Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ФУНКЦИИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Сосновский Л.А., Шевченко Д.Н.

Is carried out the analysis of mine of information about the typical distributions. Criteria are produced, according to which are proposed to using the variants of the distribution functions of the most been used typical of continuous random variables.

Введение

В практике инженерных и научных исследований, при анализе закономерностей технологических и экономических процессов некоторые их количественные показатели формально описывают случайными величинами (наработка до отказа, время выполнения технологической операции, ошибки измерений и другие). Исчерпывающей характеристикой случайных величин является закон распределения, информация о котором позволяет прогнозировать возможные значения случайной величины, определять её числовые характеристики.

Отыскание закона распределения случайной величины на практике состоит в подборе одного из существующих типовых законов распределения, которое наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. С целью выбора наиболее адекватной модели распределения случайной величины следует оперировать большим количеством типовых законов распределения вероятностей, каковых в настоящее время известно более ста.

Распределения случайных величин ξ и η называются однотипными, если существуют постоянные a и $b \neq 0$ такие, что распределения вероятностей величин ξ и $b(\eta + a)$ совпадают [6]. Однако в литературе и нормативных документах по теории вероятностей и ее приложениям (математической статистике, теории надежности, метрологии, связи и др.) отсутствует унификация многих типовых распределений случайных величин. В различных источниках однотипные распределения могут отличаться параметрами, их количеством и даже видом функции распределения. Это зачастую приводит к разночтениям, нестыковкам и, как следствие, ошибкам и дополнительным временным затратам на изучение, анализ и применение информации. Вредит данная ситуация и учебному процессу, требуя от студентов дополнительной усидчивости, а от преподавателя – дополнительных пояснений. Особенно актуальна данная проблема при использовании компьютерных пакетов математического моделирования и статистического анализа данных. Реализованные в них варианты типовых распределений случайных величин зачастую невозможно редактировать, что ограничивает применение некоторого программного обеспечения.

Целью данной работы является:

1) анализ источников информации (литературы, нормативных документов и программного обеспечения) с целью поиска вариантов функций типовых распределений случайных величин;

2) выработка критериев, в соответствии с которыми среди множества вариантов функций некоторого типового распределения будет выбран один;

3) рекомендация к использованию в учебно-методической и научной работе выбранных вариантов функций типовых распределений случайных величин.

Анализ информации. Критерии ранжирования источников информации

Все источники информации, используемые для анализа вариантов функций типовых распределений случайных величин, можно разделить на несколько групп: специальная и справочная литература по теории вероятностей и математической статистике; справочная литература по математике и математическим методам; литература по теории надежности, теории связи и другим наукам, широко использующим распределения случайных величин; пакеты компьютерной математики; пакеты статистического анализа данных. Всего было изучено 45 источников информации.

Изучив и обобщив информацию о типовых распределениях случайных величин, можно прийти к следующим выводам о причинах разнообразия вариантов функций распределения:

1) наибольшее разнообразие характерно для распределений, широко используемых в теории надежности (Вейбулла, логнормального, гамма и др.). Причина такого разнообразия состоит, видимо, в наличии физического смысла некоторых параметров распределений. Поэтому они могут отличаться от параметров, принятых в литературе по теории вероятностей;

2) в англоязычных источниках информации (пакетах компьютерной математики и статистического анализа данных) типовые распределения достаточно унифицированы в сравнении с литературными источниками на русском языке. При этом тенденции к унификации распределений в новых изданиях на русском языке не наблюдается.

Очевидно, что решение о выборе некоторого варианта функции распределения из множества не может приниматься простым большинством голосов. Здесь следует учитывать, по крайней мере, два факта:

1) степень распространенности (популярности) источника информации;

2) невозможность изменения встроенных функций типовых распределений в компьютерных пакетах анализа данных и моделирования.

Поэтому, для выбора единого варианта функции распределения из множества, предлагаются следующие критерии, ранжированные по значимости:

1) реализация данного варианта функции в пакетах статистического анализа данных и моделирования, используемых в учебном процессе [41, 43];

2) в распространенных пакетах статистического анализа данных [42, 44–46];

3) в распространенных пакетах компьютерной математики [37–40];

4) в специальной и справочной литературе по распределениям случайных величин [5, 6, 11, 14, 16–18, 20, 21, 25, 29, 31, 33, 35, 36];

5) в литературе, используемой в учебном процессе [28, 30];

6) в большинстве других литературных источников.

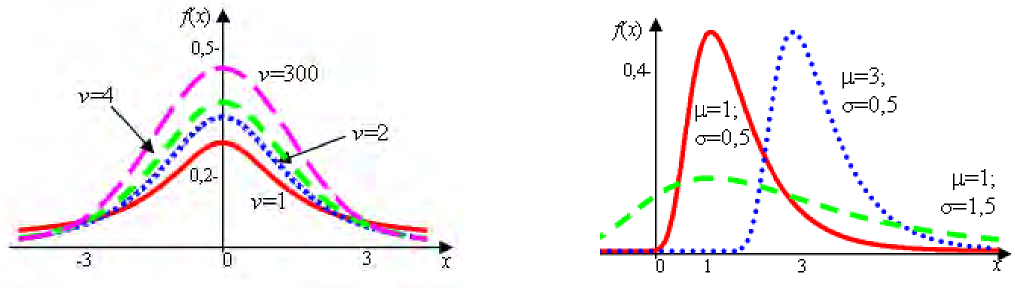
В соответствии с предложенными критериями, представим рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений, классифицированные по области возможных значений (таблицы 1–4).

Таблица 1

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывныхслучайных величин, областью значений которых является вся числовая ось

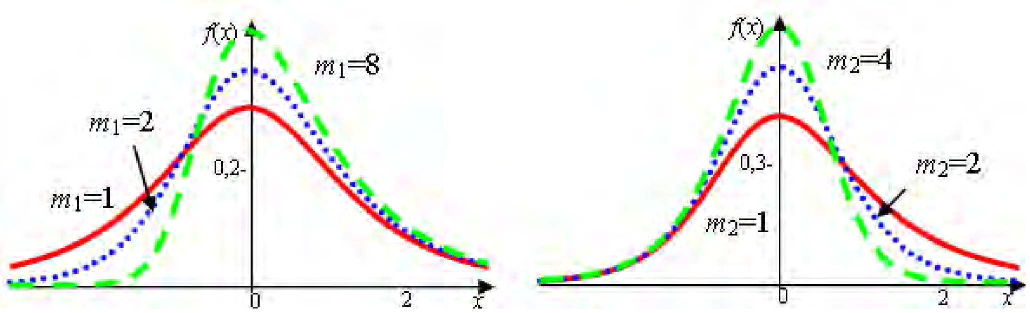
Распределение	**Функция плотности распределения**	**Параметры**	**Источники с аналогичной функцией распределения**	
			и параметрами	**но другими именами параметров**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
t-Стьюдента (рис. 1, *а*)	$f(x)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$	ν – число степеней свободы	14, 15, 24, 28, 31	6, 18, 30, 32
Z-Фишера (рис. 2)	$f(x)=\dfrac{2m_1^{\frac{m1}{2}}m_2^{\frac{m2}{2}}\,\Gamma\left(\dfrac{m_1+m_2}{2}\right)\exp(-m_1\,x)}{\Gamma\left(\dfrac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m_2}{2}\right)\left(m_1\,e^{2x}+m_2\right)^{\frac{m1+m2}{2}}}.$	m_1, m_2 – степени свободы	6	14, 15
Гумбеля (экстремальных, максимальных значений, тип I, рис. 3)	$f(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}-\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right).$	α – мода; β – масштаб	43	30, 31, 37, 44–46
Гумбеля (экстремальных, минимальных значений, тип I, рис. 4)	$f(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}-\exp\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right).$	α – мода; β – масштаб	6, 43	4, 30, 44–46
Двойное экспоненциальное (экстремальных значений, тип I, рис. 5)	$f(x)=\alpha\beta\exp(-\alpha x-\beta\exp(-\alpha x)).$	α – масштаб; β – форма		8
Джонсона несвязанное (рис. 6)	$f(x)=\dfrac{\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left[\alpha_1+\alpha_2\ln\left(\dfrac{x-\gamma}{\beta}+\sqrt{\left(\dfrac{x-\gamma}{\beta}\right)^2+1}\right)\right]^2\right)}{\alpha_2^{-1}\sqrt{(x-\gamma)^2+\beta^2}\,\sqrt{2\pi}}.$	α_1, α_2 – форма; γ – положение; β – масштаб	13	
Коши (рис. 7, *а*)	$f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}.$	μ – медиана; λ – масштаб	6, 43	18, 28, 30, 32, 33, 37, 38, 44–46
Лапласа (двустороннее экспоненциальное, рис. 7,	$f(x)=\dfrac{\alpha}{2}\exp\left(-\alpha\lvert x-\beta\rvert\right).$	α – масштаб; β – положение	6, 33, 43	41

б)				
Логистическ ое (рис. 8)	$$f(x)=\frac{\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\beta}\right)}{\beta\left(1+\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\beta}\right)\right)^{2}}.$$	β – масштаб; λ – положение	41	37–39, 43–46
Мойяла (рис. 1, *б*)	$$f(x)=\frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{2\,\sigma}-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}.$$	μ – положение; σ – масштаб	37	
Нормальное (рис. 9)	$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^{2}}{2\,\sigma^{2}}\right).$$	μ – положение; σ – форма	12, 14, 15, 24, 31, 32	5, 6, 8, 26, 27, 30
Экспоненци альное степенное (рис. 10)	$$f(x)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right)}{\phi\cdot 2^{\left(\frac{1+\beta}{2}+1\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}+1\right)}$$	μ – медиана, ϕ – масштаб, β – форма	43	37



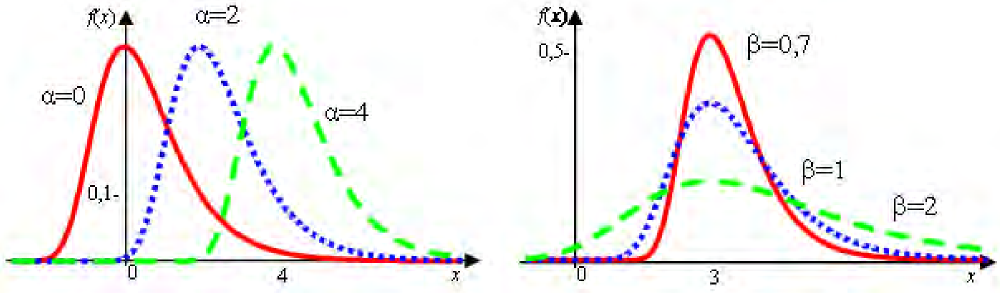
а) *б)*

Рис. 1. Графики функции плотности: а) t-распределения Стьюдента; б) распределения Мойяла с различными значениями параметров



