

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАВНОПРОЧНЫХ УПРУГИХ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОСИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ*

Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В.

The design task of heterogeneous construction element with thermo-force loading is formulated on the basis following suppositions and determined correlations: shell's thinness, Kirchhoff's hypothesis, Duhamel-Neumann's law for temperature stress, Fourier's heat transfer law, equal-strong criterion, and equation of shells linear theory. Basis peculiarities of shells strain-stress state with equal strain intensity on external layers surfaces are revealed by numerical decision of formulated nonlinear border task.

Проектированию упругих равнопрочных слоистых оболочек вращения без учета термосиловых воздействий посвящены работы [1-7]. Выявлены особенности поведения и эффективность по весу или стоимости рассмотренных оболочек по сравнению с эталонными оболочками. Показано, что в результате решения задачи проектирования равнопрочных оболочек не всегда возможно удовлетворение всех классических граничных условий в рамках теории оболочек Кирхгофа-Лява. Поставлена и решена задача проектирования двухслойной упругой равнопрочной эллипсоидальной оболочки с варьированием поверхности спая слоев. Полученные решения свидетельствуют о расширении возможностей удовлетворения всех классических граничных условий оболочек. Из полученных решений также следует, что с варьированием поверхности спая слоев сохраняется основное свойство равнопрочных проектов – условие равнопрочности (условие текучести Мизеса) на внешних поверхностях слоев влечет выполнение этого условия по всему объему при определенном выборе материалов слоев оболочки.

В настоящей работе исследовано напряженно-деформированное состояние слоистых эллипсоидальных оболочек вращения в условиях термосилового воздействия и выполнения критерия равнопрочности на внешних поверхностях слоев. Показано, что конструктивная неоднородность, нормальная анизотропия, непрерывность теплового потока и разрывы напряжений при постоянной положительной температуре на внешних поверхностях слоев ведут к возрастанию, а при отрицательных температурах на внешних поверхностях слоев – к уменьшению интенсивностей напряжений на поверхности спая слоев по сравнению с интенсивностями напряжений на внешних поверхностях слоев оболочки.

Рассмотрим двухслойную осесимметрично нагруженную эллипсоидальную оболочку вращения в системе координат θ и φ , направленных вдоль меридиана и параллели отсчетной поверхности, соответственно, и координатой \bar{z} , совпадающей с внешней нормалью к той же поверхности. Первая квадратичная форма отсчетной поверхности:

$$dl^2 = R_1^2 d\theta^2 + R_2^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

где dl – длина линейного элемента, θ – угол между внешней нормалью и осью вращения,

φ – угол между текущим и начальным меридианными сечениями, $R_1 = R_\theta$ и $R_2 = R_\varphi$ – главные радиусы кривизны отсчетной поверхности оболочки.

Главные кривизны \bar{k}_1 и \bar{k}_2 определим из выражений:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-08-00152-а)

$$k_1 = \frac{1}{b_a^2 a_h} (\sin^2 \theta + b_a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}, k_2 = \frac{1}{a_h} (\sin^2 \theta + b_a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (2)$$

Здесь

$$k_i = \bar{k}_i \bar{H}_0, k_i = 1/r_i, r_i = R_i/\bar{H}_0, a_h = a/\bar{H}_0, b_a = b/a,$$

где a и b – горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса, $2\bar{H}_0$ – постоянная толщина эталонной оболочки, служащей для сравнения с ней рациональных проектов оболочек при одинаковых геометриях, нагружениях и опираниях.

Оболочка выполнена из двух ортотропных слоев: внешнего (первого), $H_0 \leq \bar{z} \leq Z_1$, и внутреннего (второго), $-Z_2 \leq \bar{z} \leq H_0$, $z = H_0(\theta)$ – задаваемая аппликация поверхности спая слоев до отсчетной поверхности, $Z_1 = H_0 + H_1$, $Z_2 = H_2 - H_0$, H_1 и H_2 – толщины слоев, $H = H_1 + H_2$ – полная толщина оболочки. Механические характеристики материалов слоев предполагаются различными: $E_{i(k)}$ – модули упругости; $\nu_{(k)}$, $\nu_{12(k)}$, $\nu_{21(k)}$ – коэффициенты ортотропии; $\alpha_{i(k)}$ – коэффициенты линейного теплового расширения, ($i, k = 1, 2$). Предположим, что геометрической нелинейностью можно пренебречь.

Уравнения равновесия оболочки [4]:

$$k_1 \frac{d(rn_{11})}{d\theta} - n_{22} \cos \theta + r(k_1 q_1 + q_\theta) = 0, k_1 \frac{d(rq_1)}{d\theta} - r(k_1 n_{11} + k_2 n_{22} - q_n) = 0, \\ k_1 \frac{d(rm_{11})}{d\theta} - m_{22} \cos \theta - 2rq_1 = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$n_{ii} = N_{ii}/N_0, m_{ii} = M_{ii}/M_0, q_1 = Q_1/Q_0, q_\theta = \bar{q}_\theta/q_0, q_n = \bar{q}_n/q_0, \\ r = r_2 \sin \theta, N_0 = Q_0 = 2\sigma_0 \bar{H}_0, M_0 = \sigma_0 \bar{H}_0^2, q_0 = 2\sigma_0,$$

где N_{ii}, M_{ii} и Q_1 – усилия, моменты и перерезывающая сила, σ_0 – предел текучести эталонной, \bar{q}_θ и \bar{q}_n – меридианная и нормальная нагрузки оболочки.

