Белорусский Государственный Университет, г. Минск

ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННАЯ ТРЕЩИНА В АНИЗОТРОПНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Савенков В.А.

Two-dimensional elasticity solution and the stress intensity factors are determined for finite crack in one of the materials of biomaterial anisotropic composite.

Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации анизотропное упругое тело, состоящее из двух полупространств $D_j\,(j=1,2)$ с различными упругими постоянными. Границу полупространств берем за плоскость $y=0$. Индекс $j=1$ соответствует верхнему полупространству, а $j=2$ – нижнему.

Предположим, что нижнее полупространство содержит произвольно ориентированную трещину длиной $2l$, поверхность которой нагружена давлением $p=const$. Нагрузка на бесконечности отсутствует.
Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в такой области.

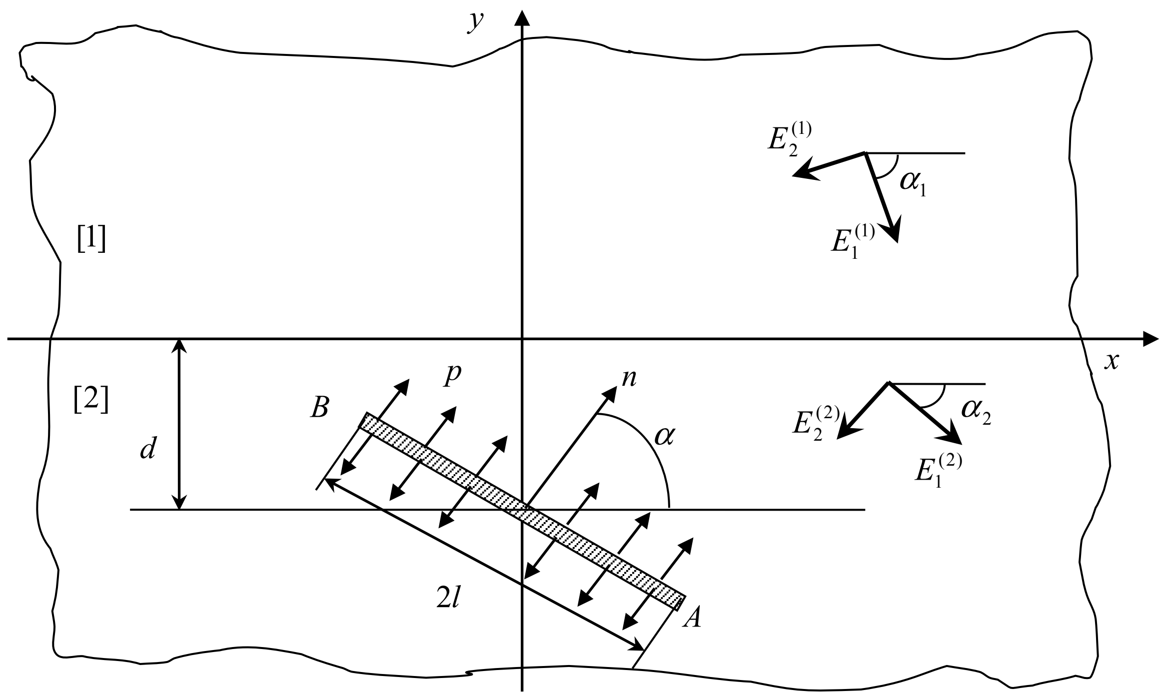

Рис.1 Расчетная схема задачи

Компоненты напряжений и смещений вычисляются по формулам [1]:

$$\left\{\sigma_x^{(j)},\sigma_y^{(j)},\tau_{xy}^{(j)}\right\}=2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2}\left(\mu_{\nu j}^2,1,-\mu_{j\nu}^2\right)\Phi_\nu^{(j)}(z_\nu^{(j)})\right\},$$

$$\left\{U^{(j)},V^{(j)}\right\}=2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2}\left(p_\nu^{(j)},q_\nu^{(j)}\right)\varphi_\nu^{(j)}(z_\nu^{(j)})\right\}.$$