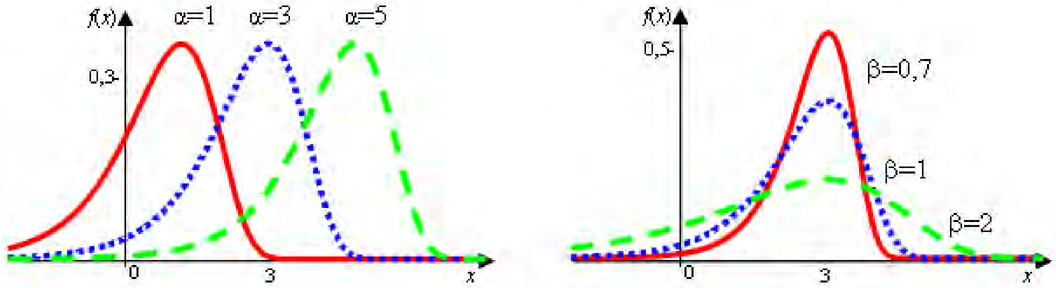
а) *б)*

Рис. 2. Графики Z-распределения Фишера с различными значениями параметров: а) $m_2=1$*; б)* $m_1=1$



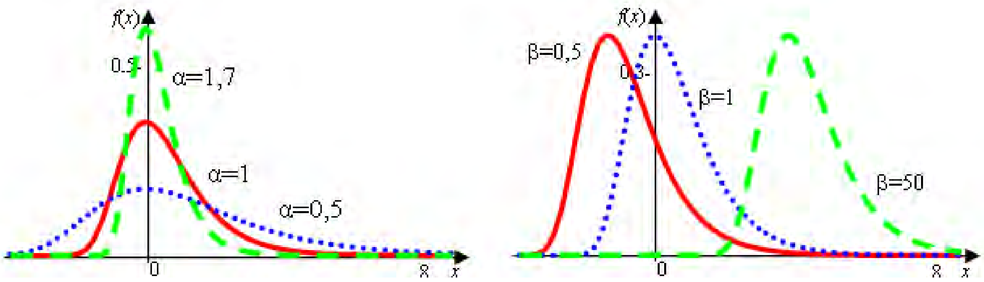
а) *б)*

Рис. 3. Распределение Гумбеля (максимальных значений): а) β=1; б) α = 3



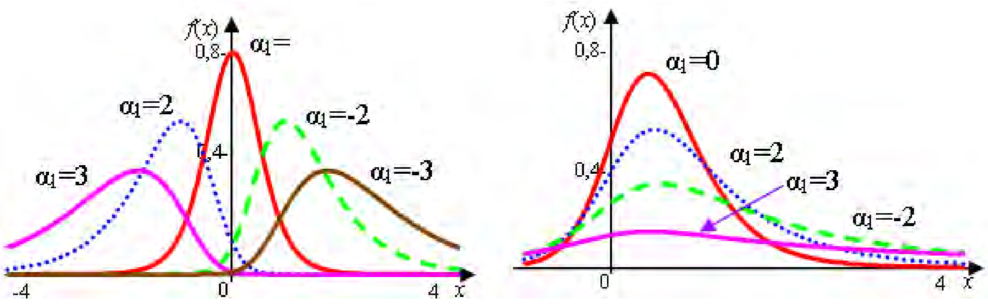
а) *б)*

Рис. 4. Распределение Гумбеля (минимальных значений): а) β=1; б) α = 3



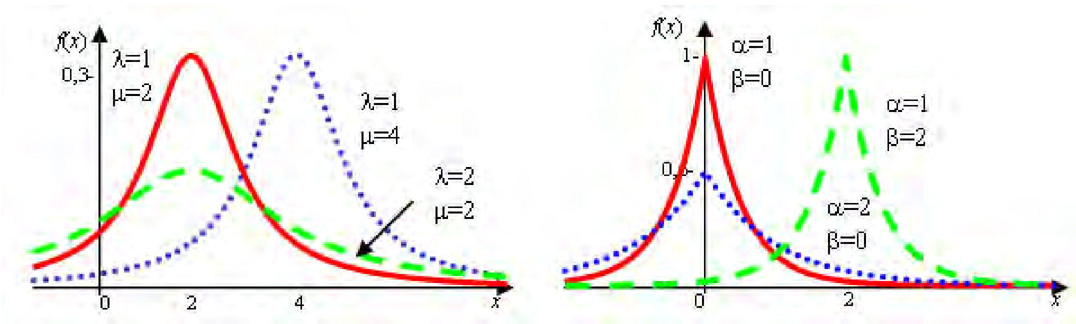
а) *б)*

Рис. 5. Двойное экспоненциальное распределение: а) β=1; б) α=3



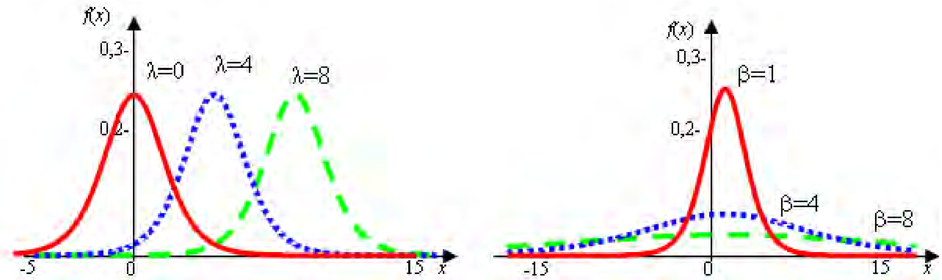
а) *б)*

Рис. 6. Несвязанное распределение Джонсона: а) γ=0, β=1, α_2=2; б) γ=0, β=1, α_1=–1



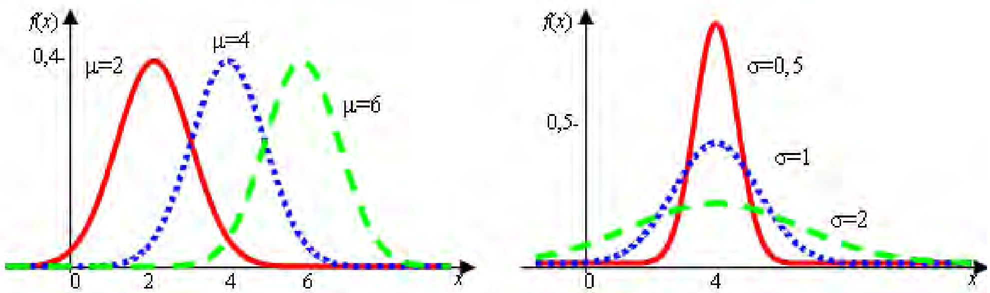
а) б)

Рис. 7. Распределение а) Коши; б) Лапласа для различных значений параметров



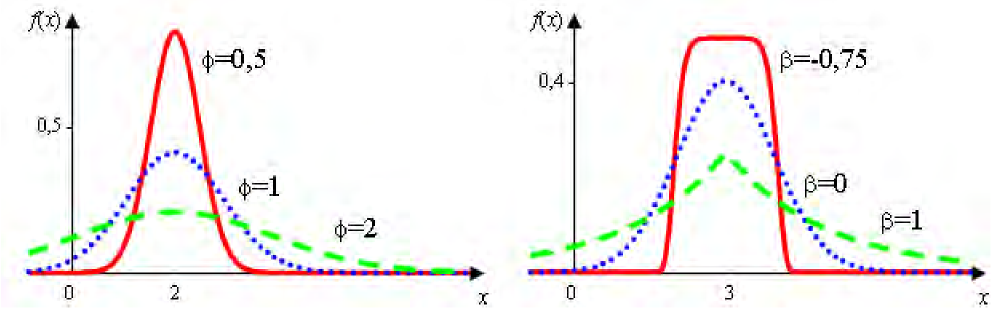
а) б)

Рис. 8. Логистическое распределение с различными значениями параметров: а) β=1; б) λ=1



а) б)

Рис. 9. Нормальное распределение с различными значениями параметров: а) σ=1; б) μ=1



а) б)

Рис. 10. Экспоненциальное степенное распределение: а) μ=2, β=0; б) μ=3, ϕ=1

Таблица 2

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывных случайных величин, областью значений которых является числовая полуось

Распределение	**Функция плотности распределения**	**Параметры**	**Источники с аналогичной функцией распределения**	
			и параметрами	**но другими именами параметров**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
α (альфа, рис. 11)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c\cdot\beta}{t^2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\alpha t-\beta)^2}{2\,t^2}\right), & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ $\tilde{n}=\left(\dfrac{1}{2}+\Phi(\alpha)\right)^{-1}.$	α – форма, β – масштаб	9	3
Γ (гамма, рис. 11)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб	13, 26, 40, 41	31, 44–46
χ (хи, рис. 13, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right), & x>0;\\ 0, & x\le 0\,.\end{cases}$	n – число степеней свободы	6, 38	
χ^2 (хи-квадрат, рис. 13, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(x)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0\,.\end{cases}$	ν – число степеней свободы	7, 24, 28, 31, 43–46	5, 6, 8, 13-17, 30, 39, 40
F-Фишера-Снедекора (рис. 14, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	ν_1, ν_2 – число степеней свободы	5, 6, 14, 15, 24, 28, 31, 39, 40, 43	8, 32, 44–46
T^2-Хотеллинга (рис. 15)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n+1}{-2}}}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)n^{\frac{k}{2}}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0\,;\end{cases}$	n, k – число степеней свободы	6	

Берра (рис. 16)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\,\beta\,x^{\alpha-1}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{\beta+1}}, \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	α – форма, β – масштаб	6	
Бирнбаума-Саундерса (рис. 17)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{\theta}}+\sqrt{\dfrac{\theta}{x}}}{2\beta x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{x}{\theta}}-\sqrt{\dfrac{\theta}{x}}\right)^2}{2\,\beta^2}\right), \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	β – форма; θ – масштаб	43	
Вальда (инверсное Гаусса, рис. 18)	$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2\,\pi x^3}}\exp\left(-\dfrac{\lambda(x-\mu)^2}{2\,\mu^2\,x}\right), \; x\ge 0;\\ 0, \qquad x<0.\end{cases}$$	μ – масштаб; λ – форма	37	31
Вейбулла-Гнеденко (экстремальных значений, тип III, рис. 19)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\,e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}, \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	α – форма; β – масштаб	1, 11, 13, 16, 26, 34, 40, 41, 43	8, 30, 36, 44–46
Гиперэкспоненциальное (рис. 20)	$$f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\lambda_k\exp(-\lambda_k x), \; x\ge 0;\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$$	α_i – форма; λ_i – масштаб	18	
Инверсное Вейбулла (рис. 21)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{-\beta}\,\beta}{(x-\lambda)^{\beta+1}}\exp\left(\dfrac{-1}{(\alpha(x-\lambda))^{\beta}}\right), \; x\ge\lambda;\\ 0, \qquad x<\lambda.\end{cases}$$	α – форма; β – масштаб; λ сдвиг	41	
Лог-логистическое (вариант [43], рис. 22)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp(z)}{\beta x(1+z)^2}, \; x>0;\\ 0, \quad x\le 0;\end{cases} \quad z=\dfrac{\ln(x)-\lambda}{\beta}.$$	β – форма; λ – масштаб	43	
Лог-логистическое (вариант [13], рис. 23)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}\left(1+\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{-2}, \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	α – форма; β – масштаб	13	
Логнормальное (рис. 24)	$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\,x\sqrt{2\,\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right), \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	μ – положение; σ – форма	4, 12, 13, 16, 21, 37, 39–41, 43–46	6, 8, 23, 24, 26, 27, 30, 36
Максвелла (рис. 14, *б*)	$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{x^2}{\sigma^3}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,\sigma^2}\right), \; x>0;\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$$	σ – масштаб	6	37, 43