Деформации и изменения кривизн $\bar{\kappa}_i$ отсчетной поверхности:

$$\varepsilon_{01} = k_1 \frac{du}{d\theta} + k_1 w, \varepsilon_{02} = \frac{u \cos \theta}{r} + k_2 w, \kappa_1 = k_1 \frac{d\vartheta}{d\theta}, \kappa_2 = \frac{\cos \theta}{r} \vartheta, \vartheta = k_1 \left(u - \frac{dw}{d\theta} \right). \quad (4)$$

Здесь

$$\kappa_i = \bar{H}_0 \bar{\kappa}_i, u = U/\bar{H}_0, w = W/\bar{H}_0,$$

где U и W – меридианное и нормальное перемещения.

Введем вектор-столбцы напряжений $\bar{\sigma}_{(k)}$, деформаций $\bar{\varepsilon}_0$, изменений кривизн $\bar{\kappa}$, усилий \bar{n} , моментов \bar{m} и коэффициентов линейного теплового расширения $\bar{\alpha}_{(k)}$:

$$\bar{\sigma}_{(k)} = (\sigma_{1(k)}, \sigma_{2(k)})', \bar{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02})', \bar{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)', \bar{n} = (n_{11}, n_{22})', \\ \bar{m} = (m_{11}, m_{22})', \bar{\alpha}_{(k)} = (\alpha_{1(k)}, \alpha_{2(k)})', 2\bar{n} = \int_{-z_2}^{h_0} \bar{\sigma}_{(2)} dz + \int_{h_0}^{z_1} \bar{\sigma}_{(2)} dz, \\ \bar{m} = \int_{-z_2}^{h_0} \bar{\sigma}_{(k)} z dz + \int_{h_0}^{z_1} \bar{\sigma}_{(1)} z dz, z = \bar{z}/\bar{H}_0, h_i = H_i/\bar{H}_0, h_0 = H_0/\bar{H}_0, \\ z_i = Z_i/\bar{H}_0, \sigma_{i(k)} = s_{i(k)}/\sigma_0, (i, k = 1, 2),$$

где $s_{i(k)}$ – главные напряжения в k -м слое.

Полагая, что при деформировании каждого слоя выполняется закон Дюамеля-Неймана и что вследствие малости полной толщины оболочки распределение температуры по координате z может быть с достаточной степенью точности аппроксимировано кусочно-линейным распределением, будем иметь:

$$\bar{\sigma}_{(k)} = A_{(k)} [\bar{\epsilon}_0 + z\bar{\kappa} - \bar{\alpha}_{(k)} T_{(k)}], T_{(k)} = T_{1(k)} + (z - h_0)t_{2(k)}, \quad (5)$$

$$2\bar{n} = [A_{(1)}(z_1 - h_0) + A_{(2)}(z_2 + h_0)]\bar{\epsilon}_0 + (1/2)[A_{(1)}(h_1^2 + 2h_0h_1) - A_{(2)}(h_2^2 - 2h_0h_2)]\bar{\kappa} + 2\bar{n}_t, \quad (6)$$

$$3\bar{m} = (3/2)[A_{(1)}(h_1^2 + 2h_0h_1) - A_{(2)}(h_2^2 - 2h_0h_2)]\bar{\epsilon}_0 + [A_{(1)}[(h_0 + h_1)^3 - h_0^3] + A_{(2)}[h_0^3 - (h_0 - h_2)^3]]\bar{\kappa} + 3\bar{m}_t, \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{n}_t &= (n_{11t}, n_{22t})', \quad \bar{m}_t = (m_{11t}, m_{22t})', \\ 2\bar{n}_t &= (T_{1(1)}h_1 + t_{2(1)}h_1^2/2)A_{(1)}\bar{\alpha}_{(1)} - (T_{1(2)}h_2 - t_{2(2)}h_2^2/2)A_{(2)}\bar{\alpha}_{(2)} \\ \bar{m}_t &= A_{(2)}\bar{\alpha}_{(2)}[T_{1(2)}(z_2^2 - h_0^2)/2 + t_{2(2)}h_2^2(3h_0 - 2h_2)/6] - \\ &\quad - A_{(1)}\bar{\alpha}_{(1)}[T_{1(1)}(z_1^2 - h_0^2)/2 - t_{2(1)}h_1^2(3h_0 + h_1)/6], \\ A_{(k)} &= (A_{ij(k)}), \quad (i, j = 1, 2), \quad A_{11(k)} = e_{1(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \\ A_{12(k)} &= e_{1(k)}\mathbf{v}_{12(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \quad A_{22(k)} = e_{2(k)}/\tilde{\nu}_{(k)}, \quad A_{21(k)} = A_{12(k)}, \\ e_{i(k)} &= E_{i(k)}/\sigma_0, \quad \tilde{\nu}_{(k)} = 1 - \mathbf{v}_{12(k)}\mathbf{v}_{21(k)}, \quad t_{2(k)} = T_{2(k)}\bar{H}_0, \end{aligned}$$

где $T_{1(k)}$ и $T_{2(k)}$ – коэффициенты кусочно-линейного распределения температуры по толщине оболочки.

Для исследования температурного поля в слоистой оболочке примем следующие допущения.

1) Тепловые потоки из одного слоя в другой равны, то есть с учетом закона Фурье

$$\lambda_1 \text{grad}_n T_{(1)} = \lambda_2 \text{grad}_n T_{(2)}, \quad (8)$$

где λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности первого и второго слоя, n – нормаль к поверхности сая.