Здесь $z_\nu^{(j)} = x + \mu_{\nu j} y$ – комплексная переменная; $\Phi_\nu^{(j)}(z_\nu^{(j)})$, $\varphi_\nu^{(j)}(z_\nu^{(j)})$ – аналитические функции в областях D_j; $\varphi'(z) = \Phi(z)$; $p_\nu^{(j)} = c_{11}^{(j)}\mu_{\nu j}^2 + c_{12}^{(j)} - c_{16}^{(j)}\mu_{\nu j}$, $\mu_{\nu j} q_\nu^{(j)} = c_{11}^{(j)}\mu_{\nu j}^2 + c_{22}^{(j)} - c_{26}^{(j)}\mu_{\nu j}$; $\mu_j = \mu_{\nu j}$ – корни характеристического уравнения

$$c_{11}^{(j)}\mu_j^4 - 2c_{16}^{(j)}\mu_j^3 + (2c_{12}^{(j)} + c_{66}^{(j)})\mu_j^2 - 2c_{26}^{(j)}\mu_j + c_{22}^{(j)} = 0,$$

$c_{kl}^{(j)}$ – коэффициенты закона Гука.

Для вывода исходного интегрального уравнения задачи воспользуемся фундаментальным решением о действии сосредоточенной силы в кусочно-однородном изотропном пространстве, построенном в работе [2].

В соответствии с этим решением комплексные потенциалы $\Phi_\nu^{(j)}$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) &= \frac{s_1 A_0}{z_1^{(1)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{s_2 B_0}{z_1^{(1)} - \tau_2^{(2)}}, \\
\Phi_2^{(1)}(z_2^{(1)}) &= \frac{l_1 A_0}{z_2^{(1)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{l_2 B_0}{z_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}}, \\
\Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)}) &= \frac{A_0}{z_1^{(2)} - \tau_1^{(2)}} + \frac{n_1 \overline{A_0}}{z_1^{(2)} - \overline{\tau_1^{(2)}}} + \frac{n_2 \overline{B_0}}{z_1^{(2)} - \overline{\tau_2^{(2)}}}, \\
\Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)}) &= \frac{B_0}{z_2^{(2)} - \tau_2^{(2)}} + \frac{m_1 \overline{A_0}}{z_2^{(2)} - \overline{\tau_1^{(2)}}} + \frac{m_2 \overline{B_0}}{z_2^{(2)} - \overline{\tau_2^{(2)}}}
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\tau_\nu^{(j)} = x_0 + \mu_{\nu j} y_0$ (x_0, y_0 – координаты приложения сосредоточенной силы $P(X_0, Y_0)$). Коэффициенты A_0, B_0 вычисляются через X_0, Y_0 при помощи системы четырех линейных алгебраических уравнений (два условия однозначности смещений и два статических условия) [3].

Коэффициенты $s_1, s_2, l_1, l_2, n_1, n_2, m_1, m_2$ находятся, удовлетворяя условиям идеального силового контакта при $y = 0$:

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)},\ U^{(1)} = U^{(2)},\ V^{(1)} = V^{(2)} \tag{2}$$

которые приводят к системе уравнений ($j = 1,2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \mu_{11} & \mu_{21} & -\overline{\mu_{12}} & -\overline{\mu_{22}} \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & -\overline{p_1^{(2)}} & -\overline{p_2^{(2)}} \\ q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & -\overline{q_1^{(2)}} & -\overline{q_2^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ l_i \\ \overline{n_i} \\ \overline{m_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_{i2} \\ p_i^{(2)} \\ q_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что вдоль трещины L действуют непрерывно распределенные усилия интенсивности $P(t)$. Тогда искомые функции $\Phi_\nu^{(j)}(z_\nu^{(j)})$, описывающие поле напряжений в кусочно-однородной плоскости с трещиной, на основании формул (1), можно представить как результат суперпозиций (ds – элемент отрезка L):

$$\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) = \int_L \frac{s_1 A_0(t)ds}{z_1^{(1)} - t_1^{(2)}} + \int_L \frac{s_2 B_0(t)ds}{z_1^{(1)} - t_2^{(2)}},$$

$$\Phi_2^{(1)}(z_2^{(1)}) = \int_L \frac{l_1 A_0(t)ds}{z_2^{(1)} - t_1^{(2)}} + \int_L \frac{l_2 B_0(t)ds}{z_2^{(1)} - t_2^{(2)}},$$

$$\Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)})=\int_L\frac{A_0(t)ds}{z_1^{(2)}-t_1^{(2)}}+\int_L\frac{n_1\overline{A_0(t)}ds}{z_1^{(2)}-\overline{t_1^{(2)}}}+\int_L\frac{n_2\overline{B_0(t)}ds}{z_1^{(2)}-\overline{t_2^{(2)}}},$$

$$\Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)})=\int_L\frac{B_0(t)ds}{z_2^{(2)}-t_2^{(2)}}+\int_L\frac{m_1\overline{A_0(t)}ds}{z_2^{(2)}-\overline{t_1^{(2)}}}+\int_L\frac{m_2\overline{B_0(t)}ds}{z_2^{(2)}-\overline{t_2^{(2)}}};$$

Положим $a_\nu=\mu_{\nu 2}\cos\alpha-\sin\alpha,(\nu=1,2)$, где α – угол между положительный направлением нормали к левому берегу трещины при движении от A к B в точке t и осью Ox.