Нормально е сложенное (рис. 25)	$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\cosh\left(\frac{\mu x}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2+\mu^2}{2\sigma^2}}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	μ – сдвиг, σ – масштаб	43	
Нормально е, усеченное слева (рис. 26)	$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x>x_0;\\ 0, & x\le x_0.\end{cases}$ $c=\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)\right).$	x_0 – точка усечения, μ – положение, σ – разброс		19, 22, 28, 30, 36
Парето (рис. 27, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x>x_0;\\ 0, & x\le x_0.\end{cases}$	α – масштаб, x_0 – мин. значение	6, 28	37, 38, 41, 43
Пирсона, тип V (рис. 28)	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{-(\alpha+1)}\exp(-\beta/x)}{\beta^{-\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб	13, 41	
Пирсона, тип VI (рис. 29)	$f(x)=\begin{cases}\frac{(x/\beta)^{\alpha1-1}}{\beta\cdot B(\alpha_1,\alpha_2)(1+x/\beta)^{\alpha1-\alpha2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	α_1, α_2 – форма; β – масштаб	13, 41	
Рэлея (рис. 27, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\beta^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right), & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	β – масштаб	44–46	6, 30
Фреше (экстремальных значений, тип II, рис. 30, рис. 31)	$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right), & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	α – форма; β – масштаб		31
Экспоненциальное (показательное, рис. 32, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	λ – масштаб	1, 6, 8, 11, 14, 21–24, 26–28, 30, 36, 40, 41, 43–46	39
Экстремальных значений модифицированное (рис. 32, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{\exp(x)-1}{\lambda}+x\right), & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	λ – форма	4	
Эрланга (рис. 33)	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{(\alpha-1)!}e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$	α – форма; λ – масштаб	43	

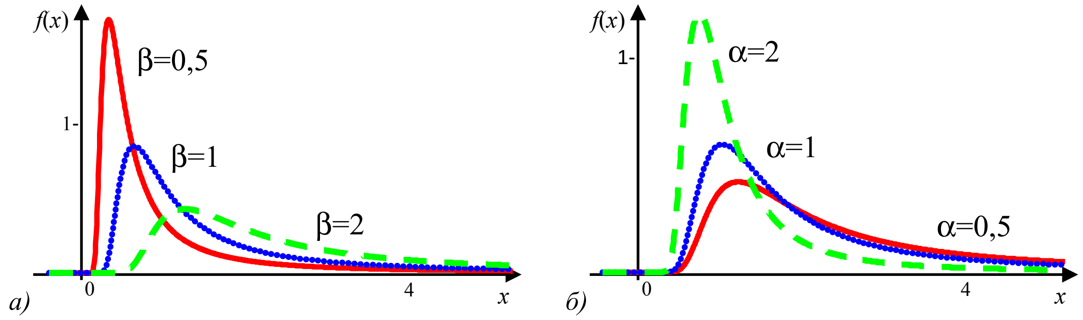


Рис. 11. Графики α-распределения с различными значениями параметров: а) α=0,5; б) β=2

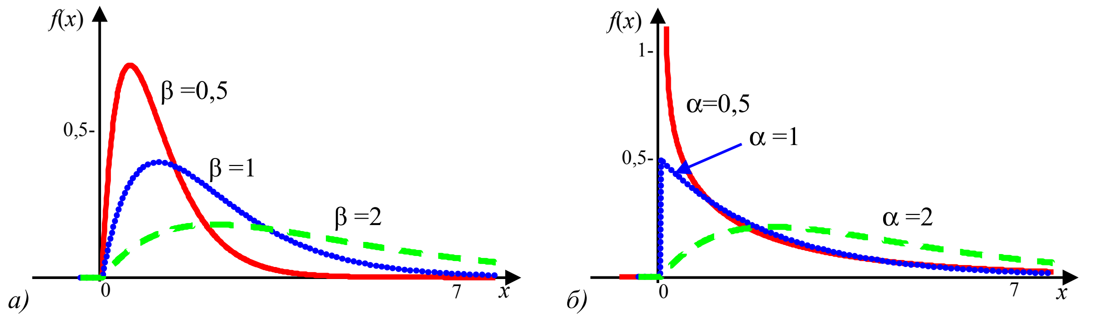


Рис. 12. Графики Г-распределения с различными значениями параметров: а) α=2; б) β=2

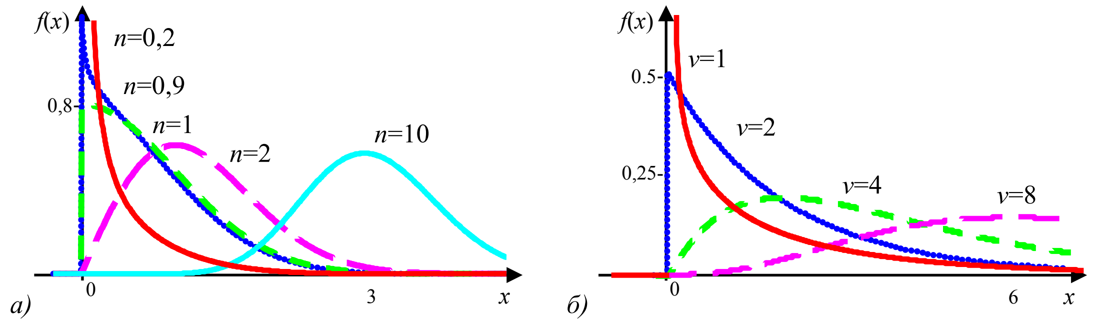


Рис. 13. Графики а) χ-распределения;
б) χ^2-распределения с различными значениями параметра

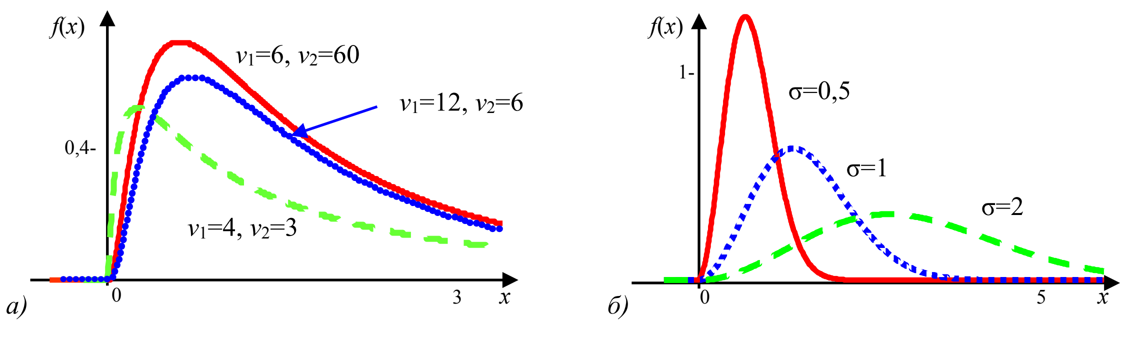


Рис. 14. Графики а) F-распределения Фишера;
б) Максвелла с различными значениями параметров

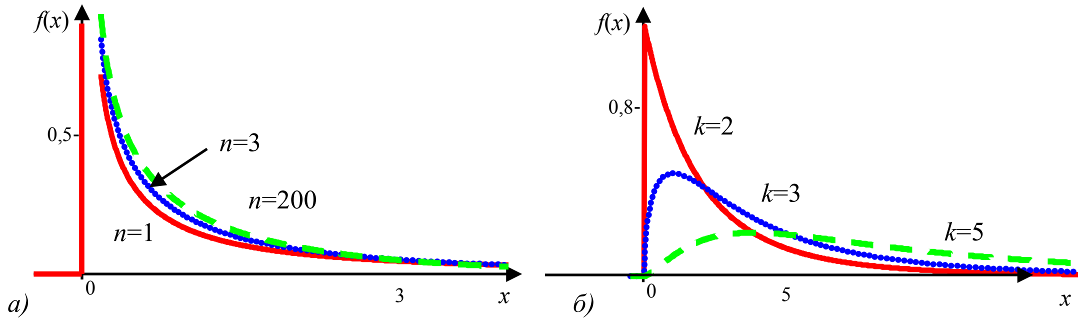


Рис. 15. Графики T^2-распределения Хотеллинга с различными значениями параметров:
а) $k = 1$; б) $n = 1$

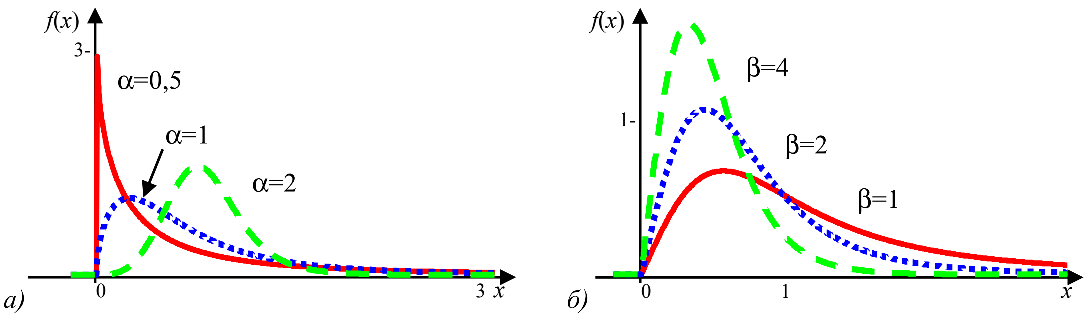


Рис. 16. Распределение Берра: а) $\beta=1$; б) $\alpha=2$

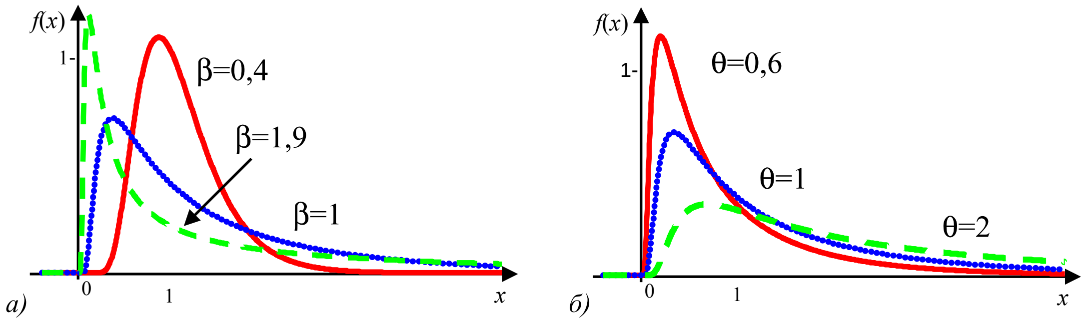


Рис. 17. Распределение Бирнбаума-Саундерса: а) $\theta=1$; б) $\beta=1$

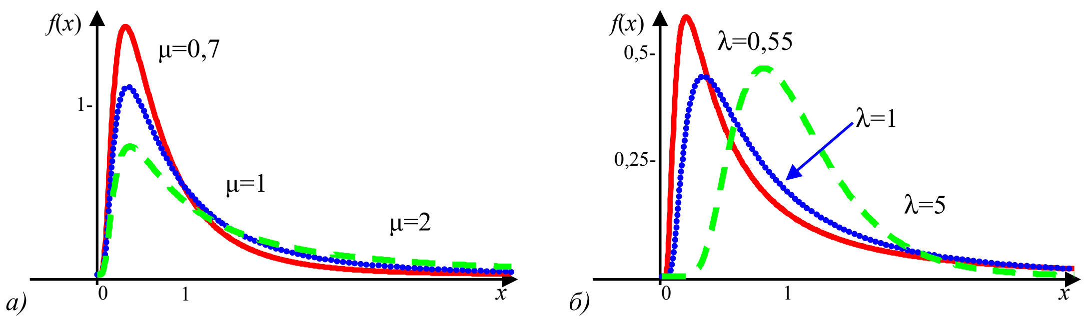


Рис. 18. Обратное гауссовское распределение (распределение Вальда): а) $\lambda=1$; б) $\mu=1$

