УДК 519.85

О РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ MICROSOFT EXCEL

В.В. Листопад

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

Аннотация. Реализована возможность получения множества решений двумерной оптимизационной задачи линейного программирования, в случае, когда целевая функция совпадает с границей области допустимых решений, с помощью электронных таблиц Microsoft Excel.

Annotation: Author expose the way of finding of the multiplicity of the solution of the problem of two-dimensional optimization within linear programming, when the objective function corresponds to the limits of the area of candidate solutions, by the means of Microsoft Excel tables.

Оптимизационные методы и модели математического программирования широко используются для решения задач из разных отраслей деятельности (экономической, технологической, управленческой, социальной и т.д.). Произвольная оптимизационная модель состоит из двух частей: целевой функции и ограничений. Целевая функция формализует критерий оптимальности, по которому среди принятых планов выбирается наилучший. Ограничения относительно переменных определяют область допустимых решений.

Активное использование компьютерных технологий при решении оптимизационных задач освобождает от проведения рутинных, трудоемких и чреватых ошибками преобразований, существенно сокращает время нахождения результатов. Достигается существенная экономия времени как при решении задачи, так и при её исследовании. Удобство и простота интерфейса делают работу с программой Microsoft Excel не монотонной рутиной, а увлекательным творческим процессом.

В современных условиях информационного взрыва, стремительного развития и внедрения информационных технологий, всеобщей компьютеризации, проникновения математических методов не только в исследовательскую, но и в производственную деятельность требования к повышению качества преподавания математических дисциплин в вузе существенно возрастают. Перед преподавателем стоит задача: обеспечить усвоение большего объема информации за единицу времени, научить студента логически мыслить, умению использовать полученные знания при решении новых задач.

Цель доклада – представить два способа решения оптимизационной задачи линейного программирования с помощью MS Excel (с помощью функции-оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ и пошаговой реализации симплекс-метода), проиллюстрировать возможность использования этих методов в учебном процессе.

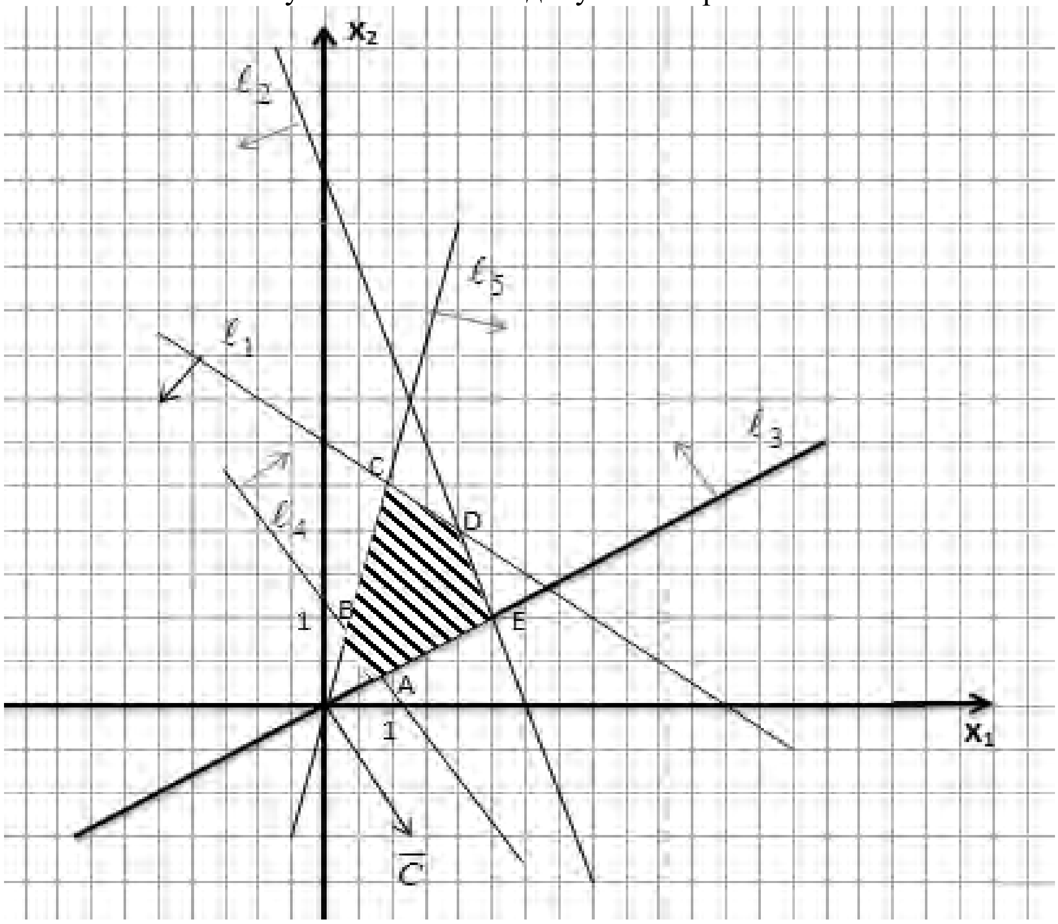
Рассмотрим на примере возможность реализации некоторых методов математического программирования с помощью Microsoft Excel. Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования на плоскости, в которой целевая функция совпадает с границей области допустимых решений (ОДР).

