

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ УРОВНЕЙ НАГРУЖЕНИЯ СЛОЖНО АРМИРОВАННЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Немировский Ю. В., Янковский А. П.

Сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения в условиях ползучести верхней кинематической границы несущей способности сложно армированных металлокомпозитных пологих оболочек вращения. Показано, что для рассмотренных видов конструкций и типов композиций наибольшую предельную нагрузку обеспечивают структуры армирования по меридионально-окружным направлениям; максимально допустимые предельные нагрузки для тонкостенных конструкций, работающих в условиях ползучести, в несколько раз ниже предельно допустимых нагрузок, определенных по критерию кратковременной прочности; даже незначительное искривление срединной поверхности пластин приводит к существенному увеличению несущей способности таких тонкостенных конструкций.

В работах [1, 2] авторы исследовали влияние различных структур армирования на несущую способность изгибаемых пластин и оболочек на базе критерия кратковременной прочности. При этом предполагалось: все фазовые материалы тонкостенных конструкций ведут себя идеально-жестко-пластично, что позволяет определить предельный уровень нагружения, выдерживаемый армированными пластинами и оболочками при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции. Однако на практике тонкостенные конструкции зачастую эксплуатируются в условиях длительного нагружения при повышенных температурах [3], поэтому в них могут активно развиваться деформации ползучести. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос об оценке предельных уровней нагружения сложно армированных металлокомпозитных оболочек (которые в последнее время находят все более широкое применение на практике) с учетом развития деформаций ползучести в них.

Так как теория ползучести и длительной прочности сложно армированных тонкостенных конструкций в настоящее время находится в зачаточном состоянии [4], то для проведения оценочных технических расчетов целесообразно использовать приближенную схему жестко-ползучего тела [5, 6]. Полное решение или близкие (верхнюю и нижнюю) границы несущей способности конструкции по жестко-ползучей схеме можно получить лишь для некоторого узкого круга задач [5–7 и др.], поэтому выдвигаемые практикой новые задачи требуют привлечения численных методов решения математической задачи об определении предельного уровня их нагружения в рамках жестко-ползучей модели. Настоящее исследование посвящено определению верхней границы несущей способности металлокомпозитных пологих оболочек вращения различной осесимметричной структуры в условиях ползучести с использованием теории линейного программирования.

В силу известного [5] формального сходства определения несущей способности конструкции по жесткопластической и жестко-ползучей схемам не будем останавливаться на описании метода расчета, который полностью совпадает с подробно изложенным в [2], где нужно лишь заменить пределы текучести $\sigma_s = \sigma_{0,2}$ фазовых материалов на соответствующие пределы ползучести σ_c .

При проведении расчетов по жестко-ползучей схеме предел ползучести σ_c материала выбирается либо из условия предельно допустимой деформации ϵ_{\max} ползучести [6], либо из условия предельно допустимой скорости $\dot{\epsilon}_{\max}$ деформации пол-

зучести [5], которая регламентирована для целого ряда несущих элементов конструкций [3].

В случае армированного металлокомпозита значения σ_c для фазовых материалов можно выбрать, исходя, например, из следующих соображений. Рассмотрим наиболее характерные законы $\dot{\epsilon} \propto \sigma$ установившейся ползучести для металлов: степенной

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^m \quad [1/\text{ч}] \quad (1)$$

и экспоненциальный

$$\dot{\epsilon} = \exp(-K + \beta\sigma) \quad [1/\text{ч}], \quad (2)$$

где B, m, K, β – известные из эксперимента характеристики материалов.

Далее в настоящем исследовании будем изучать поведение пластин, изготовленных из жесткой меди (Cu) или алюминиевого (Al) сплава АМг3 и армированных стальной проволокой У8А. При температуре $T \approx 200^\circ\text{C}$ законы установившейся ползучести для меди и проволоки У8А подчиняются соотношению (1) с характеристиками:

$$\text{Cu [8]: } m = 2,16, \quad B = 5,63 \cdot 10^{-9} \text{ (МПа)}^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}; \quad (3)$$

$$\text{У8А [9]: } m = 24,98, \quad B = 1,054 \cdot 10^{-84} \text{ (МПа)}^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}, \quad (4)$$

а для алюминиевого сплава – соотношению (2) при:

$$\text{АМг3 [10]: } K = 12,2, \quad \beta = 0,0673 \text{ (МПа)}^{-1}. \quad (5)$$