Учитывая формулу $dt_\nu=a_\nu ds$ и вводя функции $r(t)=-\dfrac{2\pi i A_0(t)}{a_\nu}$, $q(t)=-\dfrac{2\pi i B_0(t)}{a_\nu}$, перепишем предыдущие формулы так:

$$\Phi_1^{(2)}(z_1^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{r(t)dt_1^{(2)}}{t_1^{(2)}-z_1^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{n_1\overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{\overline{t_1^{(2)}}-z_1^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{n_2\overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{\overline{t_2^{(2)}}-z_1^{(2)}},$$

$$\Phi_2^{(2)}(z_2^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(t)dt_2^{(2)}}{t_2^{(2)}-z_2^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{m_1\overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{\overline{t_1^{(2)}}-z_2^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{m_2\overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{\overline{t_2^{(2)}}-z_2^{(2)}}.$$

Так определенные функции автоматически обеспечивают выполнение нулевых граничных условий на бесконечности и условий на границе раздела (2).

Так как все операции интегрирования совершаются в плоскости z (вдоль L), то везде под переменными t_1,t_2 следует подразумевать их выражения через переменную t:

$$t_\nu=\mathrm{Re}(t)+\mu_\nu\,\mathrm{Im}(t),t\in L$$

Функции $r(t),q(t)$ определяются из краевых условий на берегах разреза L и дополнительных условий однозначности смещений.

Краевые условия на L зададим в виде [4]:

$$a\Phi_1^{(2)\pm}(t_1^{(2)})+b\overline{\Phi_1^{(2)\pm}(t_1^{(2)})}+\Phi_2^{(2)\pm}(t_2^{(2)})=F^\pm(t),t\in L \tag{3}$$

где $a=\dfrac{a_0a_1}{a_2}$, $b=\dfrac{b_0\overline{a_1}}{a_2}$, $a_0=\dfrac{\mu_{12}-\mu_{22}}{\mu_{22}-\overline{\mu_{22}}}$, $b_0=\dfrac{\overline{\mu_{12}}-\overline{\mu_{22}}}{\mu_{22}-\overline{\mu_{22}}}$, $F^\pm=\dfrac{-p(\cos\alpha+\overline{\mu_{22}}\sin\alpha)}{a_2(\mu_{22}-\overline{\mu_{22}})}$.

Так как функции $\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu^{(2)})$, на основании формул Сохоцкого-Племеля [5], имеют при стремлении к точке $z^{(2)}$ области D_2 и некоторой точке t_0 отрезка L предельные значения

$$\Phi_1^{(2)\pm}(t_{10}^{(2)})=\pm\frac{r(t_0)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{r(t)dt_1^{(2)}}{t_1^{(2)}-t_{10}^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{n_1\overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{\overline{t_1^{(2)}}-t_{10}^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{n_2\overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{\overline{t_2^{(2)}}-t_{10}^{(2)}}$$

$$\Phi_2^{(2)\pm}(t_{20}^{(2)})=\pm\frac{q(t_0)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(t)dt_2^{(2)}}{t_2^{(2)}-t_{20}^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{m_1\overline{r(t)}d\overline{t_1^{(2)}}}{\overline{t_1^{(2)}}-t_{20}^{(2)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{m_2\overline{q(t)}d\overline{t_2^{(2)}}}{\overline{t_2^{(2)}}-t_{20}^{(2)}}$$

то вычитая из первого предельного равенства (3) второе, будем иметь:

$$ar(t)+b\overline{r(t)}+q(t)=0,t\in L \tag{4}$$

Складывая предельные равенства (3), приходим с учетом (4) к сингулярному интегральному уравнению относительно $r(t)$, которое после замены переменных $t=-i\delta l+sle^{i(\alpha-\pi/2)}$, $t_0=-i\delta l+s_0le^{i(\alpha-\pi/2)}$ принимают вид:

$$\int_{-1}^{1}\left[K(s,s_0)r(s)+L(s,s_0)\overline{r(s)}\right]ds=\pi\psi(s_0),s_0\in[-1,1],\delta=d/l \tag{5}$$