Пример. Найти максимальное значение целевой функции $F = F(x_1, x_2)$ при ограничениях.

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 4x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Решение. (первый метод) Геометрическое решение (см. [1,3]). Преобразуем соотношения-неравенства в равенства и построим прямые. Для построения на каждой прямой определим две точки. В результате, получим область допустимых решений и вектор $\vec{c} = (2; -4)$, указывающий направление возрастания целевой функции F :

Рисунок 1 – Область допустимых решений



На рис.1 $l_1 - l_5$ обозначены прямые, которые соответствуют ограничениям нашей задачи. В результате получим:

$A = l_3 \cap l_4$, $\Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $E = l_3 \cap l_2$, $\Rightarrow E\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}\right)$ (точки A и E получены в результате решения соответствующих систем), а промежуток, который содержит множество решений записывается следующими соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = (1-a)x_{1E} + ax_{1A} \\ x_2 = (1-a)x_{2E} + ax_{2A}, 0 \le a \le 1 \end{cases}$$

в частности для нашего случая

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{36-26a}{15}, \\ x_2 = \dfrac{18-13a}{15}, 0 \le a \le 1. \end{cases}$$

Значение целевой функции $F_{\max} = F\left(\dfrac{36-26a}{15}; \dfrac{18-13a}{15}\right) = 0$.

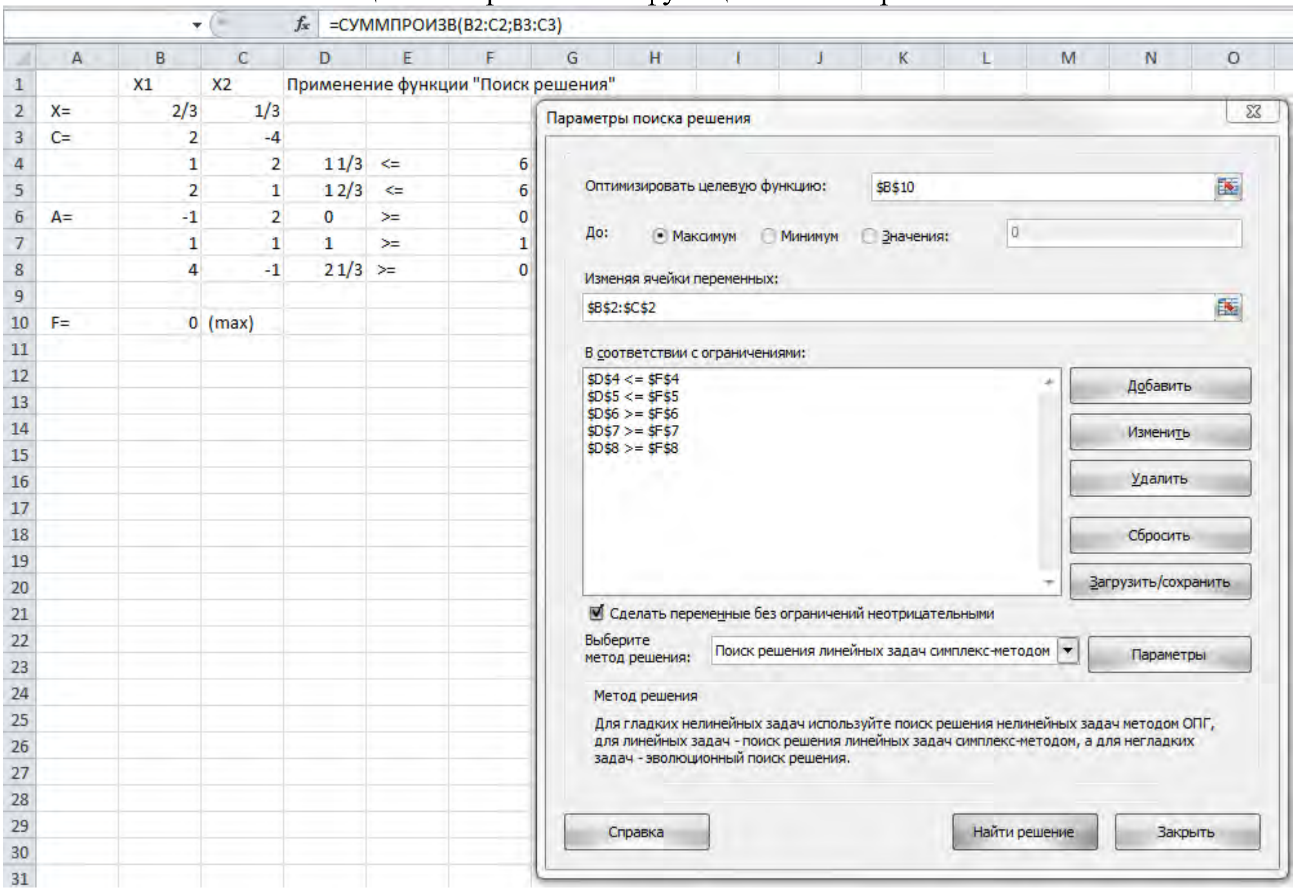
Второй метод. Определим координаты точек-концов промежутка с помощью функции ПОИСК РЕШЕНИЯ из электронных таблиц Microsoft Excel. Если в верхней строчке «Данные» эта функция отсутствует, значит, ее надо активизировать через «Сервис» и «Надстройки». Дадим некоторые разъяснения по формированию таблицы 1. В строчке X (ячейка A2) – координаты неизвестной точки оптимума $X = (x_1, x_2)$; C (ячейка A3) –