Аппроксимируем степенной закон установившейся ползучести (1), (4) для проволоки У8А двухзвенной кусочно-линейной функцией

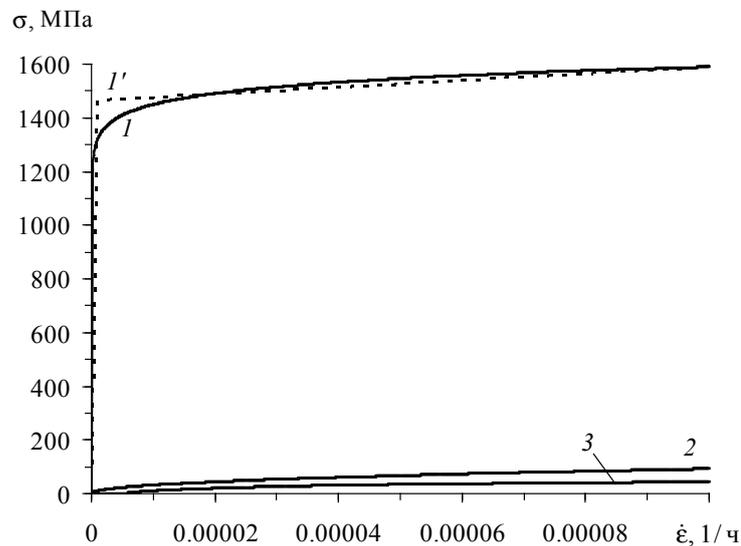


Рис. 1. Кривые установившейся ползучести фазовых материалов

$$\sigma = \begin{cases} B_1 \dot{\epsilon}, & 0 \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_1, \\ \sigma_1 + B_2 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_1), & \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_1, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$B_1 = 1,611 \cdot 10^{15} \text{ Па} \cdot \text{ч}, \quad B_2 = 1,257 \cdot 10^{12} \text{ Па} \cdot \text{ч},$$

$$\sigma_1 = 1,466 \text{ ГПа}, \quad \dot{\epsilon}_1 = 9,097 \cdot 10^{-7} \text{ 1/ч}. \quad (7)$$

(Параметры (7) определены на основании зависимости (1), (4) методом наименьших квадратов на интервале $0 \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-4} \text{ 1/ч}$, при этом варьировались величины σ_1 , $\dot{\epsilon}_1$.)

На рис. 1 кривые 1, 2 характеризуют степенные зависимости $\sigma \propto \dot{\epsilon}$ (1) с параметрами (4), (3) соответственно, а линия 3 – экспоненциальную зависимость (2), (5). Двухзвенная ломаная 1' (штриховая линия) соответствует аппроксимации (6), (7). Сравнение линий 1, 1' показывает, что зависимость (6), (7) удовлетворительно аппроксимирует закон установившейся ползучести (1), (4). Из поведения же ломаной 1' следует, что при $\sigma > \sigma_1$ происходит «катастрофическое» нарастание скорости $\dot{\epsilon}$ деформации установившейся ползучести арматуры, поэтому для проволоки У8А в качестве предела ползучести целесообразно выбрать значение $\sigma_c = \sigma_1 = 1,466 \text{ ГПа}$. Согласно (1), (4), этому значению напряжения соответствует скорость деформации $\dot{\epsilon}_{\max} = 1,3034 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}$. Так как арматура и связующее в пластине должны деформироваться совместно, и при одних и тех же значениях скорости $\dot{\epsilon}$ деформаций ползучести напряжения σ в меди и алюминиевом сплаве АМгЗ существенно меньше напряжения в проволоке У8А (ср. поведение кривых 2, 3 с линией 1), то катастрофическому нарастанию $\dot{\epsilon}$ в арматуре будет соответствовать и катастрофическое нарастание $\dot{\epsilon}$ в связующем композициях. Поэтому для рассматриваемых материалов связующей матрицы в качестве $\dot{\epsilon}_{\max}$ можно выбрать то же самое значение, что и для проволоки У8А. Подставив $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{\max} = 1,3034 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}$ в соотношения (1), (2), с учетом параметров (3), (5) получим расчетные значения пределов ползучести σ_c для твердой меди и сплава АМгЗ, которые (наряду с другими физико-механическими характеристиками фазовых материалов) приведены в таблице. (Рассуждая подобным образом, можно определить значения σ_c для фазовых материалов при использовании других типов металлокомпозиций.)

