Белорусский национальный технический университет, Минск.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОМ СЛОЕ

Гончарова С.В.

It was spent the research of the wave phenomenon in the thermoelastic layer by means of two operator functions.

Рассмотрим задачу о распространении плоской волны в неограниченном упругом слое толщиной $2h$. Волна движется вдоль слоя в положительном направлении x и является гармонической по времени. Мы имеем здесь дело с плоским деформированным состоянием. Волновое движение описывается при помощи двух функций Φ и Ψ, посредством формул [1]

$$u = \partial_1\Phi - \partial_2\Psi, \quad v = \partial_2\Phi + \partial_1\Psi \tag{1}$$

Напряжения связаны с функциями Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\sigma_{11}}{G} = \left(\gamma_2\partial_2^2 + \gamma\partial_1^2\right)\Phi - 2\partial_1\partial_2\Psi; \\ \frac{\sigma_{22}}{G} = \left(\gamma_2\partial_1^2 + \gamma\partial_2^2\right)\Phi + 2\partial_1\partial_2\Psi; \\ \frac{\sigma_{12}}{G} = 2\partial_1\partial_2\Phi + \left(\partial_1^2 - \partial_2^2\right)\Psi. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$; $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2 = \gamma - 2$, ν - коэффициент Пуассона; G - модуль поперечной упругости.

Волновые функции и температура должны удовлетворять уравнениям [1]:

$$\left(\Delta_1\Delta_3 - \eta m\partial_t\Delta\right)\Phi = 0; \quad \Delta_2\Psi = 0; \quad \theta = \frac{1}{m}\Delta_1\Phi, \tag{3}$$

где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\Delta_\alpha = \Delta - \frac{1}{C_\alpha^2}\partial_t^2, \alpha = 1,2$; $\Delta_3 = \Delta - \frac{1}{\kappa}\partial_t$, κ, n, m - термодинамические коэффициенты; C_1 и C_2 - скорости продольной и поперечной волн соответственно. Уравнение для функции Φ можно записать в виде:

$$\left(\Delta - D_1\right)\left(\Delta - D_2\right)\Phi = 0,$$

где $$D_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a}}{2}\partial_t, \; D_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a}}{2}\partial_t; \; b = \frac{1}{\kappa} + nm + \frac{1}{C_1^2}\partial_t, \; a = \frac{4}{\kappa C_1^2}\partial_t. \tag{4}$$

Для симметричного типа колебаний, соответствующего растяжению-сжатию упругого слоя (задача А), волновые функции представим в виде:

$$\Phi = \left[\frac{A\cos\left(y\sqrt{\nabla_1}\right)}{\sin\left(h\sqrt{\nabla_1}\right)} + \frac{B\cos\left(y\sqrt{\nabla_2}\right)}{\sin\left(h\sqrt{\nabla_2}\right)}\right]f(x,t); \quad \Psi\frac{C\sin\left(y\sqrt{\nabla_3}\right)}{\cos\left(h\sqrt{\nabla_3}\right)}f(x,t), \tag{6}$$

где $\nabla_1 = \partial_1^2 - D_1$; $\nabla_2 = \partial_1^2 - D_2$; $\nabla_3 = \partial_1^2 - \frac{1}{C_2^2}\partial_t^2$.

Считая поверхность слоя, на которой поддерживается постоянная температура, свободной от напряжений, приходим к граничным условиям вида:

$$\theta = T - T_0 = 0; \qquad \sigma_{22} = 0; \qquad \sigma_{12} = 0 \qquad \text{для } y = \pm h \tag{7}$$

Используя краевые условия (7) и учитывая соотношения (2), (3) и (6), получаем систему трех операторных уравнений

$$\left[A\left(\gamma_2\partial_1^2-\gamma\nabla_1\right)tg\left(h\sqrt{\nabla_1}\right)+B\left(\gamma_2\partial_1^2-\gamma\nabla_2\right)tg\left(h\sqrt{\nabla_2}\right)+2C\partial_1\sqrt{\nabla_3}\,tg\left(h\sqrt{\nabla_3}\right)\right]*f(x,t)=0$$

$$\left[-2\partial_1\sqrt{\nabla_1}A-2\partial_1\sqrt{\nabla_2}B+\left(\partial_1^2+\nabla_3\right)C\right]*f(x,t)=0 \qquad (8)$$

$$\left[\left(\partial_1^2-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2-\nabla_1\right)A+\left(\partial_1^2-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2-\nabla_2\right)B\right]*f(x,t)=0.$$

Решим полученную систему, определяя неизвестные операторы из третьей и второй строк.

$$A=-\left(\partial_1^2-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2-\nabla_2\right)=-\left(D_1-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2\right);$$

$$B=\partial_1^2-\frac{1}{C_1^2}-\nabla_1=D_2-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2;$$

$$C=\frac{2\partial_1}{\partial_1^2+\nabla_3}\left[\left(D_1-\frac{1}{C_1^2}\right)\sqrt{\nabla_2}-\left(D_2-\frac{1}{C_1^2}\right)\sqrt{\nabla_1}\right].$$

После подстановки найденных значений *A*, *B* и *C* в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\left\{\left(D_2-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2\right)\left(\gamma_2\partial_1^2-\gamma\nabla_2\right)tg\left(h\sqrt{\nabla_2}\right)-\left(D_1-\frac{1}{C_1^2}\partial_t^2\right)\left(\gamma_2\partial_1^2-\gamma\nabla_1\right)tg\left(h\sqrt{\nabla_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\partial_1^2\sqrt{\nabla_3}}{\partial_1^2+\nabla_3}\left[\sqrt{\nabla_2}\left(D_1-\frac{1}{C_1^2}\right)-\sqrt{\nabla_1}\left(D_2-\frac{1}{C_1^2}\right)\right]\right\}*f(x,t)=0. \qquad (9)$$

Отметим, что стоящее в фигурных скобках выражение с точностью до множителя совпадает с определителем исходной системы.

Принимая в (9) $f(x,t)=\exp\left[i(\omega t-\alpha x)\right]$ и вводя математическое понятие оператора от функции, можно получить характеристическое трансцендентное уравнение для определения неизвестного коэффициента α, содержащего фазовую скорость волны.

Заметим, что значению $\eta=0$ соответствует упругая волна, т.е. рассматриваемая задача является в этом случае классической задачей эластодинамики о распространении волн Лэмба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. // Изд-во “Мир”, М.-1970 - 256 с.