2) Температура изменяется непрерывно на поверхности сая слоев, что приводит к равенству

$$T_{1(1)} = T_{1(2)} \quad (9)$$

3) На внешних поверхностях температурное поле задано, то есть

$$T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)} = T_1(\theta), \quad T_{1(2)} + h_2 t_{2(2)} = T_2(\theta) \quad (10)$$

На основании допущений (8) – (10) получим дифференциальное уравнение для коэффициента $T_{1(1)}$ и алгебраические равенства для остальных коэффициентов распределения температуры

$$\frac{dT_{1(1)}}{d\theta} + PT_{1(1)} = Q, \quad T_{1(2)} = T_{1(1)}, \quad t_{2(1)} = \frac{T_1 - T_{1(1)}}{h_1}, \quad t_{2(2)} = -\frac{T_2 - T_{1(1)}}{h_2}, \quad (11)$$

где

$$P = -\frac{ctg\beta}{(\lambda_2 - \lambda_1)k_1} \left(\frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda_2}{h_2} \right), \quad Q = -\frac{ctg\beta}{(\lambda_2 - \lambda_1)k_1} \left(\frac{\lambda_1 T_1}{h_1} + \frac{\lambda_2 T_2}{h_2} \right), \quad tg\beta = k_1 \frac{dh_0}{d\theta},$$

β – угол между нормальными к поверхности сая и отсчетной поверхности.

Из уравнения и равенств (11) нетрудно получить выражения для коэффициентов в частных случаях.

Если $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx 0$, то

$$T_{1(1)} = \frac{\lambda_2 T_2 h_1 + \lambda_1 T_1 h_2}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2}, T_{1(2)} = T_{1(1)} t_{2(1)} = \frac{\lambda_2 (T_1 - T_2)}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2}, t_{2(2)} = \frac{\lambda_1 t_{2(1)}}{\lambda_2}. \quad (12)$$

В другом частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, получим

$$T_{1(2)} = T_{1(1)} = \frac{T_1 h_2 + T_2 h_1}{h_1 + h_2}, t_{2(2)} = t_{2(1)} = \frac{T_1 - T_2}{h_1 + h_2}.$$

Критерий Мизеса-Хилла равнопрочного проекта на поверхностях $z = h_1$, ($k = 1$), и $z = -h_2$, ($k = 2$), [4]:

$$\tau_k^2 = a_{(k)}^2 \sigma_{1(k)}^2 + 2b_{(k)} \sigma_{1(k)} \sigma_{2(k)} + c_{2(k)}^2 \sigma_{2(k)}^2 = \tau_{(k)}^2, \quad (13)$$

где $a_{(k)}$, $b_{(k)}$, $c_{(k)}$, $\tau_{(k)}$ – определяемые из эксперимента константы материала.

Равенства (13) будут тождественно удовлетворены, если принять

$$\sigma_{1(k)} = K_{1(k)} \sin \omega_k + K_{2(k)} \cos \omega_k \equiv \sigma_{1(k)}^*, \quad (14)$$

$$\sigma_{2(k)} = K_{3(k)} \cos \omega_k \equiv \sigma_{2(k)}^*, \quad (15)$$

где

$$K_{1(k)} = \frac{\tau_{(k)}}{a_{(k)}}, K_{2(k)} = -\frac{b_{(k)} \tau_{(k)}}{a_{(k)} d}, K_{3(k)} = \frac{a_{(k)} \tau_{(k)}}{d}, d = \sqrt{a_{(k)}^2 c_{(k)}^2 - b_{(k)}^2}.$$

Учитывая соотношения (14) – (15) и затем закон Дюамеля-Неймана (5), условия равнопрочности (13) можно записать в виде:

$$A_{(k)}^{-1} \sigma_{(k)}^* = \bar{\varepsilon}_0 + (-1)^{k+1} z_k \bar{\kappa} - \alpha_{(k)} T_{(k)}^*, \quad (k = 1, 2), \quad (16)$$

где $\bar{\sigma}_{(k)}^* = (\sigma_{1(k)}^*, \sigma_{2(k)}^*)'$ – вектор-столбцы напряжений на соответствующих наружных поверхностях слоев оболочки, при этом

$$T_{(k)}^* = T_{1(k)} + (-1)^{k+1} h_k t_{2(k)}.$$

Из равенства (16) получим условия равнопрочности в эквивалентной форме:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{h} (z_2 \bar{A} + z_1 \bar{B}) + \bar{\varepsilon}'_0, \quad \bar{\kappa} = \frac{1}{h} (\bar{A} - \bar{B}) + \bar{\kappa}'_t. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}'_0 &= [z_2 \bar{\alpha}_{(1)} (T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)}) + z_1 \bar{\alpha}_{(2)} (T_{1(2)} - h_2 t_{2(2)})] / h, \\ \bar{\kappa}'_t &= [\bar{\alpha}_{(1)} (T_{1(1)} + h_1 t_{2(1)}) - \bar{\alpha}_{(2)} (T_{1(2)} - h_2 t_{2(2)})] / h, \\ \bar{A} &= A_{(1)}^{-1} \bar{\sigma}_{(1)}^* + \bar{\alpha}_{(1)} T_1^*, \quad \bar{B} = A_{(2)}^{-1} \bar{\sigma}_{(2)}^* + \alpha_{(2)} T_{(2)}^*, \quad A_{(k)}^{-1} = (B_{ij(k)}) \\ B_{11(k)} &= A_{22(k)} / \Delta_{(k)}, \quad B_{12(k)} = -A_{12(k)} / \Delta_{(k)}, \quad B_{21(k)} = B_{12(k)}, \\ \Delta_{(k)} &= A_{11(k)} A_{22(k)} - A_{12(k)} A_{21(k)}, \quad h = h_1 + h_2, \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned}$$