Физико-механические характеристики фазовых материалов [3, 9]

Материал	σ_s , МПа	σ_c , МПа	ρ , кг/м ³
Твердая медь	280	36,11	8940
Сплав АМгЗ	108,9	14,15	2670
Проволока У8А	3500	1466	7800

Исследуем на конкретных примерах влияние структуры армирования и типа композиции полой оболочки на уровень ее предельного нагружения при ползучести и сравним его с уровнем предельного нагружения таких оболочек, определенным по жесткопластической схеме (по критерию кратковременной прочности). В качестве условия сопоставимости различных проектов армирования оболочек выберем одинаковый расход Ω арматуры в них, который с учетом метрики на плоскости (что справедливо для полых оболочек) определяется равенствами

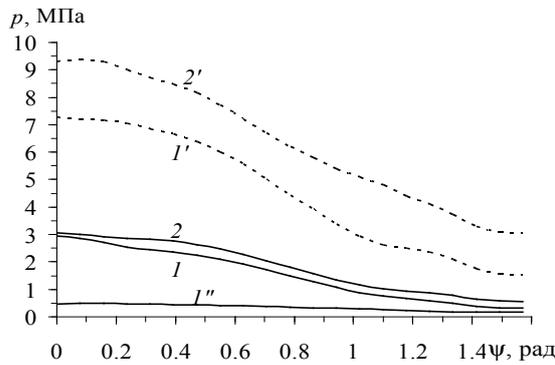


Рис. 2. Зависимости предельных нагрузок для тонкостенных конструкций от угла

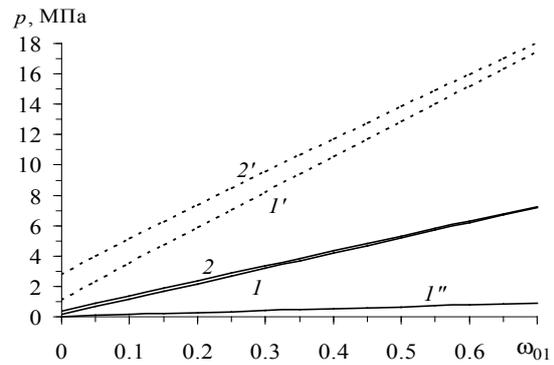


Рис. 3. Зависимости предельных нагрузок для тонкостенных конструкций с меридионально-о́кружной структурой от суммарной плотности армирования

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega_k = \int_V \omega_k dV = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} H(r) \omega_k(r) r dr \quad (1 \leq k \leq N) \quad (8)$$

и фиксирован для любых композиций и структур армирования. (Здесь $H(r)$ – переменная по радиусу r (в плане) толщина пологой оболочки; r_0, r_1 – радиусы внутренней и внешней кромок кольцевой (в плане) оболочки; $\omega_k(r)$ – плотность армирования волокнами k -го семейства; N – количество армирующих волокон (проволок); Ω_k – объемное содержание волокон k -го семейства.)

Так как арматура предполагается постоянного поперечного сечения и обрывается только на краях конструкции, то, согласно [11], для пологой оболочки

$$\omega_k(r) = H_0 r_0 \omega_{k0} \cos \psi_{k0} / [H(r) r \cos \psi_k(r)], \quad (9)$$

$$H_0 = H(r_0), \quad \omega_{k0} = \omega_k(r_0), \quad \psi_{k0} = \psi_k(r_0),$$

где $\psi_k(r)$ – углы армирования проволокой k -го семейства, отсчитываемые от меридионального направления (предполагаются изначально заданными функциями); ω_{k0} – произвольные постоянные. Равенство (9) не выполняется лишь при окружном армировании (так как $\cos \psi_k \equiv 0$), в этом случае $\omega_k(r)$ – произвольная функция [11].

Рассмотрим несущую способность пологих сферических оболочек радиуса $R = 1,2$ м и толщины $H = 1$ см, ограниченных (в плане) кромками радиусов $r_0 = 10$ см, $r_1 = 40$ см и жестко защемленных на внешней кромке r_1 . Центральное (полюсное) отверстие предполагается закрытым абсолютно жесткой круглой пластиной (крышкой), жестко скрепленной с внутренней кромкой оболочки r_0 . На оболочку (со стороны вогнутости) и крышку действует равномерно распределенная поперечная поверхностная нагрузка p .