коэффициенты целевой функции F, вектор $C=(c_1;c_2)$; матрица А – левая часть соотношений-ограничений данной задачи; в столбике D значения правой части ограничений, вычисленные для фактических значений точки (x_1,x_2) (формулы для вычислений созданы с помощью функции СУММПРОИЗВ). В столбике Е знаки неравенств-ограничений (для напоминания при задании формул-ограничений в «Поиске решения») и в столбике F правые части ограничений нашей задачи. В ячейке В10 создана формула для определения значения целевой функции.

В рабочее окно функции ПОИСК РЕШЕНИЯ вносим все данные задачи (при этом курсор должен находится в ячейке В10, функция F).

Даем команду «Найти решение» (см. таблицу 2) и получаем точку максимума $A=x_{1onm}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, и значение максимума $F_{\max}=0$. Мы получили значение максимума и одну из точек промежутка-решения, который определяет множество решений, но для определения всего множества нужен и второй конец промежутка.

Таблица 1 – Применение функции «Поиск решения»



Из условия задачи видно , что прямая $l_3: -x_1+2x_2=0$ совпадает с целевой функцией $F=2x_1-4x_2$. Зададим коэффициенту 2 прямой l_3 значение $2+\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0$ и ε как угодно малое число (или коэффициенту -1 – значение $-1+\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0$. Этим действием мы вращаем прямую l_3 вокруг точки Е и получаем:

Таблица 2 – Вычисление второй точки – конца промежутка.

	A	B	C	D	E	F
1		X1	X2	Вычисление второй точки -		
2	X=	2 2/5	1 1/5	конца промежутка-решения.		
3	C=	2	-4			
4		1	2	4 4/5	<=	6
5		2	1	6	<=	6
6	A=	-0,999	2	0	>=	0
7		1	1	3 3/5	>=	1
8		4	-1	8 2/5	>=	0
9						
10	F=	0,0048	(max)			

Мы видим, что значение целевой функции изменилось не существенно, но мы получили в решении вторую точку нашего промежутка $E\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5}\right)$. По абсциссах полученных точек, мы видим, что точка А- левый конец промежутка, а точка Е – правый. Имея оба конца промежутка, мы получаем такое же решение как и в графическом методе.

Замечание 1. Аналогичные действия можно производить и с уравнением целевой функцией.