где

$$K(s,s_0)=\frac{1}{s-s_0}+\frac{1}{2b_0}\left[\frac{\overline{n_1 a_0 a_1}}{\overline{f_1(s,s_0)}}+\frac{\overline{m_1 a_2}}{f_2(s,s_0)}-\frac{\overline{m_2 a_0}\,\overline{a_2}}{f_3(s,s_0)}-\frac{\overline{n_2 a_0 a_0}\,\overline{a_1}}{\overline{f_4(s,s_0)}}+\frac{n_2\overline{b_0^2}a_1}{f_4(s,s_0)}\right],$$

$$L(s,s_0)=-\frac{1}{2}\left[\frac{n_1\overline{a_1}}{f_1(s,s_0)}+\frac{\overline{m_2 b_0}\,\overline{a_1 a_2}}{a_1\overline{b_0}f_3(s,s_0)}+\frac{\overline{n_2 a_0 b_0 a_1^2}}{a_1\overline{b_0}f_4(s,s_0)}-\frac{n_2\overline{a_0}a_1}{f_4(s,s_0)}\right],$$

$$f_1(s,s_0)=\omega(s,s_0)+\delta(\mu_{12}-\mu_{12})+(\mu_{12}s_0-\overline{\mu_{12}}s)\cos\alpha\,,$$

$$f_2(s,s_0)=\omega(s,s_0)+\delta(\overline{\mu_{22}}-\mu_{12})+(\overline{\mu_{22}}s_0-\mu_{12}s)\cos\alpha\,,$$

$$f_3(s,s_0)=\omega(s,s_0)+\delta(\overline{\mu_{22}}-\mu_{22})+(\overline{\mu_{22}}s_0-\mu_{22}s)\cos\alpha$$

$$f_4(s,s_0)=\omega(s,s_0)+\delta(\mu_{12}-\mu_{22})+(\mu_{12}s_0-\overline{\mu_{22}}s)\cos\alpha\,,$$

$$\omega(s,s_0)=(s-s_0)\sin\alpha,\ \psi(s_0)=-i\frac{p(\cos\alpha+\mu_{22}\sin\alpha)}{\overline{a_2}(\overline{\mu_{22}}-\mu_{22})}$$

Условие однозначности смещений записываются в виде:

$$\int_{-1}^{1}r(s)ds=0\,. \tag{6}$$

Численное решение интегрального уравнения (5) получим методом механических квадратур [6].

Решение уравнения будем искать в виде:

$$r(s)=\frac{r^*(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,. \tag{7}$$

Для вычисления регулярных интегралов будем пользоваться квадратурной формулой Гаусса-Чебышева [6]

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(s)ds}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(s_k),s_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),(k=\overline{1,n}), \tag{8}$$

а для вычисления сингулярного интеграла формулой:

$$\int_{-1}^{1}\frac{r^*(s)ds}{\sqrt{1-s^2}(s-s_{0m})}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k^*}{s_k-s_{0m}},r_k^*=r^*(s_k),s_{0m}=\cos\left(\frac{\pi m}{n}\right). \tag{9}$$

Применив квадратурные формулы (8) и (9) к уравнению (5) и интегралу (6) придем к системе алгебраических уравнений для неизвестных постоянных r_k^*:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(r_{k1}\alpha_{km}^{+}-r_{k2}\beta_{km}^{-}\right)=\varphi_1\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(r_{k1}\beta_{km}^{+}+r_{k2}\alpha_{km}^{-}\right)=\varphi_2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}r_{k1}=0,\sum\limits_{k=1}^{n}r_{k2}=0,m=\overline{1,n-1}\end{cases} \tag{10}$$

где $r_{k1}+ir_{k2}=r_k^*$, $\alpha_{km}^{\pm}+i\beta_{km}^{\pm}=\dfrac{1}{n}\left[K(s_k,s_{0m})\pm L(s_k,s_{0m})\right]$, $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$.