На основании равенства (4), получим условия совместности деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_{02}}{d\theta} = \frac{r_1}{r_2} (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}) \operatorname{ctg} \theta - r_1 \kappa_2 \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d\kappa_2}{d\theta} = \frac{r_1}{r_2} (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ctg} \theta - \kappa_2 \operatorname{tg} \theta, \quad (18)$$

Из второго и четвертого равенств (4) следует дифференциальное уравнение для определения прогиба w :

$$\frac{dw}{d\theta} = r_1 r_2 (k_1 (\varepsilon_{02} - k_2 w) - \kappa_2) \operatorname{tg} \theta. \quad (19)$$

Уравнения (3), (18)-(19) и (11) представляют полную систему из семи нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющих равнопрочные проекты двухслойных эллипсоидальных оболочек вращения с переменными толщинами слоев.

Для удобства записи полученной системы уравнений введем вектор-столбцы искоемых функций $\bar{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)'$ и правых частей $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)'$, где

$$y_1 = \omega_1, y_2 = \omega_2, y_3 = h_1, y_4 = h_2, y_5 = q_1, y_6 = w, y_7 = T_{1(1)}. \quad (20)$$

Система уравнений (3), (18) – (19) примет вид:

$$A \frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \bar{f}. \quad (21)$$

Здесь $A = (a_{i,j})$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), — матрица переменных коэффициентов, элементы $a_{i,j}$ которой определяются из выражений:

$$\begin{aligned} a_{1,l} &= D_{n11} D_{\omega l}, \quad a_{1,l+2} = D_{n11} D_{hl} + \partial n_{11} / \partial h_l + D_{n11}' D_{hl}' + \partial n_{11}' / \partial h_l, \quad a_{2,l} = D_{m11} D_{\omega l}, \\ a_{2,l+2} &= D_{m11} D_{hl} + \partial m_{11} / \partial h_l + D_{m11}' D_{hl}' + \partial m_{11}' / \partial h_l, \quad a_{3,l} = \partial \varepsilon_{02} / \partial \omega_l, \\ a_{3,l+2} &= \partial \varepsilon_{02} / \partial h_l, \\ a_{4,l} &= \partial \kappa_2 / \partial \omega_l, \quad a_{4,l+2} = \partial \kappa_2 / \partial h_l, \\ a_{5,5} &= 1, \quad a_{6,6} = 1, \quad a_{77} = 1, \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \quad (22)$$

где введены обозначения вектор-строк и вектор-столбцов,

$$\begin{aligned} D_{n11} &= \left(\frac{\partial n_{11}}{\partial \varepsilon_{01}}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \varepsilon_{02}}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \kappa_1}, \frac{\partial n_{11}}{\partial \kappa_2} \right), \quad D_{\omega l} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{01}}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \kappa_1}{\partial \omega_l}, \frac{\partial \kappa_2}{\partial \omega_l} \right), \\ D_{hl} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{01}}{\partial h_l}, \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial h_l}, \frac{\partial \kappa_1}{\partial h_l}, \frac{\partial \kappa_2}{\partial h_l} \right), \quad D_{n11}' = \left(\frac{\partial n_{11}'}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial n_{11}'}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial n_{11}'}{\partial t_{1(1)}}, \frac{\partial n_{11}'}{\partial t_{1(2)}} \right), \\ D_{hl}' &= \left(\frac{\partial T_{1(1)}}{\partial h_l}, \frac{\partial T_{1(2)}}{\partial h_l}, \frac{\partial t_{2(1)}}{\partial h_l}, \frac{\partial t_{2(2)}}{\partial h_l} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение для D_{m11} , D_{m11}' получим из выражения (23) для D_{n11} , D_{n11}' заменой n_{11} на m_{11} . Невыписанные элементы матрицы A равны нулю. Частные производные в выражениях (22) – (23) определяются по известным функциям (6) – (7), (19) – (20), (22), причем вторые и четвертые слагаемые в равенствах (22) вычисляются с фиксированными деформациями, изменениями кривизн и функциями распределения температуры.

Компоненты вектора правых частей уравнения (21) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{r_1}{r_2} (n_{22} - n_{11}) ctg\theta - q_1 - r_1 q_\theta - f_{10}, \quad f_2 = \frac{r_1}{r_2} (m_{22} - m_{11}) ctg\theta + 2r_1 q_1 - f_{20}, \\ f_3 &= \frac{r_1}{r_2} (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{02}) ctg\theta - r_1 \kappa_2 tg\theta - f_{30}, \quad f_4 = \frac{r_1}{r_2} (\kappa_1 - \kappa_2) ctg\theta - \kappa_2 tg\theta - f_{40}, \\ f_5 &= r_1 (k_1 n_{11} + k_2 n_{22} - k_2 q_1 ctg\theta), \quad f_6 = r_1 r_2 [k_1 (\varepsilon_{02} - k_2 w) - \kappa_2] g\theta, \\ f_7 &= Q - P y_7. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{10} &= \frac{\partial n_{11}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{10}', \quad f_{20} = \frac{\partial m_{11}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{20}', \quad f_{30} = \frac{\partial \varepsilon_{02}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + f_{30}', \quad f_{40} = f_{40}', \\ f_{10}' &= D_{n11}' D_{T\theta} + D_{n11} D_{\theta}'^T, \quad f_{20}' = D_{m11}' D_{T\theta} + D_{m11} D_{\theta}'^T, \quad f_{30}' = D_{\theta}'^T (2), \quad f_{40}' = D_{\theta}'^T (4), \end{aligned}$$

