно, что величина тензорного опасного объема  $\cup_{i,j} V_{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$  возрастает с увеличением контактной нагрузки.

$$V_T, 10^{-14} \text{ м}^3 = \cup_{i,j} V_{ij}, \quad i, j = x, y, z$$

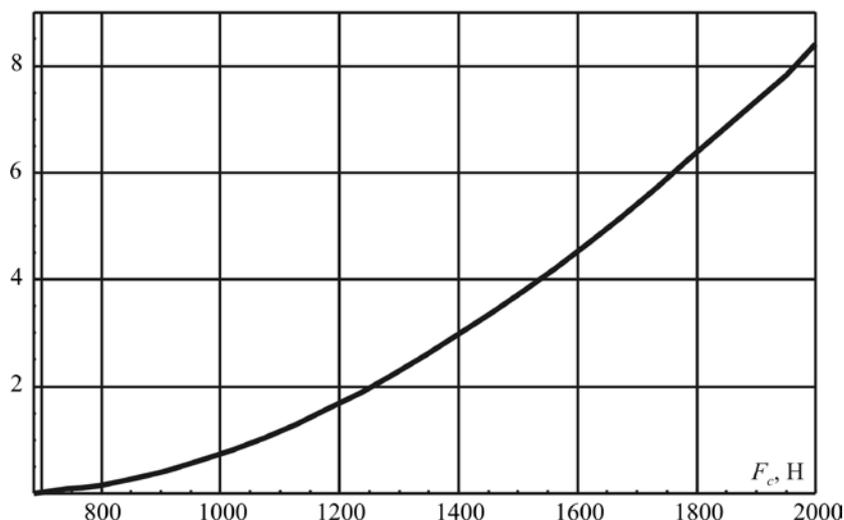


Рис. 3. Изменение величины тензорного опасного объема в зависимости от контактной нагрузки

В технических приложениях для анализа поврежденности обусловленной сложным трехмерным напряженным состоянием при контактном взаимодействии удобно использовать октаэдрический опасный объем  $V_{\text{int}}$  в качестве интегральной характеристики поврежденности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л.А. Основы трибофатиги / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т. 1. – 246 с.; – Т. 2. – 234 с.]
2. Sosnovskiy, L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics)/ L.A. Sosnovskiy. – Springer, 2004. – P. 424.
3. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с
4. Сосновский, Л.А. Уравнения подобия усталостного разрушения деталей с опасным объемом и их экспериментальная проверка: Сообщения I и II / Л.А. Сосновский // Проблема прочности. – 1977. – № 4. – С. 40–80.
5. Сосновский, Л.А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Минск: Наука и техника, 1987. – 288 с.
6. Журавков, М.А. Расчет опасных объемов при контактном нагружении. / М. А. Журавков, С.С. Щербаков // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. – № 1. – С. 117–122.
7. Журавков, М.А. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы ролик / кольцо / М.А. Журавков, С.С. Щербаков // тр. V Междунар. симпозиума по трибофатиге (ISTF 2005), Иркутск, Россия, 3–7 октября 2005 г. / Иркут. гос. ун-т; отв. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т путей сообщения, 2005. – Т. 1. – С. 375–390.