После решения этой системы уравнений можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений у концов трещины [6]

$$
\begin{cases}
k_1^{\pm} = \pm p\sqrt{l}\left[R^{\pm}\cos^2\alpha + T^{\pm}\sin^2\alpha - S^{\pm}\sin 2\alpha\right] \\
k_2^{\pm} = \pm p\sqrt{l}\left[(T^{\pm} - R^{\pm})\cos\alpha\sin\alpha - S^{\pm}\cos 2\alpha\right]
\end{cases}, \qquad (11)
$$

где $R^{\pm} = \mathrm{Re}\{i\left[\mu_{22}^2\overline{r^*(\pm1)} - (\mu_{12}^2 - \mu_{22}^2)r^*(\pm1)\right]\}$, $T^{\pm} = \mathrm{Re}[i\overline{r^*(\pm1)}]$,

$$
S^{\pm} = \mathrm{Re}\{i\left[\mu_{22}^2\overline{r^*(\pm1)} - (\mu_{12} - \mu_{22})r^*(\pm1)\right]\},\ r^*(1) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k r_k^* ctg\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right),
$$

$$
r^*(-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n} r_k^* tg\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right).
$$

Верхний знак относится к правому концу трещины, а нижний – к левому.

Таблица 1.

Коэффициенты интенсивности напряжений $(k_i / p\sqrt{l})$

α	δ	e_{11}, e_{12}	4., 10.	4., 10.	4., 10.	1.1, 8.	1.1, 8.	1.1, 8.
		e_{22}, e_{21}	2., 9	1.4, 7.	1.1, 8.	4., 10	1.4, 7.	2., 9.
45	2	k_1^-	0.77	0.71	0.73	0.83	0.72	0.80
		k_1^+	0.99	0.79	0.71	0.90	0.78	0.96
		k_2^-	-0.027	-0.059	-0.039	-0.018	-0.053	-0.024
		k_2^+	-0.033	-0.061	-0.038	-0.024	-0.051	-0.026
45	3	k_1^-	0.70	0.67	0.69	0.72	0.66	0.71
		k_1^+	0.75	0.69	0.74	0.71	0.67	0.73
		k_2^-	-0.02	-0.050	-0.033	-0.0032	-0.040	-0.090
		k_2^+	-0.02	-0.056	-0.035	-0.0038	-0.039	-0.010
30	2	k_1^-	0.46	0.45	0.44	0.50	0.45	0.47
		k_1^+	0.47	0.70	0.48	0.69	0.53	0.38
		k_2^-	0.20	0.14	0.17	0.24	0.16	0.22
		k_2^+	0.21	0.23	0.18	0.33	0.18	0.17
90	2	k_1^-	0.58	0.55	0.56	0.61	0.55	0.59
		k_1^+	0.61	0.57	0.58	0.66	0.67	0.67
		k_2^-	0.74	0.69	0.70	0.71	0.63	0.68
		k_2^+	0.78	0.71	0.74	0.80	0.72	0.80

В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений, вычисленных по формулам (11) в зависимости от ориентации трещины, расстояния до линии раздела и соотношения упругих постоянных

$$
e_{11} = \frac{E_1^{(1)}}{E_2^{(1)}},\ e_{12} = \frac{E_1^{(1)}}{G_{12}^{(1)}},\ e_{22} = \frac{E_1^{(2)}}{E_2^{(2)}},\ e_{21} = \frac{E_1^{(2)}}{G_{12}^{(2)}}
$$

При некоторых значениях этих параметров коэффициенты интенсивности напряжений принимают отрицательные значения. Такого рода эффекты наблюдаются при решении других задач, например, задачи о трещине в упругой полуплоскости [6]. Следует иметь в виду, что такие величины самостоятельного значения не имеют, поскольку в этом случае необходимо решать задачу в постановке, учитывающей контакт берегов. Однако отрицательные значения k в силу линейности задачи могут быть использованы для суперпозиции некоторых видов нагрузки, при действии которых суммарное значение k положительно

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.-416с.
2. Савенков, В.А. Кусочно-однородная ортотропная плоскость под действием сосредоточенной силы / В.А. Савенков, А.А. Кушунин // Вестник БГУ, сер.1 – 2005. - №3 – с.108-110.
3. Прусов, И.А. Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Мн.: Изд-во БГУ, 1978. – 200с.
4. Фильштинский, Л.А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами / Л.А. Фильштинский // Изв. АН СССР, МТТ. – 1976. - №5. – с.91 – 97.
5. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – 511с.
6. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П, Саврук. – Киев: Навукова думка, 1981. – 324с.