Белорусский национальный технический университет

ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО НАГРУЖЕНИЯ

Ботогова М.Г.

The lowest spectrum of free vibrations of non-circular cylindrical shell subjected to the axial static loads is investigated. The vibration is supposed to be localized near the certain generatrix, called the weakest. The frequencies and mode shapes for vibrations have been found by using the asymptotic expansions.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим вязкоупругую некруговую цилиндрическую оболочку длиной L и толщиной h. Введем на срединной поверхности оболочки ортогональную систему координат s, ϕ, связанную с главными линиями кривизны, так чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $R^2(ds^2 + d\phi^2)$. Здесь R – характерный размер срединной поверхности, s – продольная координата $(0 \le s \le l = L/R)$, ϕ – координата на направляющей $(0 \le \phi < 2\pi)$. При этом радиус кривизны оболочки $R_2(\phi) = \dfrac{R}{k(\phi)}$. Материал оболочки – линейно-вязкоупругий с мгновенным модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν.

Будем рассматривать случай, когда оболочка испытывает однородную осевую нагрузку $T_1^* = \mu E h T_1$. В качестве исходных уравнений используем полубезмоментные уравнения теории оболочек, записанные в безразмерном виде с учетом вязкости материала оболочки [1-2, 4]:

$$\mu^4\Delta^2\left[W - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau,T)W(\tau)d\tau\right] - \mu^2 k(\phi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \mu^2 T_1\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mu^4\Delta^2\Phi + k(\phi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[W - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau,T)W(\tau)d\tau\right] = 0, \qquad (1.1)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial s^2 + \partial^2/\partial\phi^2,\ \mu^4 = h^2/\left[12R^2(1-\nu^2)\right], \quad W = \mu^2 R^{-1}W^*, \Phi = \Phi^*/(\mu^2 Eh),\ t = \frac{t^*}{t_c},$$

$$t_c = \frac{R^2\rho}{\mu^2 E}.$$

Здесь W^*, Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжения, ρ – плотность материала, μ – естественный малый параметр, $K(t-\tau)$ – ядро скорости релаксации материала оболочки, t^* – время. На краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = \Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0,\ l. \qquad (1.2)$$

§2. Метод решения.

Представим решение уравнений (1.1) в виде:

$$W = w(s,\phi,\mu)\exp(i\Omega t), \qquad \Phi = f(s,\phi,\mu)\exp(i\Omega t),\ \Omega = \omega + i\alpha, \quad (2.1)$$

где $\omega > 0$ – искомая частота, $\alpha > 0$ – число, характеризующее скорость затухания колебаний.

Подставляя (2.1) в (1.1) и замечая, что $\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)e^{i\Omega\tau}d\tau = e^{i\Omega t}C$, где $C = \int_{0}^{+\infty} K(\theta)e^{i\Omega\theta}d\theta$, получим следующую систему уравнений:

$$(1-C)\mu^4\Delta^2 w - \mu^2 k(\phi)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \mu^2 T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \Omega^2 w = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\mu^4\Delta^2 f + k(\phi)(1-C)\frac{\partial^2}{\partial s^2} w = 0\,.$$

Начальные условия (1.2) позволяют искать решения w, f следующим образом:

$$w = w_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_m s), \qquad f = f_m(\phi)\sin(\mu^{-1}p_m s)\,, \tag{2.3}$$

где $p_m = \mu m\pi R/L$, m – натуральное число. Тогда задача (2.2) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}(1-C)\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}w_m - 2\mu^2 k(\phi)(1-C)p_m^2\frac{\partial^2 w_m}{\partial\phi^2} + p_m^4(1-C)w_m + \\ + p_m^2 k(\phi) f_m - p_m^2 T_1 w_m - \Omega^2 w_m = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\mu^4\frac{\partial^4}{\partial\phi^4}f_m - 2\mu^2 p_m^2\frac{\partial^2 f_m}{\partial\phi^2} + p_m^4 f_m - p_m^2 k(\phi)(1-C)w_m = 0\,.$$

В дальнейшем индекс m опускается.