$$D_{T\theta} = \left(\frac{dT_{1(1)}}{d\theta}, \frac{dT_{1(2)}}{d\theta}, \frac{dt_{2(1)}}{d\theta}, \frac{dt_{2(2)}}{d\theta} \right)', \quad D_{01i}^T = \left(\frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial t_{2(1)}}, \frac{\partial \varepsilon_{0i}}{\partial t_{2(2)}} \right),$$

$$D_{\kappa i}^T = \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial T_{1(1)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial T_{1(2)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_{2(1)}}, \frac{\partial \kappa_i}{\partial t_{2(2)}} \right), \quad D_{\theta}^T = (D_{\theta}^T(1), D_{\theta}^T(2), D_{\theta}^T(3), D_{\theta}^T(4)),$$

$$D_{\theta}^T(1) = D_{011}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(2) = D_{012}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(3) = D_{\kappa 1}^T D_{T\theta}, \quad D_{\theta}^T(4) = D_{\kappa 2}^T D_{T\theta}.$$

В частных случаях $f_{i0}^t = 0, i = 1, 2, 3, 4$. Частные производные $\partial n_{11} / \partial h_0$ и $\partial m_{11} / \partial h_0$ вычислим при фиксированных функциях распределения температуры.

Разрешив систему уравнений (21) относительно производных, получим каноническую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \bar{F}, \quad \bar{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)'. \quad (25)$$

Здесь

$$F_1 = \frac{1}{\Delta_1} (a_{22} F_{f1} - a_{12} F_{f2}), \quad F_2 = \frac{1}{\Delta_1} (a_{11} F_{f2} - a_{21} F_{f1}), \quad F_3 = \frac{1}{\Delta_2} (A_{22} F_{f3} - A_{12} F_{f4}),$$

$$F_4 = \frac{1}{\Delta_2} (A_{11} F_{f4} - A_{21} F_{f3}), \quad F_5 = f_5, \quad F_6 = f_6, \quad \Delta_1 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\Delta_2 = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}, \quad A_{11} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} \Delta_1),$$

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{31} b_3 + a_{32} b_4 + a_{34} \Delta_1), \quad A_{21} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{41} b_1 + a_{42} b_2 + a_{43} \Delta_1),$$

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta_1} (a_{41} b_3 + a_{42} b_4 + a_{44} \Delta_1), \quad b_1 = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}, \quad b_2 = a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23},$$

$$b_3 = a_{12} a_{24} - a_{22} a_{14}, \quad b_4 = a_{21} a_{14} - a_{11} a_{24},$$

$$F_{f3} = \frac{1}{\Delta_1} [(a_{32} a_{21} - a_{31} a_{22}) f_1 + (a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}) f_2 + f_3 \Delta_1],$$

$$F_{f4} = \frac{1}{\Delta_1} [(a_{42} a_{21} - a_{41} a_{22}) f_1 + (a_{41} a_{12} - a_{42} a_{11}) f_2 + f_4 \Delta_1],$$

$$F_{f1} = f_1 - a_{13} F_3 - a_{14} F_4, \quad F_{f2} = f_2 - a_{23} F_3 - a_{24} F_4, \quad F_5 = f_5, \quad F_6 = f_6, \quad F_7 = f_7.$$

В рассмотренных частных случаях после исключения седьмого уравнения системы (25) получим систему уравнений шестого порядка. Тогда в равенствах (24) следует принять $f_{10}^t = f_{20}^t = f_{30}^t = f_{40}^t = 0$.

Естественные граничные условия на краях ($\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$) оболочки, совпадающих с параллелями [4]:

а) свободный край –

$$n_{11} = m_{11} = q_1 = 0; \quad (26)$$

б) шарнирный, неподвижно опертый край –

$$u = w = m_{11} = 0; \quad (27)$$

в) жесткая заделка –

$$u = w = \theta = 0. \quad (28)$$

Для изотропных оболочек, закрепленных по одной параллели, граничные условия в полюсе ($\theta = 0$) имеют вид:

$$u = 0, \quad n_{22} = n_{11}, \quad m_{22} = m_{11}. \quad (29)$$

Граничные условия (29) получены с учетом симметрии в полюсе.

В результате поставлена двухточечная краевая задача с семью нелинейными дифференциальными уравнениями (25) и шестью граничными условиями, представляющими комбинацию условий (26) – (29), для определения равнопрочного проекта неоднородной ортотропной двухслойной эллипсоидальной оболочки вращения.