Третий метод. Решим данную задачу с помощью симплекс-метода пользуясь электронными таблицами Ms Excel. Приведем нашу задачу к каноническому виду, вводя дополнительные переменные. Получим:

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6. \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_6 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_7 = -1, \\ \end{cases}$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,7}.$$

Весь процесс вычисления, с пошаговыми итерациями, приведем в таблице 3. Формулы для перехода от одной итерации к следующей (см. [2]) формируются как и в симплекс-методе, но с фиксацией элементов разрешающего столбца (клавиша F4). После создания формул в столбце P_o мы распространяем их (протяжкой) на все ячейки новой таблицы. Для контроля смотрим на разрешающий столбец новой таблицы (там мы должны получить базисный единичный вектор).

В первых двух итерациях применили двоистый симплекс-метод, поскольку в каноническом виде задачи было отрицательное значение правой части. В результатах третьей и четвертой итераций мы получили координаты тех же точек (см. столбец P_o) , что ив предыдущих методах.

Таблица 3 – Решение задачи с помощью симплекс-метода.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Решение задачи с помощью симплекс-метода									
2			0	2	-4	0	0	0	0	0
3	БАЗИС	Сiбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
4	P3	0	6	1	2	1	0	0	0	0
5	P4	0	6	2	1	0	1	0	0	0
6	P5	0	0	1	-2	0	0	1	0	0
7	P6	0	0	-4	1	0	0	0	1	0
8	P7	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	1
9			0	-2	4	0	0	0	0	0
10	P3	0	4	-1	0	1	0	0	0	2
11	P4	0	5	1	0	0	1	0	0	1
12	P5	0	2	3	0	0	0	1	0	-2
13	P6	0	-1	-5	0	0	0	0	1	1
14	P2	-4	1	1	1	0	0	0	0	-1
15			-4	-6	0	0	0	0	0	4
16	P3	0	4,2	0	0	1	0	0	-0,2	1,8
17	P4	0	4,8	0	0	0	1	0	0,2	1,2
18	P5	0	1,4	0	0	0	0	1	0,6	-1,4
19	P1	2	0,2	1	0	0	0	0	-0,2	-0,2
20	P2	-4	0,8	0	1	0	0	0	0,2	-0,8
21			-2,8	0	0	0	0	0	-1,2	2,8
22	P3	0	2 4/5	0	0	3/5	0	1/5	0	4/5
23	P4	0	4 1/3	0	0	0	1	- 1/3	0	1 2/3
24	P6	0	2 1/3	0	0	0	0	1 2/3	1	-2 1/3
25	P1	2	2/3	1	0	0	0	1/3	0	- 2/3
26	P2	-4	1/3	0	1	0	0	- 1/3	0	- 1/3
27			0	0	0	0	0	2	0	0
28	P3	0	5/7	0	0	3/5	- 1/2	1/3	0	0
29	P7	0	2 3/5	0	0	0	3/5	- 1/5	0	1
30	P6	0	8 2/5	0	0	0	1 2/5	1 1/5	1	0
31	P1	2	2 2/5	1	0	0	2/5	1/5	0	0
32	P2	-4	1 1/5	0	1	0	1/5	- 2/5	0	0
33			0	0	0	0	0	2	0	0

Таким образом, использование ИКТ при изучении задач математического программирования обеспечивает повышение компьютерной грамотности студентов и позволяет актуализировать знания по предмету, сделать процесс обучения более разнообразным и эффективным.

Среди существенных преимуществ применения Ms Excel в математическом программировании следует отметить:

– экономию аудиторного времени на практическом (лабораторном) занятии;
– возможность параллельного усвоения теоретического и практического материала данной темы;
– простота и доступность в работе, а также усовершенствование навыков работы с электронными таблицами Ms Excel;

- упрощение механизма осуществления контроля преподавателем за процессом выполнения задачи студентами;
- реализацию междисциплинарных связей;
- возможность использования функции-оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ для проверки и подготовки преподавателем новых учебных заданий для студентов.

Литература

1. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г.,Шумило Н.Я.Математичне програмування та елементи варіаційного числення:Навч.посібник.-К.:Знання,2008.-368с.-(Вища освіта XXI століття).
2. Листопад В.В. Цілочислові методи розв'язування екстремальних задач лінійного програмування в Ms Excel. Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць /Редрада. – К.:НПУ імені М.П.Драгоманова, 2014.– №14(21).– с. 118– 126.
3. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:КНЕУ,2005-452с.