*Белорусский национальный технический университет, Минск*

# ПРИВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ К ОБЩЕИЗВЕСТНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ.

**Акимов В.А.**

*It was shown that the use of the operator method for definition of coefficient in orthogonal series reduces to notorious formulas.*

Покажем теперь, что посредством преобразований операторный метод в ортогональных рядах сводится к общеизвестным интегральным формулам для определения коэффициентов исходных разложений.

Итак, для нечетной функции $\phi(z)$, являющейся «собственной» функцией оператора $d_x^2$, для вещественных значений можно записать[1]:

$$\phi(\mu x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k\varphi'(a_k)}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}\phi(a_k x) \tag{1}$$

Известно, что при $a \le x \le b$ этот ряд сходится равномерно. Пусть, кроме того, $\phi(z)$ удовлетворяет условиям обобщенной ортогональности:

$$\int_a^b q(x)\phi(a_k x)\phi(a_p x)dx = \begin{cases} M(a_k)\bullet\text{р}Цk = p \\ 0\bullet\text{р}Цk \ne p \end{cases} \tag{2}$$

где $q(x)$ некоторая «весовая» функция.

Умножая (1) на $q(x)\phi(a_k x)$ и интегрируя в пределах $(a,b)$ найдем[1]:

$$-\frac{a_k\varphi'(a_k)}{2M(a_k)}\int_a^b q(x)\phi(\mu x)\phi(a_p x)dx = \frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2} \tag{3}$$

а разлагая справа и слева по степеням $\mu$:

$$-\frac{a_k\varphi'(a_k)}{2M(a_k)}\cdot\frac{\phi^{(2r+1)}(0)}{(2r+1)!}\int_a^b x^{2r+1}q(x)\phi(a_p x)dx =$$

$$= \frac{1}{(2r+1)!}\left[\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_k^2}\right]_{\mu=0} = \gamma_k^{(r)} \tag{4}$$

В частности, если $a_k = k$, то

$$\varphi(\mu) = \mu\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\mu^2}{k^2}\right) = \frac{\sin\pi\mu}{\pi}$$

Взяв $\phi(z) = \sin z$, найдем:

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\mu x\sin kx dx = \frac{\sin\pi\mu}{\pi(1-\mu^2/k^2)}$$

так что

$$\gamma_k^{(r)} = (-1)^{k+r-1}\cdot\frac{k}{2\pi(2r+1)}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2r+1}\sin kx dx =$$

$$= (-1)^{k+r}\cdot\frac{k^2}{2\pi(2r+2)}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2r+2}\cos kx dx \tag{5}$$

Если $a_k = a_k^{(n)}$ положительные корни бесселевой функции $J_n(z)$ где $n$ – вещественное число $> -1$ (при этом все корни $a_k$ вещественны), то тогда

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\mu^2}{\left(a_k^{(n)}\right)^2} \right] = \frac{2^n \Gamma(n+1) J_n(\mu)}{\mu^{n-1}}$$

где $\Gamma(n+1)$ - гамма функция от аргумента $n+1$ и

$$\mu^{1-n} \frac{2^n \Gamma(n+1) a_k^{(n)}}{J_{n+1}\left(a_k^{(n)}\right)} \int_0^1 x J_n(\mu x) J_n\left(a_k^{(n)}\right) dx = \frac{\varphi(\mu)}{Б - \mu^2 / \left(a_k^{(n)}\right)^2}$$

$$\gamma_k^{(r)} = (-1)^r \frac{a_k^{(n)} \Gamma(n+1)}{J_{n+1}\left(a_k^{(n)}\right) 2^{2r} r! \Gamma(n+r+1)} \int_0^1 x^{n+2r+1} J_n\left(a_k^{(n)}\right) dx \qquad (6)$$

Теперь можно непосредственно установить требуемые соотношения.

1. Разложение в обыкновенный тригонометрический ряд Фурье. При этом

$$a_k = K, \quad F_H(z) = \sin z, \quad F_r(z) = \cos z$$

$$F(z) = F_H(z) + F_r(z) = \sin z + \cos z$$

и

$$\varphi(\mu) = \frac{\sin \pi\mu}{\pi} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} \mu^{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} U_{2r+1} \mu^{2r+1}$$

Имеем

$$\frac{F(xz)}{\varphi(z)} = \pi \frac{\sin xz + \cos xz}{\sin \pi z}$$

что при $-\pi < x < \pi$ стремится к нулю равномерно с возрастанием круга $C_n$ во всех его точках, кроме как в точках вещественной оси, где это отношение сохраняет конечную величину.

Тогда предел интеграла $J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(xz) dz}{(z-\mu)\varphi(z)}$ равен нулю, то ряды

$$T_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+1} \pi^{2r+1}, \quad T_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) \beta_{2r+2} \pi^{2r+1} \qquad (7)$$

сходятся абсолютно. Подставляя в коэффициенты разложения исходной функции значения

$$\alpha_{2r} = \frac{(-1)^r}{(2r)!}, \alpha_{2r+1} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}, U_{2r+1} = \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r+1)!}$$

и пользуясь формулами (5), найдем

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r} \frac{\pi^{2r+1}}{2r+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+1} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+1} \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \qquad (8)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{2r+2} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r+1} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

причем порядок суммирования и интегрирования менять можно в силу сходимости рядов (7). Итак, получим известное разложение

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_k \sin kx + C_k \cos kx \right)$$

с коэффициентами (8).

2. Разложение в ряд Фурье-Бесселя.

Пусть теперь

$$\frac{F(x)+F(-x)}{2}=J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^4}-...=F_r(x)$$

и требуется разложить функцию $f(x)$ в ряд вида

$$f(x)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_0(kx) \tag{9}$$

Приведенные выше формулы дают опять требуемое решение, справедливое при $-\pi<x<\pi$ и при условии, что ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty}\beta_{2r+2}\frac{(2\pi)^{2r+2}[(r+1)!]^2}{(2r+1)!}$$

сходится абсолютно. Если воспользоваться, (5) и значением интеграла

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2r+1}\varphi d\varphi=\frac{2^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!}$$

то получим

$$A_0=\sum_{r=0}^{\infty}\beta_{2r}\pi^{2r}\frac{(2)^{2r}(r!)^2}{(2r+1)!}=\int_0^{2\pi}f(\pi\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi=f(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}UdU\int_0^{\pi/2}f'(U\sin\varphi)d\varphi dU$$

$$C_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}U\cos kUdU\int_0^{\pi}f'(U\sin\varphi)d\varphi$$

Двойные интегралы дают обычную форму коэффициентов ряда Шлемильха (9).

Аналогично можно исследовать более общие разложения вида

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k J_n(kx)$$

где $J_n(kx)$ – Бесселева функция n-го порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. 1.Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт», 2003-101с.