Рассмотрим, к примеру, граничные условия с шарнирным опиранием (27). Первые два условия остаются без изменения. Из них следует, согласно равенствам (4), $\varepsilon_{02} = 0$ и, в соответствии с первым равенством (17), для определения толщины $h_2(h_1, \omega_1, \omega_2)$ получим уравнение:

$$z_2^2 + Az_2 + B = 0, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (1/G) \{ z_1 [\lambda_2 (A_1 + T_2 \alpha_{2(1)}) + \lambda_1 (A_2 + T_1 \alpha_{2(2)}) + \alpha_{2(1)} t_{2(1)}^* - \alpha_{2(2)} t_{2(2)}^*] - \\ &\quad - A_1 h_0 (\lambda_2 - \lambda_1) - \alpha_{2(1)} h_0 (\lambda_2 T_2 - \lambda_1 T_1 + t_{2(1)}^*) \}, \\ B &= (z_1 / G) [z_1 \lambda_2 (B_1 + T_2 \alpha_{2(2)}) - B_1 h_0 (\lambda_2 - \lambda_1) - \alpha_{2(2)} h_0 (\lambda_2 T_2 - \lambda_1 T_1 + t_{2(2)}^*)], \\ G &= \lambda_1 (A_1 + T_1 \alpha_{2(1)}), \quad t_{2(1)}^* = \lambda_2 (T_1 - T_2), \quad t_{2(2)}^* = \lambda_1 t_{2(1)}^* / \lambda_2, \\ A_1 &= B_{21(1)} K_{1(1)} \sin \omega_1 + (B_{21(1)} K_{2(1)} + B_{22(1)} K_{3(1)}) \cos \omega_1, \\ B_1 &= B_{21(2)} K_{1(2)} \sin \omega_2 + (B_{21(2)} K_{2(2)} + B_{22(2)} K_{3(2)}) \cos \omega_2, \\ z_1 &= h_1 + h_0, \quad z_2 = h_2 - h_0. \end{aligned}$$

С учетом равенств (30), (7) и (12), для определения m_{11} получим равенство:

$$m_{11} = D_{m11}(1)\varepsilon_{01} + D_{m11}(3)\kappa_1 + D_{m11}(4)\kappa_2, \quad (31)$$

Полагая в равенстве (26) $m_{11} = 0$, получим уравнение:

$$D_1(h_1, h_2, \omega_1, \omega_2) = 0. \quad (32)$$

Разрешив численно уравнения (30) и (32) относительно h_2 и ω_2 , граничные условия на одном краю ($\theta = \theta_1$) представим в виде:

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2(h_1, \omega_1), \quad y_3 = h_1, \quad y_4 = h_2(\omega_1, h_1), \quad y_5 = q_1, \quad y_6 = 0, \quad y_7 = T_{1(1)}. \quad (33)$$

Здесь величины h_1 и ω_1 являются параметрами, в число которых включим также перерезывающую силу q_1 . На параметры h_1 и ω_1 наложим требование положительности h_1 и h_2 на краю оболочки $\theta = \theta_1$.

Существенной особенностью поставленной задачи является отсутствие естественного граничного условия для температуры $T_{1(1)}$ на поверхности спая слоев. Расчеты показали незначительную зависимость решения от граничного условия для температуры $T_{1(1)}$ на краю оболочки в интервале $[T_1, T_2]$. Поэтому в приведенных примерах граничное условие для температуры на поверхности спая слоев задано в виде

$$T_{1(1)} = (T_1 + T_2) / 2 \quad (34)$$

Другая особенность задачи заключается в следующем. Если температуры на внешних поверхностях равны и постоянны, то из уравнения (11) с условием (34) следует независимость решения задачи от теплового потока на поверхности спая слоев любой формы и температура постоянна по всему объему слоев оболочки. Поэтому в случае одинаковых постоянных температур на внешних поверхностях слоев порядок системы снижается на единицу и можно воспользоваться равенствами (12) и (34).

Решая численно задачу Коши с уравнениями (25) и граничными условиями (33) с учетом равенства (34), определим вес V и стоимость C оболочки.

Относительный по отношению к эталонной оболочке вес v или стоимость c неоднородной оболочки определим из выражений:

$$v = \frac{1}{2a_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) r_1 r_2 \sin \theta d\theta,$$

$$c = \frac{1}{2a_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (c_1 \rho_1 h_1 + c_2 \rho_2 h_2) r_1 r_2 \sin \theta d\theta,$$

где

$$a_p = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 r_2 \sin \theta d\theta, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad c = \frac{C}{C_0}, \quad \rho_k = \frac{\rho_k^0}{\rho_0}, \quad c_k = \frac{c_k^0}{c_0},$$

причем ρ_0 и ρ_k^0 – удельные плотности, c_0 и c_k^0 – удельные стоимости эталонной и проектируемой оболочек ($k=1,2$), соответственно.

Проекты относительных минимальных веса или стоимости определим из решений поставленной задачи Коши варьированием параметров ω_1 , h_1 и q_1 , а также коэффициентов a_1 и b_1 линейного уравнения для поверхности спая слоев

$$h_0 = ((b_1 - a_1)\theta + a_1\theta_2 - b_1\theta_1) / l, \quad l = \theta_2 - \theta_1.$$

В приведенных ниже примерах решение задачи Коши получено методом Фельберга с делением интервала l на 20000 подинтервалов и контролем точности и устойчивости.

В примерах рассмотрены шарнирно опертые на одном краю оболочки под действием внешнего равномерного давления с одинаковыми параметрами:

$$a_h = 40, \quad b_a = 0,5, \quad \theta_1 = 0,092, \quad \theta_2 = \pi/4, \quad v_{12(k)} = v_{21(k)} = 0,3. \quad (35)$$

В первом примере рассмотрена двухслойная оболочка, первый слой которой выполнен из дюралюминия, а второй – из стали, с дополнительными к равенствам (35) параметрами:

$$e_{i(1)} = 0,36 \cdot 10^3, \quad e_{i(2)} = 10^3, \quad \tau_{(1)} = 1, \quad \tau_{(2)} = \tau_{(1)} e_{i(2)} / e_{i(1)} = 2,77,$$

$$\rho_1 = 0,33, \quad \rho_2 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad T_1 = 100^\circ, \quad T_2 = 200^\circ.$$

При таком выборе пределов текучести интенсивности деформаций на внешних поверхностях слоев равны.