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимости предельной поперечной поверхностной нагрузки p от угла армирования ψ . Оболочки армированы меридионально-симметрично по логарифмическим спиральям двумя ($N = 2$) семействами проволок ($\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi = \text{const}$, $\omega_1(r) = \omega_2(r)$) с интенсивностями на внутренней кромке $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,35$, поэтому для обеих рассматриваемых композиций при всех структурах такого армирования общий расход Ω волокон в тонкостенных конструкциях остается одним и тем же (см. (8), (9)).

З а м е ч а н и е 1. На рис. 2, 3 сплошные линии 1, 2 определяют предельные нагрузки p_c для пологих оболочек при ползучести, а пунктирные кривые 1', 2' приведены для сравнения и соответствуют предельным нагрузкам p_s , рассчитанным

для тех же конструкций по жесткопластической схеме (по критерию кратковременной несущей способности). На этих рисунках линии 1, 1' построены для композиции Al-U8A, а кривые 2, 2' – для композиции Cu-U8A. Кроме того, на рис. 2, 3 для сравнения приведены кривые 1'', характеризующие значения p_c для кольцевых армированных пластин ($R \rightarrow \infty$) из композиции Al-U8A.

Сравнение кривых 1, 2 с 1', 2' соответственно на рис. 2 указывает на то, что несущая способность пологих оболочек рассматриваемой структуры, определенная по жестко-ползучей схеме, далека от полного исчерпания, так как ординаты точек на линиях 1, 2 в два с лишним раза меньше, чем на кривых 1', 2'. Сопоставление же линий 1 и 1'' показывает, что даже незначительное искривление срединной поверхности пластины (трансформация ее в пологую оболочку) приводит к существенному (в разы) увеличению предельной нагрузки p_c при ползучести. (Подобные картины наблюдаются и на рис. 3.)

Все кривые на рис. 2 (за исключением линии 2') монотонно убывают. Следовательно, для обеих композиций в условиях ползучести и для Al-U8A-композиции в условиях кратковременной прочности из всех рассмотренных проектов армирования меридиональное армирование ($\psi = 0$) является рациональным, так как обеспечивает максимальные значения p_c , p_s . Кривая же 2' имеет максимум при перекрестном армировании под углами $\psi \approx \pi/20$, поэтому не всегда меридиональное армирование (армирование по одному из направлений главных напряжений в композиции) может оказаться наилучшим. В силу того, что точки максимумов на кривых 2, 2' рис. 2 реализуются при разных углах армирования ($\psi = 0$ – для линии 2, $\psi \approx \pi/20$ – для кривой 2'), рациональные с точки зрения кратковременной прочности проекты армирования могут оказаться нерациональными при эксплуатации изделия в условиях длительной прочности.

Общая тенденция поведения всех кривых на рис. 2 – уменьшение значений p_c , p_s с увеличением углов спирального армирования ψ . Однако эта тенденция сохраняется не всегда. Так, для оболочек большой кривизны [2] и для изгибаемых пластин, жестко защемленных на внутренней кромке и свободных от нагружения на внешней кромке [1], при определенных композициях наблюдается противоположное явление – возрастание предельной нагрузки p с увеличением углов армирования ψ . В этих случаях рациональными являются проекты со структурами армирования, близкими к окружному ($\psi = \pi/2$). Следовательно, выбор рациональных структур армирования зависит не только от типа композиции, но и от геометрии тонкостенной конструкции (в частности, от степени искривленности срединной поверхности) и способов закрепления и опирания ее кромок.

Рассмотрим теперь пологие оболочки и кольцевые пластины, армированные по меридионально-окружным направлениям, совпадающим с направлениями главных напряжений. Интенсивность армирования ω_1 меридиональным ($\psi_1 = 0$) семейством волокон определяется равенством (9), а интенсивность армирования окружным семейством зададим формулой $\omega_2(r) = \omega_{10} - \omega_1(r)$. При этом суммарная плотность армирования постоянна ($\omega_{10} = \omega_1(r) + \omega_2(r) = \text{const}$). Увеличивая ω_{10} в пределах $0 \leq \omega_{10} \leq \omega_{\text{max}}$ (где $\omega_{\text{max}} \approx 0,7$ – предельно допустимое на практике значение интенсивности армирования), будем увеличивать относительное объемное содержание арматуры в конструкции. Так как в обеих рассматриваемых композициях предельные напряжения σ_c , σ_s в волокнах более чем на порядок превосходят значения аналогичных величин в связующем (см. таблицу), то увеличение удельного объемного

содержания арматуры должно приводить к увеличению несущей способности металлокомпозитных оболочек и пластин.