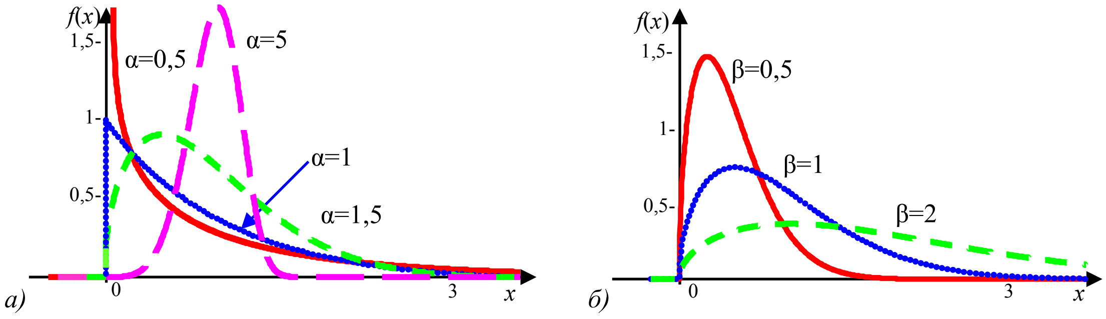


Рис. 19. Распределение Вейбулла-Гнеденко: а) β=1; б) α=1,5

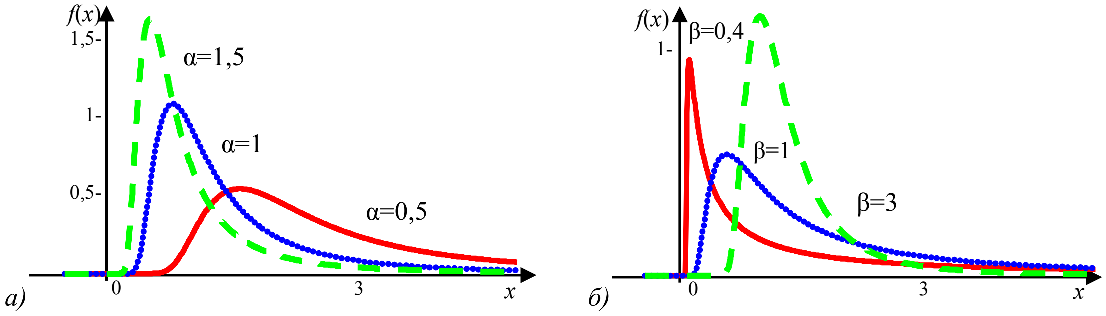


Рис. 20. Гиперэкспоненциальное распределение: а) β=2; λ=0; б) α=1; λ=0

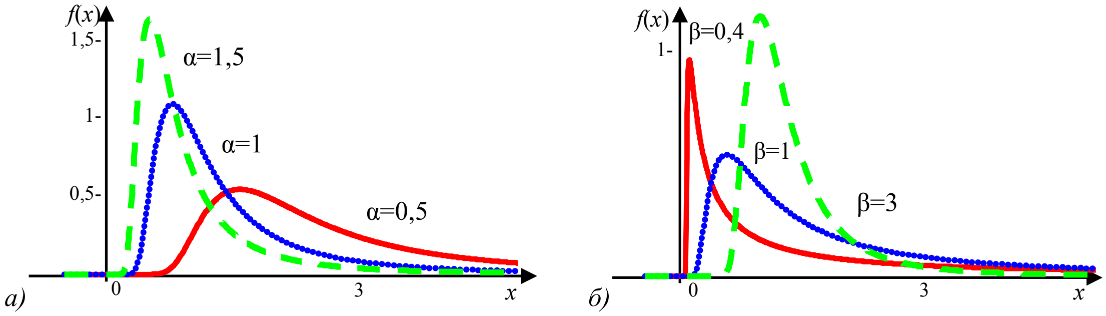


Рис. 21. Инверсное распределение Вейбулла: а) β=2; λ=0; б) α=1; λ=0

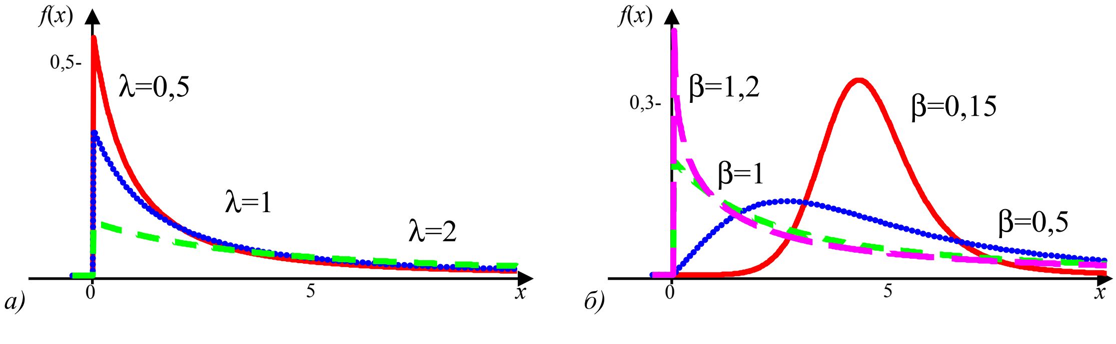


Рис. 22. Лог-логистическое распределение (вариант [43]): а) β=1; б) λ=1,5

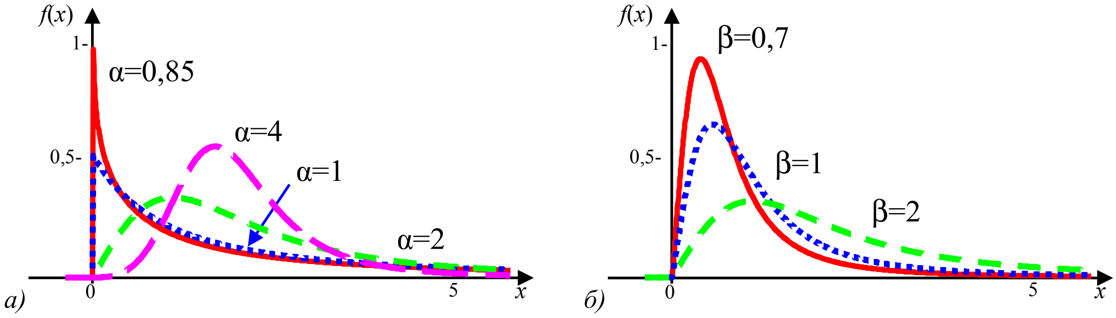


Рис. 23. Лог-логистическое распределение (вариант [13]): а) β=2; б) α=2

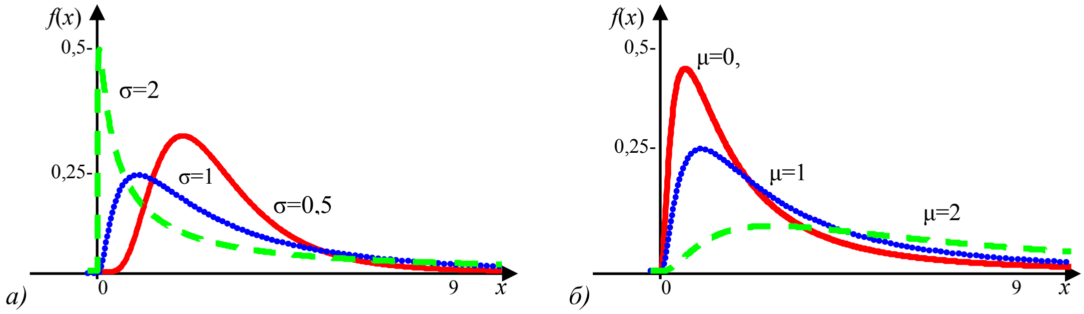


Рис. 24. Логнормальное распределение: а) μ=1; б) σ=1

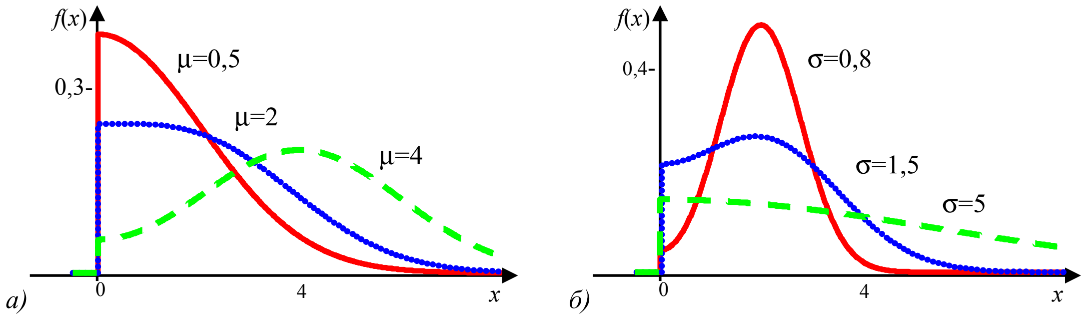


Рис. 25. Нормальное сложенное распределение: а) σ=2; б) μ=2

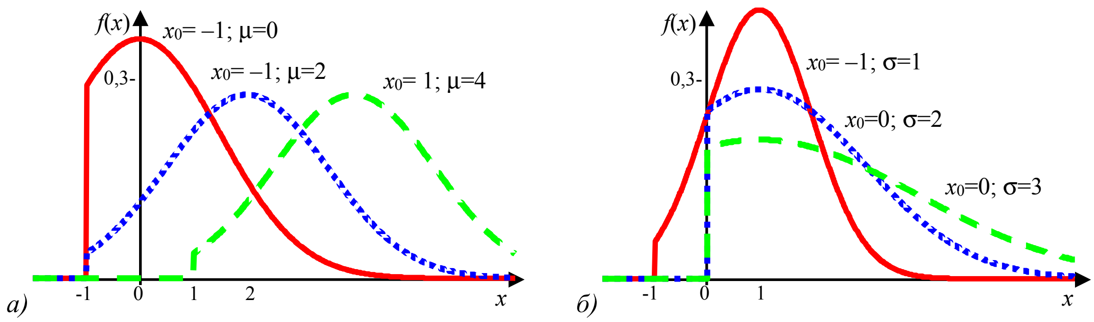


Рис. 26. Нормальное распределение, усеченное слева в точке x_0: а) σ=1,5; б) μ=1

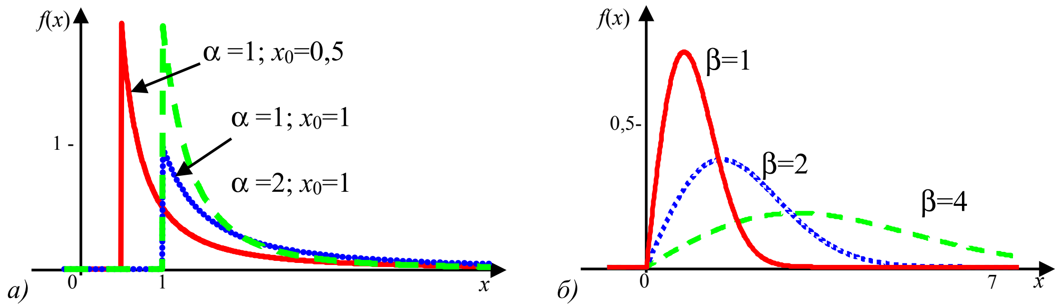


Рис. 27. Распределения а) Парето; б) Рэлея с различными значениями параметров

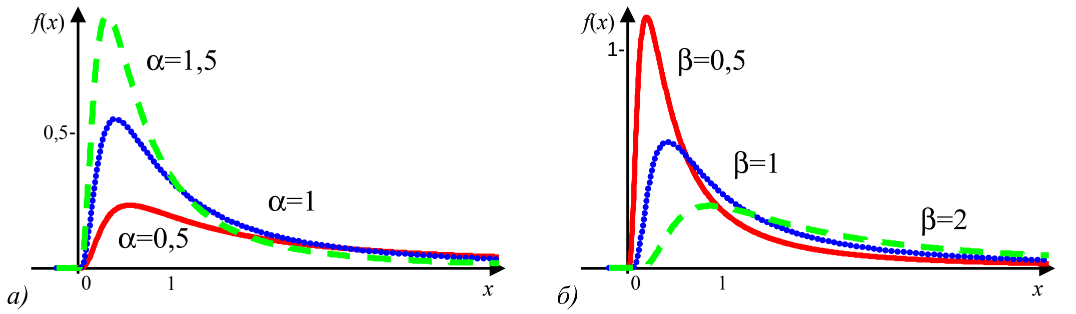


Рис. 28. Распределение Пирсона типа V с различными значениями параметров: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1$

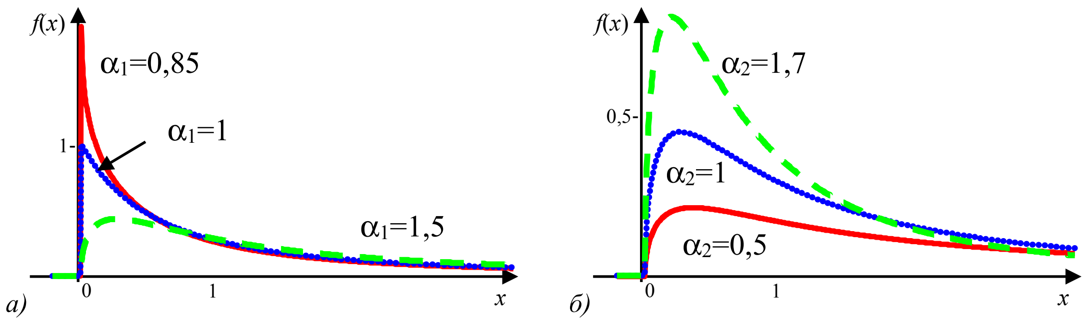