Принимая во внимания зависимость радиуса кривизны оболочки от ϕ, мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую $\phi = \phi_0$, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний [3-4,6-8]. Решение системы уравнений (2.4), затухающее при удалении от “наиболее слабой образующей” может быть представлено в виде ВКБ-функций [3, 6-8]:

$$w(\phi,\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{k/2}w_k(\xi)\exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\} \tag{2.5}$$

$$f(\phi,\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{k/2}f_k(\xi)\exp\left\{i\left[\mu^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\},$$

где $\xi = \mu^{-1/2}(\phi - \phi_0)$, w_k, f_k – полиномы по ξ, q – вещественное число, определяющее изменяемость в направлении ϕ, параметр b характеризует скорость уменьшения глубины вмятины при удалении от «наиболее слабой» образующей.

Искомую комплексную частоту Ω и функцию $k(\phi)$ представим в виде рядов:

$$\Omega = \Omega_0 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \ldots, \tag{2.6}$$

$$k(\phi) = k(\phi_0) + \mu^{1/2}k'(\phi_0)\xi + \frac{1}{2}\mu k''(\phi_0)\xi^2 + \ldots$$

Учитывая (2.6), получаем

$$C = C_0 + \mu\Omega_1 C_1\text{, где } C_0 = \int_0^{+\infty}K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta\,,.\ C_1 = -i\int_0^{+\infty}\theta K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta\,.$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.4), предварительно исключив функцию f, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения $w_k(\xi)$, которая может быть записана в виде

$$\sum_{j=0}^{n} L_j w_{n-j} = 0, \quad \mathrm{n} = 0,1,2,... \tag{2.7}$$

где $L_0 y \equiv p^2 k^2(\phi_0)(1-C_0)(z+z^{-1})y - T_1 p^2 y - \Omega_0{}^2 y$,

а L_J $(\mathrm{j} \geq 1)$ – операторы, которые выражаются через L_0 и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Из условия существования ненулевого решения уравнения (2.7) при $n = 0$ следует два соотношения :

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = (z+z^{-1})p^2 k(\phi_0), \tag{2.8}$$

$$\frac{\omega_0{}^2 - \alpha_0{}^2}{1-B_0} + \frac{T_1 p^2}{1-B_0} = \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}, \tag{2.9}$$

где $z = \dfrac{\left(q^2+p^2\right)^2}{p^2 k\left(\phi_0\right)}$, $A_0 = -\operatorname{Im} C_0$, $B_0 = \operatorname{Re} C_0$. В силу (2.8), (2.9) ω_0 , α_0 – функции, зависящие от ϕ_0 , q .

Рассмотрим уравнение (2.7) при $n = 1$.

Учитывая, что $w(\xi) = A_m\xi^m + A_{m-1}\xi^{m-1} + ... + A_0$ – полином по ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получаем, что $\dfrac{\partial L_0}{\partial\phi} = 0$, $\dfrac{\partial L_0}{\partial q} = 0$, т.е. «наиболее слабая» образующая определяется из условия

$$k'(\phi_0^0) = 0; \tag{2.10}$$

а $q^0 = 0$ $(p > \sqrt{k(\phi_0^0)})$ или же

$$q = p(\sqrt{k(\phi_0^0)} - p) \quad (p < \sqrt{k(\phi_0^0)}) \tag{2.11}$$

Положим для удобства $k\left(\phi_0^0\right) = 1$.

Из формулы (2.9) при $B_0 = 0, \alpha_0 = 0$, получим выражение, определяющее наименьшую собственную частоту колебаний упругой оболочки с учетом однородного осевого усилия [4].

Таким образом, минимальная частота и соответствующий ей параметр α, который характеризует скорость затухания колебаний достигается либо при $z = 1$ ($q^{0^2} = p(1-p)$ $p < 1$) и определяются из уравнений

$$\text{А)} \quad \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = 2p^2 \qquad \frac{\omega_0{}^2 - \alpha_0{}^2}{1-B_0} + \frac{T_1 p^2}{1-B_0} = 2p^2 \tag{2.12}$$

либо при $q^0 = 0$ $(p > 1)$ и определяются из уравнений :

$$\text{Б)} \frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = p^4 + 1 \qquad \frac{\omega_0{}^2 - \alpha_0{}^2}{1-B_0} + \frac{T_1 p^2}{1-B_0} = p^4 + 1 \tag{2.13}$$

Каждый из этих случаев имеет место при определенных соотношениях между параметрами оболочки.