Во втором примере рассмотрена двухслойная оболочка, оба слоя которой выполнены из одного материала – стали, с дополнительными к равенствам (35) параметрами:

$$e_{i(1)} = 10^3, \quad e_{i(2)} = 10^3, \quad \tau_{(1)} = 1, \quad \tau_{(2)} = 1, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad c_1 = c_2 = 1.$$

Такую оболочку можно рассматривать как однородную.

Эталонная оболочка выполнена из одного материала, как во втором примере, и шарнирно оперта по краям с граничными условиями (27). Нагрузка по допустимой величине $\tau_{(k)} = 1$ в какой либо одной точке определена для эталонной оболочки по линейной теории упругих оболочек методом ортогональной прогонки и равна $q_n = -0,0184$.

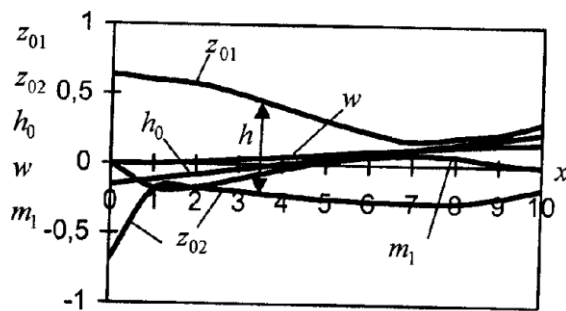


Рис. 1

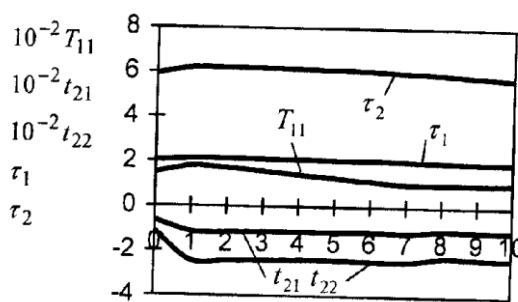


Рис. 2

Вычисления проведены с учетом уравнения (11) для функций, характеризующих распределение температуры. Зависимости $z_{01}, z_{02}, h_0, w, m_1, T_{11}, t_{21}, t_{22}, \tau_1, \tau_2$ от координаты $x = \theta - \theta_1$ для первой оболочки с температурами на внешних поверхностях слоев $T_1 = 100^\circ$ и $T_2 = 200^\circ$ ($\nu = 0,187$) показаны на рис. 1 – 2, с температурами $T_1 = -100^\circ$ и $T_2 = -200^\circ$ ($\nu = 0,249$) — на рис. 3 – 4, с температурами $T_1 = T_2 = 100^\circ$ ($\nu = 0,477$) на рис. 5 и с температурами $T_1 = T_2 = -100^\circ$ ($\nu = 0,398$) на рис. 6. Зависимости $z_{01}, z_{02}, h_0, w, m_1, \tau_1, \tau_2$ от координаты x для второй оболочки с одинаковыми температурами на внешних поверхностях слоев $T_1 = T_2 = 100^\circ$ ($\nu = 0,583$) показаны на рис. 7, а с температурами $T_1 = T_2 = -100^\circ$ ($\nu = 0,558$) — на рис. 8.

Из полученных результатов вычислений можно сделать следующие выводы.

1) Сохраняются затруднения, связанные с выполнением естественных граничных условий и отмеченные в работах [4 – 7]. Как правило, при точном выполнении граничных условий на одном крае нетрудно выполнить одно из трех граничных условий на другом крае оболочки. В примерах достаточно точно выполнено граничное условие – равенство нулю изгибающего момента (рис. 1 – 6). Равнопрочное предельное состояние под действием заданного внешнего давления обеспечивается установкой подвижного шарнира вдоль нормали с приложением поперечной силы и силы, направленной вдоль меридиана. В частном случае одинаковой температуры на внешних поверхностях слоев выполнены граничные условия – равенство нулю изгибающего момента и прогиба (рис. 5), что можно обеспечить установкой подвижного шарнира с приложением силы вдоль меридиана. Невыполнение естественных граничных условий приводит к выводу, что напряженно-деформированное состояние равнопрочной слоистой оболочки является предельным состоянием упругой слоистой оболочки с предельными нагрузками, как в жесткопластическом анализе [7].

2) Градиенты температур при нагреве внешних поверхностей первой оболочки (рис. 1 – 2) ведут к увеличению интенсивностей напряжений на поверхности сая слоев более чем в два раза, а с охлаждением внешних поверхностей – к снижению интенсивностей напряжений, за исключением краевых эффектов (рис. 3 – 4). Уменьшение интенсивностей напряжений имеет место и при одинаковых температурах на внешних поверхностях несущих слоев первой оболочки с различной интенсивностью краевых эффектов существенного превышения пределов текучести.

3) Напряженно-деформированное состояние и распределение температуры оболочки, за исключением первой оболочки с неодинаковым нагревом (рис. 2) и второй оболочки характеризуются немонотонными зависимостями от координаты (рис. 4, 5, 6, 7, 8).