Рис. 29. Распределение Пирсона типа VI: а) $\alpha_2=1$; $\beta=1$; б) $\alpha_1=1{,}5$; $\beta=1$

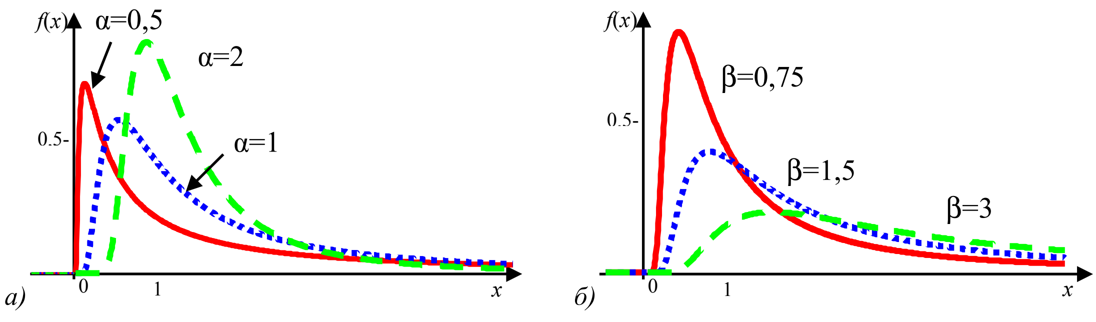


Рис. 30. Распределение Фреше с различными значениями параметров: а) $\beta=1$; б) $\alpha=1$

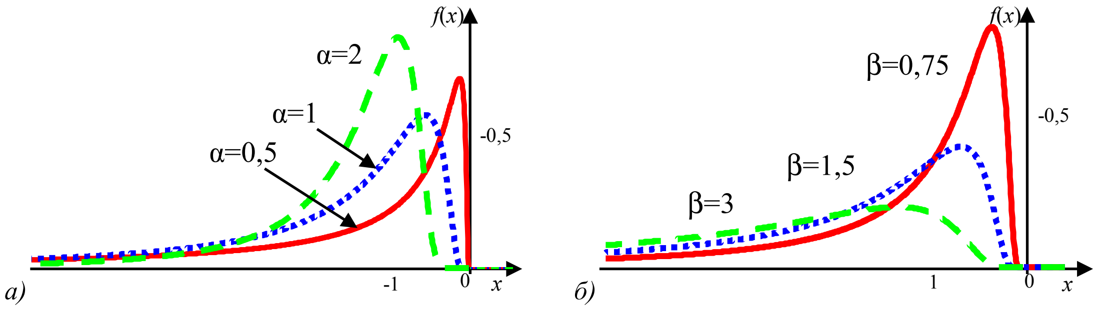


Рис. 31. Линейное преобразование распределения Фреше с коэффициентом b=–1: а) β=1; б) α=1

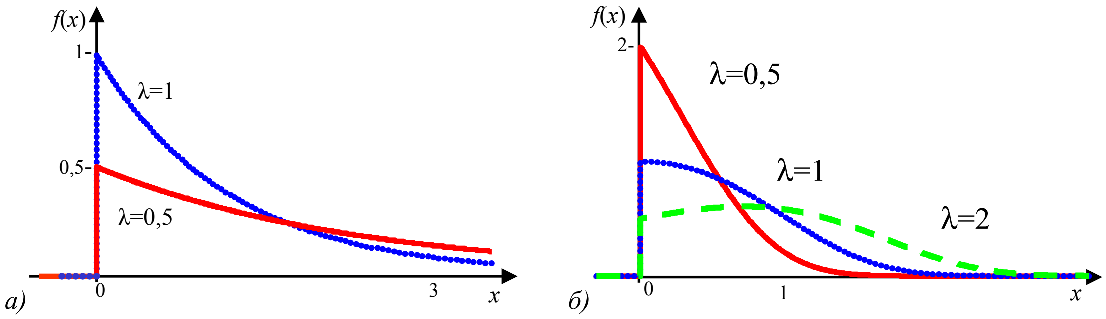


Рис. 32. Графики а) экспоненциального распределения; б) модифицированного распределения экстремальных значений с различными значениями параметра

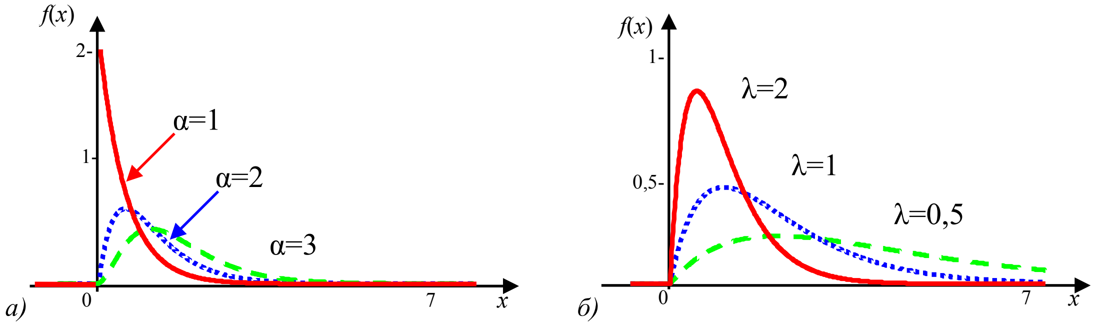


Рис. 33. Графики распределения Эрланга с различными значениями параметров: а) λ=2; б) α=2

Таблица 3

Рекомендуемые варианты функций некоторых типовых распределений непрерывных случайных величин, областью значений которых является отрезок или интервал конечной длины

Распределение	**Функция плотности распределения**	**Параметры**	**Источники с аналогичной функцией распределения**	
			и параметрами	**но другими именами параметров**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
B (бета, рис. 34)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}}{B(\nu,\omega)}, & x\in(0;1);\\ 0, & x\notin(0;1).\end{cases}$	ν, ω – форма	28, 35, 44–46	5, 6, 8, 12–14, 23, 30, 32, 39–41, 43