На рис. 3 изображены зависимости $p(\omega_{10})$ для конструкций с указанными структурами армирования (см. замечание 1). Ординаты левых точек на кривых рис. 3 (при $\omega_{10} = 0$) определяют значения p_c , p_s для изотропных пологих оболочек и пластин, выполненных из материала связующего. Все кривые на рис. 3 монотонно возрастают, причем ординаты точек этих кривых уже при $\omega_{10} \geq 0,1$ в несколько раз больше, чем при $\omega_{10} = 0$. Следовательно, армирование пологих оболочек позволяет увеличить их несущую способность в разы, а в некоторых случаях – на порядок и более (ср. ординаты левых и правых точек на кривых 1, 2 рис. 3).

Сравнение кривых с одинаковыми номерами, изображенных на рис. 2, 3, позволяет заключить, что из всех рассмотренных выше проектов армирования для обеих композиций наибольшую несущую способность обеспечивают структуры с меридионально-окружным армированием (рис. 3) при предельной суммарной плотности армирования $\omega_{10} = 0,7$. Это объясняется тем, что при таких структурах армирования суммарное объемное содержание арматуры Ω (см. (8)) в пологих оболочках и пластинах фиксированной толщины ($H = 1$ см) больше, чем при их спирально-перекрестном армировании (см. (8), (9)) со значениями $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,35$ на внутренней кромке (рис. 2).

Изменение структуры армирования тонкостенных конструкций приводит к изменению жесткопластической и жестко-ползучей границы в них. В большинстве проведенных расчетов образование пластических или вязко-ползучих шарниров происходило на обеих кромках; в некоторых же случаях (например, при расчете кривой 1" на рис. 2) часть тонкостенной конструкции (при некоторых углах армирования ψ), примыкающая к внутренней кромке ($r_0 \leq r < r_p$), остается абсолютно жесткой и движется поступательно вместе с абсолютно жесткой крышкой, закрывающей полюсное отверстие, а остальная часть, примыкающая к внешней кромке ($r_p < r \leq r_1$), испытывает течение в условиях ползучести или пластичности; в точке $r = r_p$ возникает пластический или вязко-ползучий шарнир. Граница между абсолютно жесткой зоной и зоной течения, определяемая радиусом r_p , изменяется вместе с изменением структуры армирования или с формой профиля конструкции. Так, на рис. 4 изображена зависимость r_p от ψ для Al-U8A-пластин ($R \rightarrow \infty$), армиро-

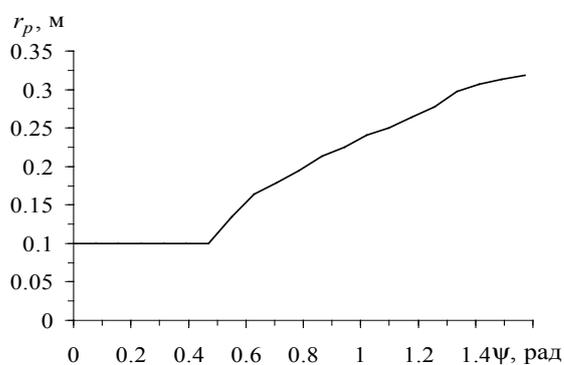


Рис. 4. Зависимость положения жестко-ползучей границы в Al-U8A-пластине со

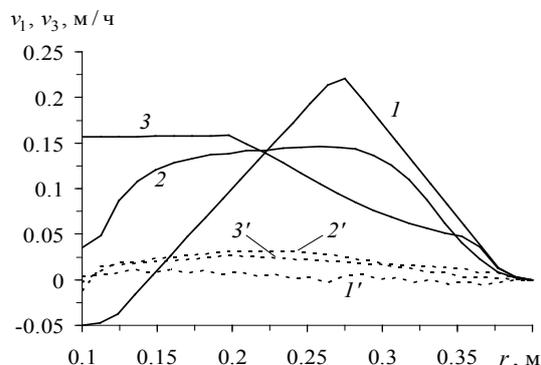


Рис. 5. Этюры скоростей смещений точек срединной поверхности пологой оболочки из Si-U8A-композиции при ползучести для некоторых углов спирального

ванных по логарифмическим спиральям и работающих в условиях ползучести (см.