§3. Нахождение поправок к собственным частотам колебаний. Из условия существования решения уравнения (2.7) виде полинома

$$w_0(\xi) = A_m\xi^m + A_{m-1}\xi^{m-1} + ... + A_0$$

находим число

$$b = i\left[\operatorname{Re}\frac{\partial^2 L}{\partial \phi_0^2} / \operatorname{Re}\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\right]^{1/2}\Bigg|_{\substack{q=q^0\\ \phi=\phi_0^0}},$$

а также поправку $\mu\Omega_1$ к комплексной частоте колебаний

$$\Omega_{1n} = \left.\frac{i(n+1/2)b\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial q^2}}{N}\right|_{\substack{q=q^0\\ \phi_0=\phi_0^0}},$$

n – целое число.
В случае

$$\text{А)}\ p<1,\ b^2 = \frac{-k''(\phi_0^0)p^2}{16{q^0}^2}.$$

Поскольку $\operatorname{Im} b > 0$, то необходимо, чтобы $k''(\phi_0^0) > 0$. Соответствующие поправки к частоте и определяются по формулам

$$\omega_1 = \operatorname{Re}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}}{\Omega_0 + C_1(p^4-p^3+p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{3.1}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{Im}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}}{\Omega_0 + C_1(p^4-p^3+p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right].$$

В случае Б) $p>1$, $b^2 = \dfrac{-k''(\phi_0^0)p^2}{2(p^4-1)}$,

$$\omega_1 = \operatorname{Re}\left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4+1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{3.2}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{Im}\left[\frac{\sqrt{2}(1-C_0)k''(\phi_0^0)^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 + C_1(p^4+1))}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right].$$

При значениях p близких к единице, построенные ВКБ-решения становятся непригодными, поскольку при $\mathrm{p}=1 b \to \infty$ и слагаемое $\mu^2\Omega_2$, которое в (8) не вписано, также обращается в бесконечность [7].

§4. Колебания вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки под действием неоднородного осевого нагружения

Исследуется круговая цилиндрическая оболочка, радиус кривизны которой постоянен и равен единице.

Будем рассматривать случай, когда оболочка испытывает неоднородную осевую нагрузку $T_1^*(\phi) = EhT_1(\phi)$. В качестве исходных уравнений используем уравнения (1.1). На краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания (1.2). Решения уравнений ищется в виде (2.5).

Поскольку осевая нагрузка неоднородная и зависит от ϕ, мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую $\phi = \phi_0$, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний. Эта образующая находится из условий:

$$T_1'(\phi_0^0) = 0; \qquad T_1''(\phi_0^0) < 0. \tag{4.1}$$

Поправки к частоте в и декременту затухания в первом приближении для случая $p < 1$

$$\omega_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)^{1/2}\left|T_1''(\phi_0^0)\right|^{1/2}}{\Omega_0 m_\rho + C_1(p^4 - p^3 + p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right], \tag{4.2}$$

$$\alpha_1 = \mathrm{Im}\left[\frac{2p\sqrt{p-p^2}(1-C_0)^{1/2}\left|T''(\phi_0^0)\right|^{1/2}}{\Omega_0 m_\rho + C_1(p^4 - p^3 + p^2)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right],$$

а для случая $p > 1$

$$\omega_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{2\sqrt{2}(1-C_0)^{1/2}\left|T''(\phi_0^0)\right|^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 m_\rho + C_1(p^4+1))}\right], \tag{4.3}$$

$$\alpha_1 = \mathrm{Im}\left[\frac{2\sqrt{2}(1-C_0)^{1/2}\left|T''(\phi_0^0)\right|^{1/2}\sqrt{p^4-1}}{p(2\Omega_0 m_\rho + C_1(p^4+1))}\right].$$

При значениях p близких к единице построенные ВКБ- решения становятся непригодными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.:ГТТИ, 1956.-573с.
2. Матяш В. И. Колебания изотопных упруго-вязких оболочек // Механика полимеров. - 1971. - №1. - С.157-163.
3. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. //Прикладная механика. - 1992. - т.28, №1.- С. 50-55.
4. Михасев Г.И. К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек//Вестник Витебского гос. у-та. - 1997. - №1(3). - С. 61-66.
5. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. - С.416
6. Товстик П. Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. математ. и механика. 1983. т. 47. № 5. с. 815-822.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. - С. 320.
8. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные колебания вязкоупругой некруговой цилиндрической оболочки под действием однородного осевого нагружения.// Прикладная механика. - 1999. - т.28, №1.- С. 50-55