L-Сосновского (рис. 35)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\gamma\left[1-(1-x)^{\eta}\right]^{\gamma-1}}{(1-x)^{1-\eta}}, x\in[0;1];\\ 0,\ x\notin[0;1].\end{cases}$	η, γ – форма	30	
Арксинуса обобщенное (рис. 36, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi\cdot\alpha)}{\pi}x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}, x\in(0;1);\\ 0,\quad x\notin(0;1).\end{cases}$	α – форма	6	
Вон Мизеса (рис. 37)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp(b\cdot\cos(x-a))}{2\pi\cdot BesselI(0,b)}, x\in[0;2\pi];\\ 0,\quad x\notin[0;2\pi].\end{cases}$	*a* – мода, *b* – форма	37	
Джонсона связанное (рис. 38)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha_1+\alpha_2\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]^2\right)}{\alpha_2^{-1}(b-a)^{-1}(x-a)(b-x)\sqrt{2\pi}}, x\in[a,b];\\ 0,\quad x\notin[a,b].\end{cases}$	α_1, α_2 – форма; *a* – положение; (*b* – *a*) – масштаб	13	
Равномерное (рис. 36, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b];\\ 0,\quad x\notin[a,b].\end{cases}$	*a* – мин., *b* – макс. значение	6-8, 11–13, 16, 21-26, 28, 39, 41, 43–46	30
Степенное (рис. 39, *а*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c\cdot x^{c-1}}{b^c}, x\in[0;b];\\ 0,\quad x\notin[0;b].\end{cases}$	*b* – макс. значение, *c* – форма	37	
Трапецеидальное (рис. 39, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b+d-a-c)(c-a)}, x\in[a,c];\\ \dfrac{2}{(b+d-a-c)}, x\in(c,d];\\ \dfrac{2(b-x)}{(b+d-a-c)(b-d)}, x\in(d,b];\\ 0,\quad x\notin[a,b].\end{cases}$	*a* – мин., *b* – макс. значение; *c*, *d* – коорд. верхн. основания трапеции		
Трапеции прямоугольной (рис. 40, *а*)	$f(x)=\begin{cases}a+2x(1-a), x\in[0,1];\\ 0,\quad x\notin[0,1].\end{cases}$	*a* – высота основания слева.	13	
Треугольное (Симпсона, рис. 40, *б*)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, x\in[a,c];\\ 0,\quad x\notin[a,b];\\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, x\in(c,b].\end{cases}$	*a* – мин., *b* – макс., с – наиболее вероятное значение	13, 43	

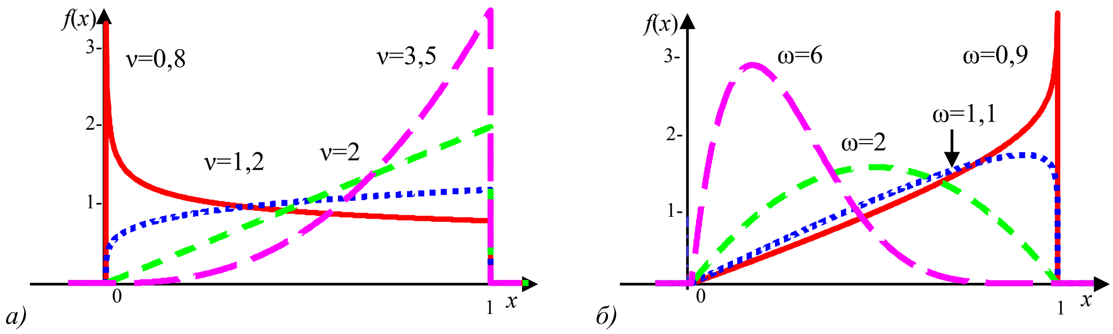


Рис. 34. Графики B-распределения с различными значениями параметров: а) ω = 1; б) ν = 2

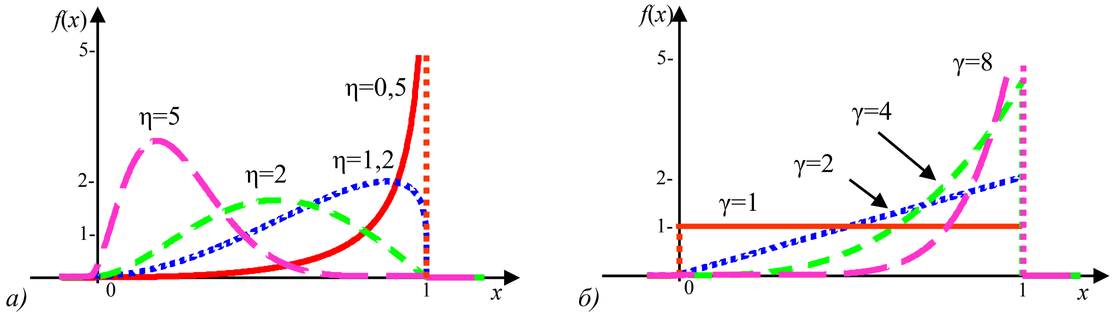


Рис. 35. Графики L-распределения Сосновского с различными значениями параметров: а) γ=3; б) η=1

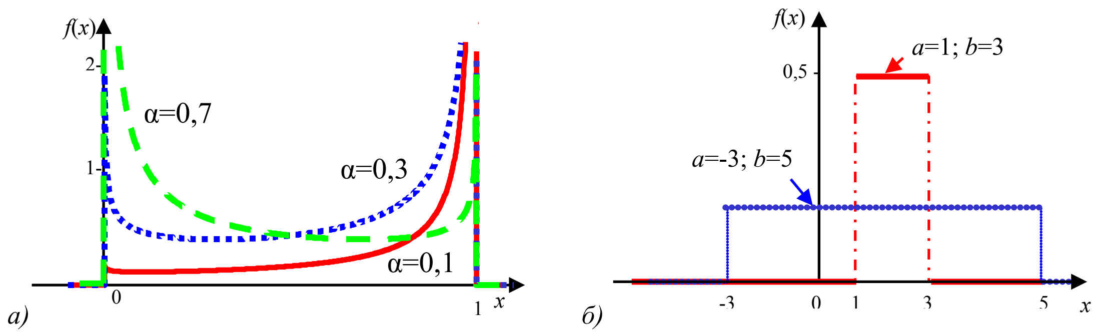


Рис. 36. Графики а) арксинуса обобщенного распределения; б) равномерного распределения

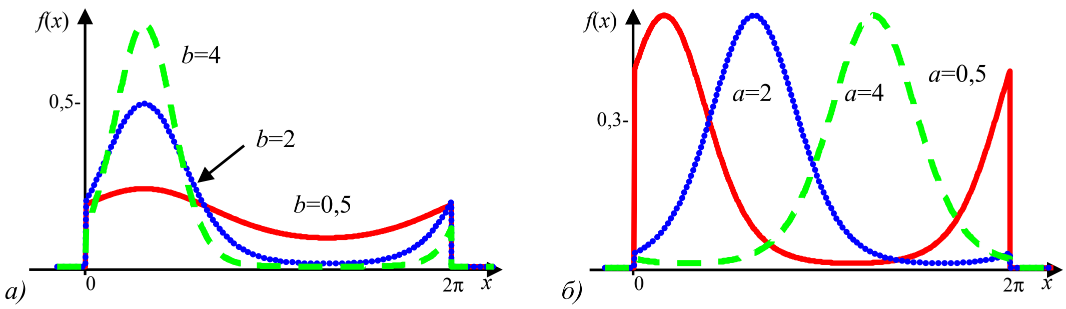


Рис. 37. Графики распределения Вон-Мизеса с различными значениями параметров: а) a=1; б) b=2

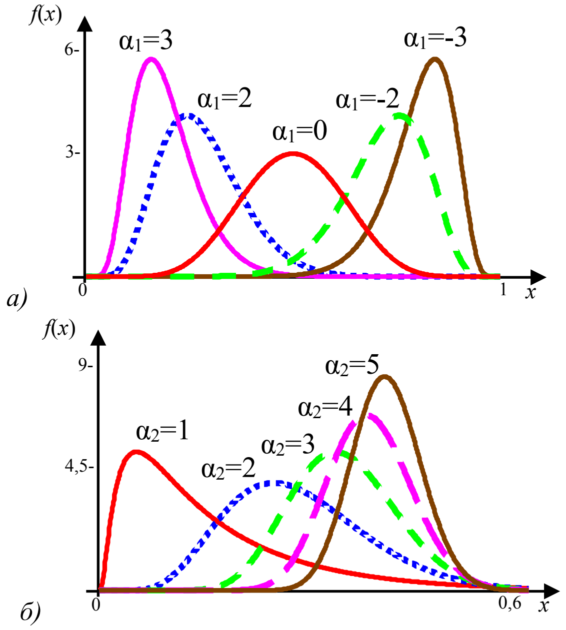


Рис. 38. Графики связанного распределения Джонсона: а) $a = 0,\ b = 1,\ \alpha_2=2$; б) $a = 0,\ b =1,\ \alpha_1=2$

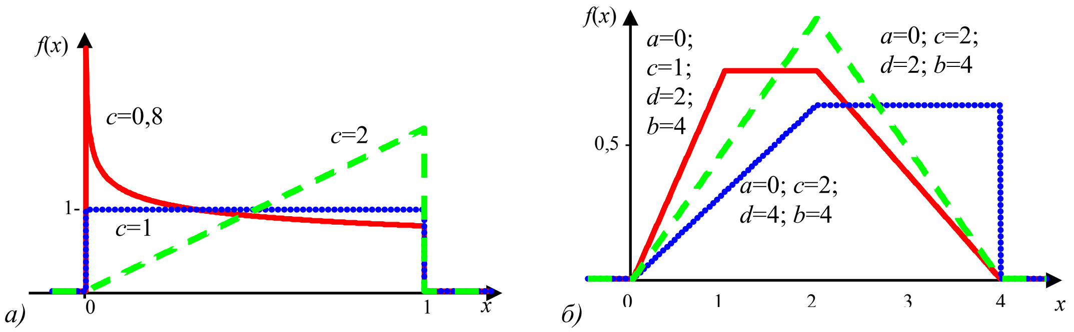


Рис. 39. Графики а) степенного распределения (при b=1); б) трапецеидального распределения

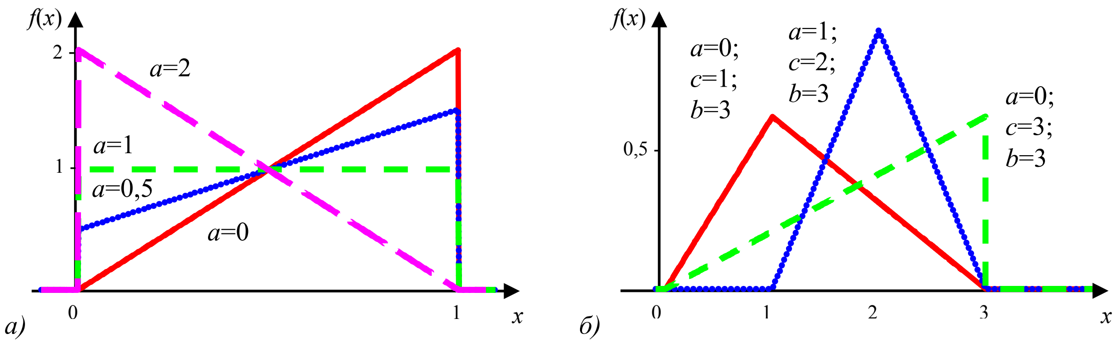


Рис. 40. Графики а) распределения прямоугольной трапеции; б) треугольного распределения

Таблица 4

Рекомендуемые варианты вероятностей значений P(x) некоторых типовых распределений дискретных случайных величин