4) Для второй оболочки интенсивности напряжений на поверхности «спая» $z = h_0$ интенсивности напряжений одинаковы (рис. 7,8), в отличие от первой оболочки (рис. 2,4). Кроме того, интенсивности напряжений на поверхности спая

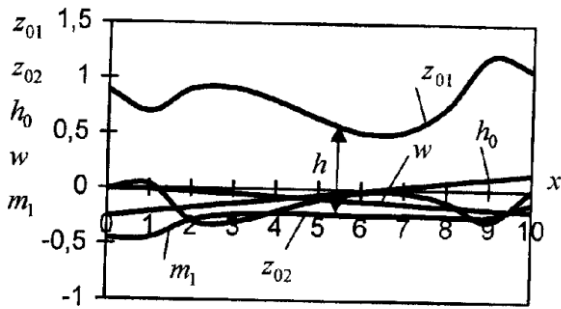


Рис. 3

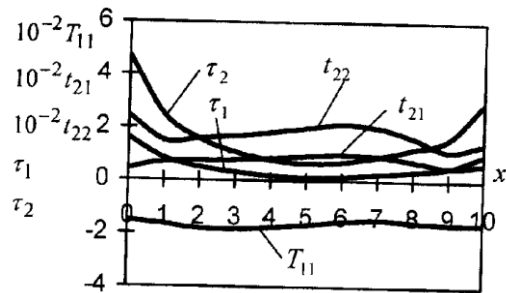


Рис. 4

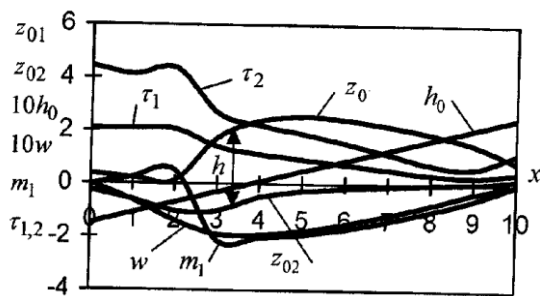


Рис. 5

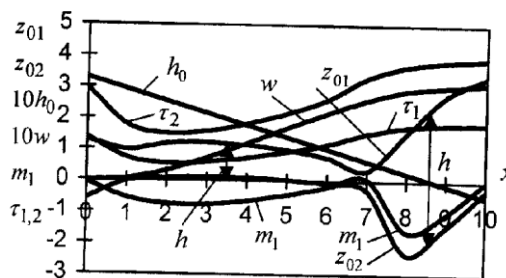


Рис. 6

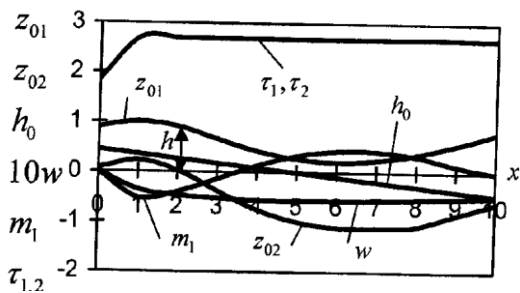


Рис. 7

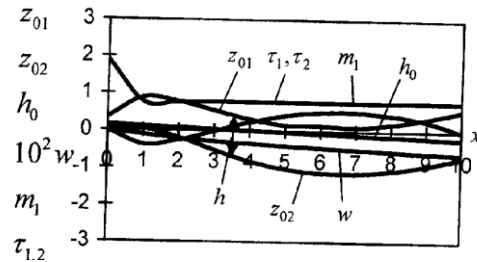


Рис. 8

слоев с одинаковым нагревом внешних поверхностей слоев в 2,7 раза превышают пределы текучести практически на всей длине оболочки. Следовательно нагрев внешних поверхностей слоев может быть причиной разрушения во внутренних областях оболочки.

5) Из полученных решений следует существенная зависимость веса, распределения толщин, интенсивностей напряжений от выбранной формы поверхности спая слоев. Принятая простейшая линейная зависимость для меридиана поверхности спая слоев не отражает всего многообразия особенностей напряженно-деформированного состояния и оптимизации элементов тонкостенных конструкций в условиях термосилового нагружения.

В целом, проведенные численные исследования показывают различный характер влияния температуры на предельные состояния при нагреве и охлаждении внешних поверхностей оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1978. –Т.12. – 90 с.
2. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. – М: Наука, 1981. – 288 с.
3. Немировский Ю. В. Оболочки абсолютно минимального веса // Механика деформируемых сред. – Куйбышев, – 1978. – Вып.3. – С. 3 – 78.
4. Вохмянин И. Т. , Немировский Ю. В., О проектировании двухслойной эллипсоидальной оболочки по критерию равнопрочности на внешних поверхностях слоев // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – № 11. – С. 9 –17.
5. Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В. Об оптимальном проектировании двухслойной тороидальной оболочки по условию равнопрочности на внешних поверхностях слоев // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 10. – С. 19 – 27.
6. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. О проектировании двухслойных кольцевых пластин по критерию равнопрочности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1 – 3 июля 2003 г. /Под ред. В.М. Фомина.– Новосибирск:«Издательство «Нонпарель» , 2003. – С. 27 – 37.
7. Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В. О равнопрочности и несущей способности упругих слоистых оболочек вращения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Ин-т гидродинамики СО РАН. – Новосибирск, 2007. Вып.125: Механика структурно-неоднородных сред. – С. 32 – 35.