линию 1'' на рис. 2). Изменение структуры армирования приводит не только к изменению r_p , но и к качественному изменению эпюр скоростей течения точек тонкостенных конструкций. Так, на рис. 5 изображены кривые, качественно характеризующие скорости смещения точек срединной поверхности пологой оболочки из Cu-U8A-композиции в меридиональном (v_1 – штриховые линии с номерами 1', 2', 3') и нормальном (v_3 – сплошные линии с номерами 1, 2, 3) направлениях в условиях ползучести при разных углах спирального армирования: кривые 1, 1' рассчитаны при $\psi = 0$ (меридиональная структура, которой соответствует левая точка на кривой 2 рис. 2), линии 2, 2' – при $\psi = 3\pi/8$ (спирально-перекрестное армирование), кривые 3, 3' – при $\psi = \pi/2$ (окружное армирование, которому соответствует правая точка на линии 2 рис. 2). Сравнение кривых на рис. 5 позволяет проследить за качественным изменением эпюр скоростей прогибов v_3 и меридиональных (радиальных) смещений v_1 при ползучести в зависимости от изменения угла ψ армирования по логарифмическим спиралям. (Левый горизонтальный участок на кривой 3 рис. 5 свидетельствует о том, что при $\psi = \pi/2$ часть оболочки, примыкающая к крышке, закрывающей плюсное отверстие, остается абсолютно жесткой, а течение развивается лишь в некоторой окрестности ($r_p < r \leq r_1$, $r_p \approx 0,2$ м) внешней кромки рассматриваемой пологой оболочки.)

Таким образом, проведенные в настоящей работе исследования позволяют заключить, что уровни предельно допустимого нагружения кольцевых (в плане) полых оболочек в условиях ползучести существенно (вдвое и более) ниже уровней предельных нагрузок, при которых происходит переход в пластическое состояние всех фаз композиции пластины. Из всех рассмотренных структур армирования наибольшую несущую способность таким конструкциям обеспечивает армирование по радиально-окружным направлениям с постоянной суммарной плотностью армирования.

З а м е ч а н и е 2. Наиболее известные и распространенные на сегодняшний день теории ползучести металлов [5, 12] не учитывают такого явления, как разносопротивляемость материалов растяжению – сжатию в условиях ползучести, которое наблюдается в экспериментах для целого ряда металлов [13, 14 и др.]. В рамках использованной в настоящем исследовании жестко-ползучей схемы это явление может быть легко учтено и использовано в расчетах. (Описание учета такой особенности поведения материалов на базе жесткопластической модели дано в [15], поэтому не будем здесь останавливаться на обсуждении этого вопроса.)

З а м е ч а н и е 3. В настоящем исследовании крышка оболочки предполагалась абсолютно жесткой. В действительности же следовало бы оценить и несущую способность крышки в предположении об абсолютной жесткости оболочки. Для круглых изотропных и металлокомпозитных пластин (каковой и предполагается крышка) это можно сделать методами, изложенными в [1], [7]. Изучение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00046-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин // Вестник ННГУ. Серия: Механика. – 2006. – Вып. 1 (7). – С. 123–133.

2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Влияние структуры армирования на предельную нагрузку металлокомпозитных оболочек вращения // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Якушева. Серия: Механика предельного состояния. – 2008. – № 1 (4). – С. 108 – 116.
3. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И. И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
4. Немировский Ю. В. Ползучесть однородных и композитных оболочек // Актуальные проблемы механики оболочек. Тр. междунар. конф., посвященной 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина. Казань 26–30 июня 2000 г. – Казань: Новое знание, 2000. – С. 42–49.
5. Качанов Л. М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. Немировский Ю. В. О времени эксплуатации цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Строительная механика корабля. – 1967. – Вып. 92. – С. 107–113.
7. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
8. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
9. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
10. Соснин О. В. О ползучести слабо упрочняющихся материалов при нестационарных температурно-силовых режимах // Проблемы прочности. – 1972. – № 1. – С. 74–77.
11. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.
12. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.
13. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Прикладная механика и техническая физика. – 1970. – № 5. – С. 136–139.
14. Горев Б. В. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса с разрывными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. – Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973. – Вып. 14. – С. 44–51.
15. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 8. – С. 4–11.