Распределение	**Вероятности значений дискретных случайных величин**	**Параметры**	**Источники с аналогичной функцией P(x)**	
			и параметрами	**но другими именами параметров**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Бернулли (рис. 41, а)	$P(\xi = x) = \begin{cases} 1-p, & x=0; \\ p, & x=1. \end{cases}$	p – вероятность события	13, 37, 38, 43	
Биномиальное (рис. 42)	$P(\xi = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n.$	n – количество испытаний Бернулли; p – вероятность успеха	4, 5, 8, 14, 36, 38, 43–45	13
Бореля-Таннера (рис. 41, *б*)	$P(\xi = x) = \frac{k}{(x-k)!} x^{x-k-1} e^{-\alpha x} \alpha^{x-k}$, $x = k, k+1, k+2, \ldots .$	α –форма; k – мин. значение	6	18, 25
Вырожденное (рис. 43, *а*)	$P(\xi = \alpha) = 1.$	α – значение величины	6	
Геометрическое (рис. 43, *б*)	$P(\xi = x) = p(1-p)^x,\ x = 0, 1, 2, \ldots .$	p – вероятность успеха	4, 6, 37, 43	
Гипергеометрическое (рис. 44)	$P(\xi = x) = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, $x = \max\{0, n-M\}, 1, 2, \ldots, \min\{M, n\}.$	N – объем ген. Совокупности, M – количество отмеченных элементов, n – объем выборки	6, 8, 23, 31	14, 28, 32, 37, 38, 43
Дискретное равномерное (рис. 45, *а*)	$P(\xi = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & x \in [a, b], x \in Z; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$	a – минимальное, b – максимальное значение	37, 43	
Логарифмическое (рис. 45, *б*)	$P(x) = -\frac{q^x}{x \cdot \ln(1-q)},\ x = 1, 2, 3, \ldots .$	q – вероятность события	6, 14	38
Отрицательное биномиальное (Паскаля, рис. 46)	$P(\xi = x) = C_{r+x-1}^x p^r (1-p)^x$, $x = 0, 1, 2, \ldots .$	r – количество успехов; p – вероятность	6	4, 13, 16, 28, 31, 37–39, 43

		успеха		
Отрицательное гипергеометрическое (рис. 47)	$P(\xi = x) = \frac{C_{x+m-1}^{x} \cdot C_{N-m-x}^{M-m}}{C_N^M}$, $x = 0, 1, 2, ..., N - M$.	N – объем ген. совокупности, M – число отмеченных элементов, m – требуемое число отмеченных элементов	5, 6	
Пойа (рис. 49)	$P(\xi = x) = \frac{C_{(b/c)+x-1}^{x} \cdot C_{(r/c)+n-x-1}^{n-x}}{C_{((b+r)/c)+n-1}^{n}}$, $x = 0, 1, 2, ..., n.$	b – количество «черных», r – «красных», n – извлекаемых шаров, c – возвращаемых вместе с выбранным того же цвета	6, 33	
Пуассона (рис. 48)	$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, $x = 0, 1, 2, ...$	λ – математическое ожидание	4, 5, 8, 14, 28, 33	31, 36, 43

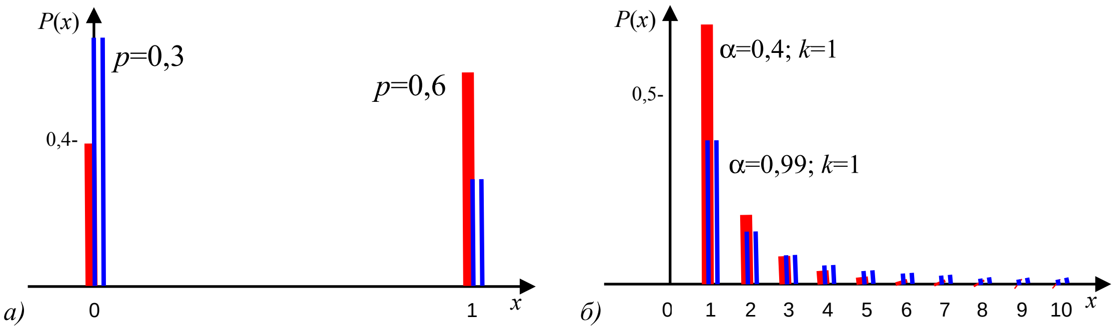


Рис. 41. Столбцовые диаграммы распределения а) Бернулли; б) Бореля-Таннера

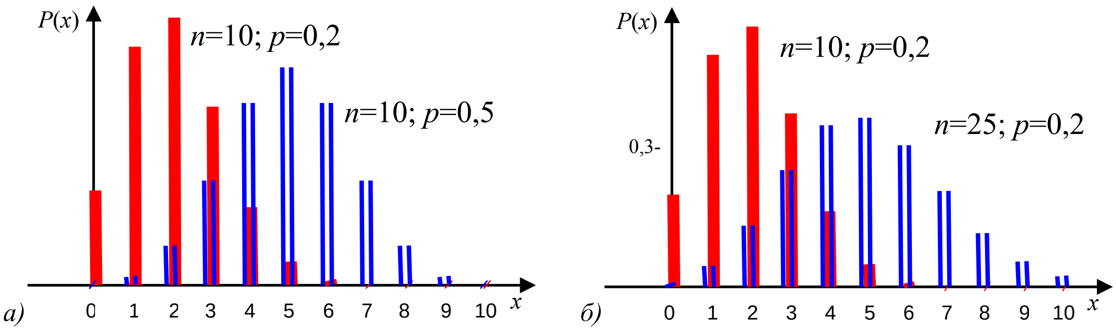


Рис. 42. Столбцовые диаграммы биномиального распределения для различных значений параметров

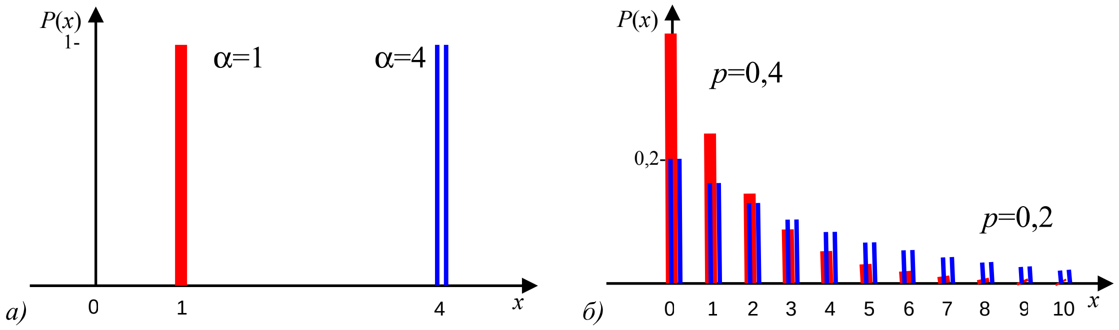


Рис. 43. Столбцовые диаграммы: а) вырожденного; б) геометрического распределения

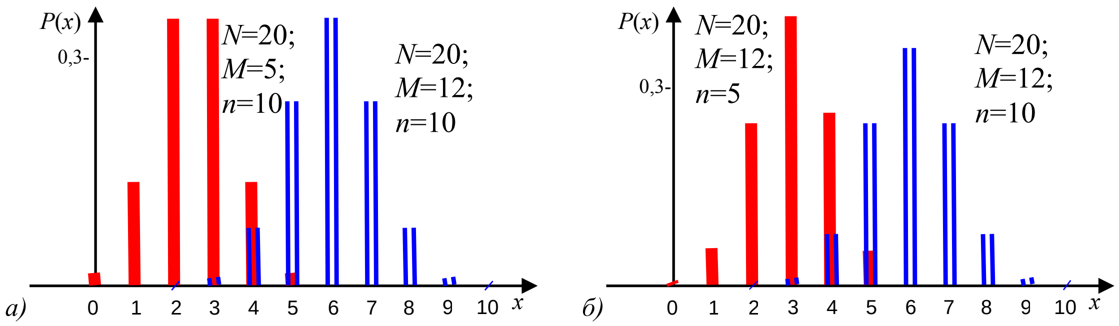


Рис. 44. Столбцовые диаграммы гипергеометрического распределения

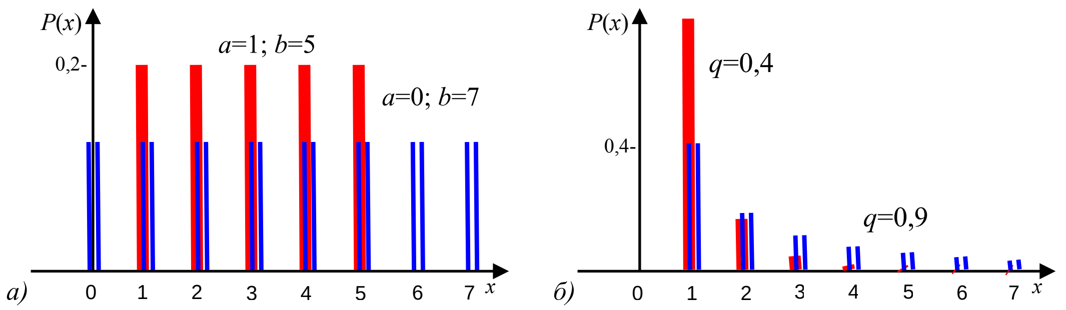


Рис. 45. Столбцовые диаграммы а) дискретного равномерного; б) логарифмического распределения

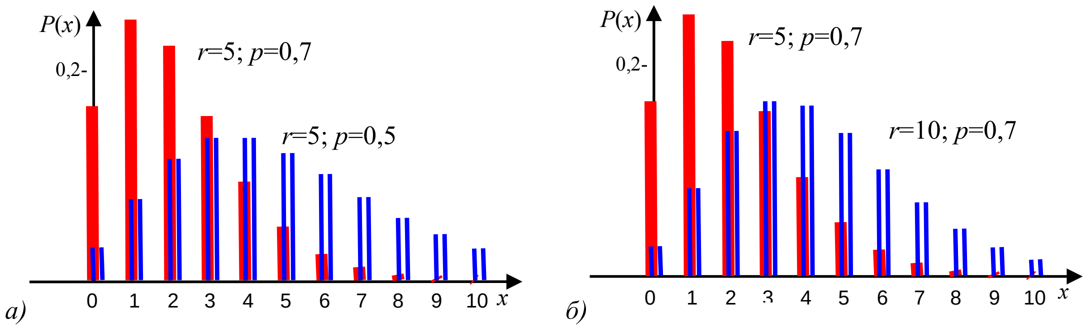


Рис. 46. Столбцовые диаграммы отрицательного биномиального распределения (Паскаля)

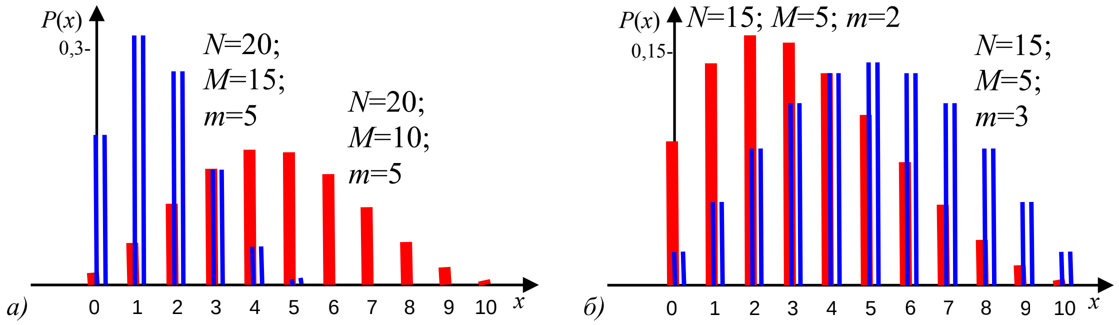


Рис. 47. Столбцовые диаграммы отрицательного гипергеометрического распределения

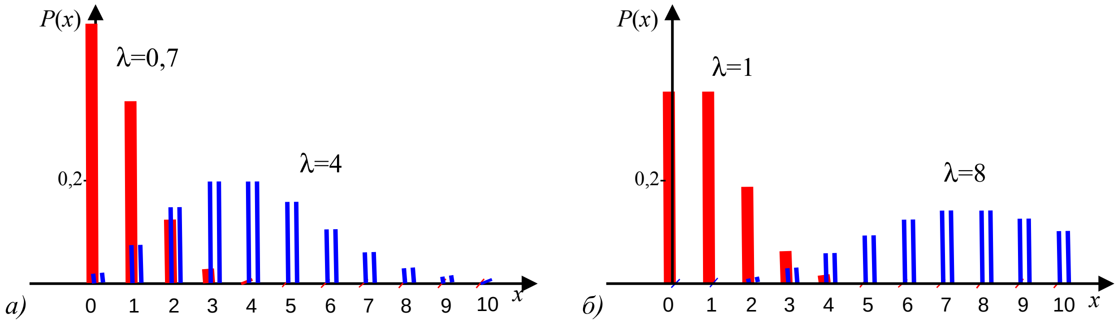


Рис. 48. Столбцовые диаграммы распределения Пуассона для различных значений параметра

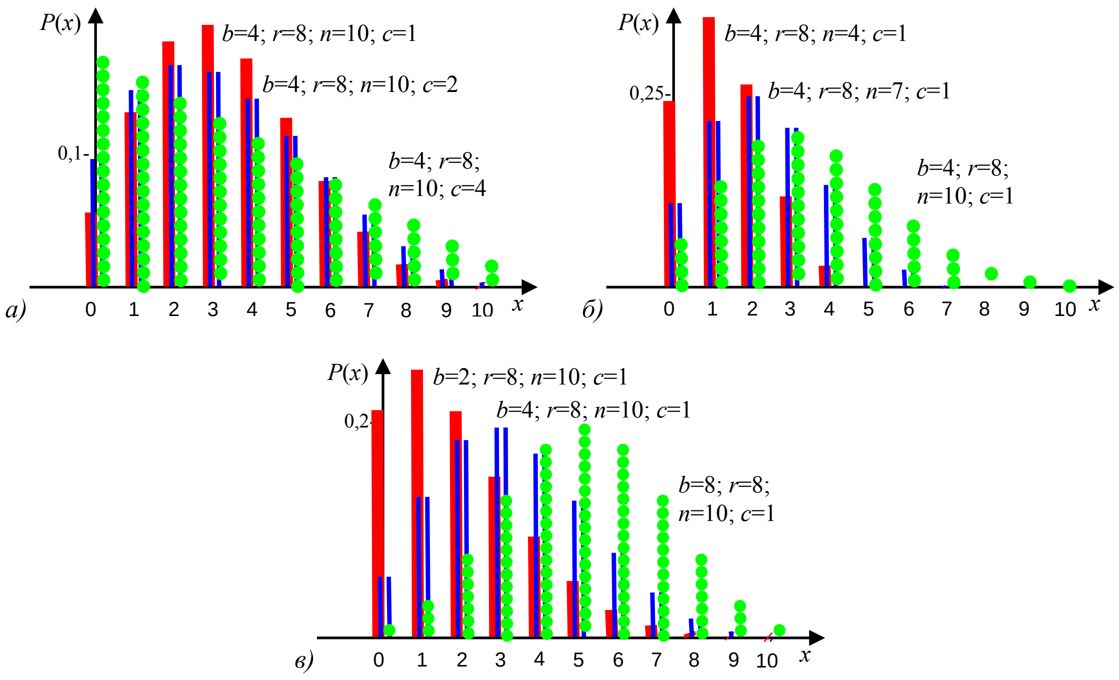


Рис. 49. Столбцовые диаграммы распределения Пойа для различных значений параметров

Возможности линейного преобразования случайных величин

Применение к случайной величине ξ линейного преобразования $b(\xi - a)$ позволяет сместить функцию ее распределения и характеристики положения (минимальное и максимальное значение, математическое ожидание, моду, квантили) на

a единиц вправо. При этом параметр b определяет масштаб линейного преобразования и влияет на характеристики рассеяния.

Параметры линейного преобразования a и b зачастую являются исторически сложившимися параметрами распределения случайной величины. Так параметры нормального распределения μ и σ – суть параметры линейного преобразования стандартной нормальной случайной величины (см. рис. 9). Также известен, например, вариант 4-х параметрического В-распределения, где помимо традиционных параметров формы (ν и ω) используются параметры линейного преобразования, изменяющие интервал возможных значений случайной величины [40, 41, 43].

При отрицательных значениях параметра b функция плотности распределения величины $b(\xi–a)$ является зеркальным отображением функции плотности распределения величины $|b|(\xi–a)$ относительно прямой $x=a$. Полученные таким преобразованием величины часто имеют новые свойства в сравнении с исходными величинами. Это демонстрируют, например, два варианта распределения Гумбеля – предельного распределения экстремальных значений типа I для максимальных и минимальных значений соответственно (см. рис. 3, 4). Применяя линейное преобразование $b(\xi–a)$ при $b<0$ к случайной величине, подчиняющейся, например, распределению Вейбулла или Фреше (см. рис. 30) можно изменить область ее возможных значений на полуинтервал с верхней границей (см. рис. 31).

Заключение

В работе представлен обширный справочный материал по типовым распределениям случайных величин. Обоснованы критерии, в соответствии с которыми среди множества вариантов функции некоторого распределения предлагается один, рекомендуемый к дальнейшему использованию в научной и учебно-методической работе. Важно, что основным критерием является реализация выбранного варианта функции распределения в пакетах статистического анализа данных и моделирования, используемых в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. / А.М. Андронов, Е.А. Копытов, Л.Я. Гринглаз. СПб.: Питер, 2004. 461 с.
2. Афифи, А. Статистический анализ: подход с использованием ЭВМ. / А. Афифи, С. Эйзен. М.: Мир, 1982. 486 с.
3. Байхельт, Ф. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. / Ф. Байхельт, П. Франкен. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
4. Барлоу, Р., Прошан Ф. Математическая теория надёжности. Пер. с англ., под ред. Б.В. Гнеденко. / Р. Барлоу, Ф. Прошан. М.: Советское радио, 1969. 488 с.
5. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики. / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. М.: Наука, 1983. 416 с.
6. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. Репр. изд. 912 с.
7. Герасимович, А.И. Математическая статистика. / А.И. Герасимович. Мн: Вышэйшая школа, 1983. 275 с.
8. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности. / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. 523 с.

9. ГОСТ 27.005–97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. Мн.: Госстандарт, 2005. 15 с.
10. Ефремова, Н.Ю. Оценка неопределенности в измерениях: Практическое пособие. / Н.Ю. Ефремова. Мн.: БелГИМ, 2003. 50 с.
11. Каазик, Ю.Я. Математический словарь. / Ю.Я. Каазик. Таллинн: Валгус, 1985. 296 с.
12. Капур, К. Надежность и проектирование систем. / К. Капур, Л. Ламберсон. М.: Мир, 1980. 606 с.
13. Кельтон, В. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. / В. Кельтон, А. Лоу. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
14. Кендалл, М. Теория распределений. / М. Кендалл, А. Стьюарт. М.: Наука, 1966. 587 с.
15. Кендалл, М. Статистические выводы и связи. / М. Кендалл, А. Стюарт. М.: Наука, 1973.
16. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. М.: Физматлит, 2006. 813 с.
17. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970. 720 с.
18. Королюк, В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
19. Крамер, Г. Математические методы статистики. / Г. Крамер. М.: Мир, 1975. 648 с.
20. Ликеш, И. Основные таблицы математической статистики. / И. Ликеш, И. Ляго. М.: Финансы и статистика, 1985. 356 с.
21. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М.Виноградов. М.: Сов. энциклопедия. В 5-ти томах, 1977.
22. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10т. Т.2: Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б.В.Гнеденко. М.: Машиностроение, 1987. 280 с.
23. Надежность и эффективность в технике: Справочник: В 10т. Т.5: Проектный анализ надежности / Под ред. В.И. Патрушева и А.И. Рембезы. М.: Машиностроение, 1988. 316 с.
24. Орлов, А.И. Прикладная статистика: учебник / А.И. Орлов. М.: Издательство «Экзамен», 2006. 671 с.
25. Оуэн, Д.Б. Сборник статистических таблиц. / Д.Б. Оуэн. М.: ВЦ АН СССР, 1973. 586 с.
26. Половко, А.М. Основы теории надежности. / А.М. Половко, С.В. Гуров. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
27. Решетов, Д.Н. Надежность машин. / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. М. Высш. шк., 1988. 238 с.
28. Серегина, В.С. Решение инженерных задач методами математической статистики: Учеб. пособие для студентов всех спец. / В.С. Серегина. Гомель, БелГУТ, 1994. 107 с.
29. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика, 1989, 1990.
30. Сосновский, Л.А. Элементы теории вероятностей, математической статистики и теории надежности: Учеб. пособие. / Л.А. Сосновский. Гомель, БелГУТ, 1994. 146 с.

31. СТБ ГОСТ Р 50779.10–2001 (ИСО 3534.1–93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. Мн.: Госстандарт, 2001. 44 с.
32. Уилкс, С. Математическая статистика. / С. Уилкс. М.: Наука, 1967. 632 с.
33. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1, Т. 2: Пер. с англ. / В. Феллер. М.: Мир, 1984. 528 с.
34. Харин, Ю.С. Практикум на ЭВМ по математической статистике. / Ю.С. Харин, М.Д. Степанова. Мн.: "Университетское", 1987. 304 с.
35. Хастингс, Н. Справочник по статистическим распределениям. / Н. Хастингс, Дж. Пикок. М.: Финансы и статистика, 1987. 95 с.
36. Шор, Я.Б. Таблицы для анализа и контроля надежности. / Я.Б. Шор, Ф.И. Кузьмин. Советское радио, 1968. 288 с.
37. MapleSoft, Waterloo Maple Inc. (2005). Maple 10. Maple Help.
38. Matematica, Wolfram Research Inc. (2005). Matematica 5.2. Matematica Help.
39. MathSoft, Inc. (2000). Mathcad 2001 Professional. Mathcad Help.
40. Microsoft, Inc. (2000). Microsoft Excel 2000. Справка по Microsoft Excel 2000.
41. Minuteman Software. (2001). GPSS World. Reference manual.
42. SPSS, Inc. (2004). SPSS V.13. Help.
43. StatPoint, Inc. (2005). STATGRAPHICS Centurion XV. Help System.
44. StatSoft, Inc. (2001). Statistica V.6. STATISTICA Electronic Manual.
45. StatSoft, Inc. (2001). Электронный учебник по промышленной статистике. Москва, StatSoft. WEB: http://www.statsoft.ru/home/portal/textbook_ind/default.htm.