УДК 517.948

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Многие важные практические задачи гидродинамики, теории упругости, теории фильтрации и другие задачи механики и физики приводятся к задаче Коши для линейных и нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений первого порядка с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши (например, [1–3]).

В данной статье рассматривается вопрос о решении методом последовательных приближений задачи Коши для следующего сингулярного интегродифференциального уравнения:

$$u'(x) - \lambda q(x)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}dt = f(x), \qquad (1)$$

где u – неизвестная функция; q, f – известные функции; λ – числовой параметр.

1. Приведение уравнения (1) к функциональному уравнению в банаховом пространстве. Введем оператор

$$K(u) = K(u,x) \equiv \lambda\int_{\xi_0}^{x} q(t)J(u,t)dt, \qquad (2)$$

где

$$J(u,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}dt. \qquad (3)$$

Если искомое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$u(\xi_0) = 0;\ \xi_0 \in [-1, 1], \qquad (4)$$

то (1) можно записать в виде

$$u - K(u) = F;\ F = \int_{\xi_0}^{x} f(t)dt. \qquad (5)$$

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что условие (4) выполняется. В случае, когда оператор $K(u)$ определен в некотором банаховом пространстве, уравнение (5) будет представлять собой функциональное уравнение в этом пространстве.

2. Класс искомых функций. Пусть $\rho(x)$ – заданная на отрезке [–1, 1] положительная непрерывная функция такая, что функция $\frac{1}{\rho(x)}$ интегрируема на отрезке [–1, 1]. Обозначим [3] через C_ρ^1 класс функций, определенных на отрезке [–1, 1] и удовлетворяющих условиям: 1) любая функция этого класса $u(x)$ удовлетворяет условию (4); 2) произведение $u'(x)$ на $\rho(x)$ непрерывно на отрезке [–1, 1]. Нетрудно показать, что класс будет банаховым пространством, если ввести норму

$$\|u\| = \max_{-1\le x\le 1}|\rho(x)u'(x)|. \qquad (6)$$

Когда $\rho(x) \equiv 1$, то класс C_ρ^1 является замкнутым множеством известного класса непрерывно дифференцируемых функций.

3. Приближенное решение уравнения (5). Одним из распространенных методов нахождения решения функциональных уравнений является так называемый метод последовательных приближений [4, с. 213–224]. Применим его к (5). Зададимся произвольным $u_0 \in C_\rho^1$ – начальным приближением и, исходя из него, строим последовательность $\{u_n\}$ приближенных решений

$$u_{n+1} = F + K(u_n),\ n = 0, 1, \ldots . \qquad (7)$$

Если при этом получается сходящаяся последовательность, пределом которой является решение рассматриваемого уравнения, то говорят, что процесс последовательных приближений для (5), начатый с элемента u_0, сходится.

Вопрос о сходимости процесса последовательных приближений для (5) оказывается связанным со сходимостью ряда

$$I + K + \ldots + K^n + \ldots, \qquad (8)$$

сумма которого (в случае сходимости) есть $(I - K)^{-1}$.

Если ряд (8) сходится, то, каково бы ни было начальное приближение u_0, процесс последовательных приближений для уравнения (5) сходится к единственному решению u* этого уравнения. При этом имеет место оценка

$$\|u^* - u_n\| \le \|(I-K)^{-1}\| \|K^n\| \|u_1 - u_0\|,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots . \qquad (9)$$

В частности, если

$$\|K\| \le C \le 1, \qquad (10)$$

то оценка (9) может быть заменена оценкой

$$\|u^* - u_n\| \le \frac{C^n}{1-C}\|u_1 - u_0\|,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

По определению

$$\|Ku\| = |\lambda| \max_{x\in[-1,1]} |\rho(x)q(x)J(u,x)|$$

или если к интегралу (3) применить формулу интегрирования по частям, то

$$\|Ku\| = \frac{|\lambda|}{\pi}\max_{x\in[-1,1]} |\,\rho(x)q(x)[u(1)\ln(1-x) - u(-1)\ln(1+x)] - \rho(x)q(x)\int_{-1}^{1}\rho(t)u'(t)\ln|t-x|\frac{dt}{\rho(t)}\,| . \qquad (11)$$

Так как

$$u(x) = \int_{\xi_0}^{x}\rho(t)u'(t)\frac{dt}{\rho(t)},\quad \xi_0 \in [-1, 1],$$

то

$$|u(1)| \le \left|\int_{\xi_0}^{1}\frac{dt}{\rho(t)}\right| \|u\|_\rho,\ |u(-1)| \le \left|\int_{\xi_0}^{1}\frac{dt}{\rho(t)}\right| \|u\|_\rho .$$

Оценивая правую часть (11), получим

$$\|Ku\| \le \frac{|\lambda|}{\pi}[l_1 p_1 + l_2 p_2 + \rho q b(\rho)]\|u\|_\rho,$$

где

$$l_1 = \max_{x\in[-1,1]} |\rho(x)q(x)\ln(1-x)|,\ l_2 = \max_{x\in[-1,1]} |\rho(x)q(x)\ln(1+x)|;$$

$$p_1 = \left|\int_{\xi_0}^{1}\frac{dt}{\rho(t)}\right|;\quad p_2 = \left|\int_{\xi_0}^{-1}\frac{dt}{\rho(t)}\right|; \qquad (12)$$

$$q = \max_{x\in[-1,1]} |q(x)|;\ \rho = \max_{x\in[-1,1]} |\rho(x)|;$$

$$b(\rho) = \max_{x\in[-1,1]} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|\ln|t-x||\frac{dt}{\rho(t)}.$$

Следовательно, если

$$|\lambda| < \frac{\pi}{l_1 p_1 + l_2 p_2 + \rho q b(\rho)},$$

то в неравенстве (10) можно положить

$$C = \frac{|\lambda|}{\pi}[l_1 p_1 + l_2 p_2 + \rho q b(\rho)].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются соотношения*

$$|\lambda| \le \lambda_0 < \frac{\pi}{l_1 p_1 + l_2 p_2 + \rho q b(\rho)} = \frac{1}{B}.$$

Тогда последовательность (7) при любой функции $u_0 \in C_\rho^1$ *сходится к единственному решению уравнения (1) u*. При этом имеет место оценка*

$$\|u^* - u_n\| \le \frac{\lambda_0^n B^n}{1-\lambda_0 B}\|u_1 - u_0\|,\quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (13)$$

Примечание. Если

$$u_0(x) = F(x) = \int_{\xi_0}^{u} f(t)dt,$$

то

$$\|u_1 - u_0\| = \|Ku_0\| \le |\lambda||B|\|f\|.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (13), получаем неравенство

$$\|u^* - u_n\| \le \frac{\lambda_0^{n+1} B^{n+1}}{1-\lambda_0 B} \max_{x\in[-1,1]} |\rho(x) f(x)|. \quad (14)$$

Приведем значения величин $b(\rho)$, определенных формулой (12) для различных классов C_ρ^1:

1) $\rho(x) \equiv 1, \quad b(\rho) = \frac{2}{\pi};$

2) $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad b(\rho) = 3\ln 2;$

3) $\rho(x) = \sqrt{1 \pm x}, \quad b(\rho) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(2 + \ln 2).$

Покажем, например, как находится значение величины $b(\rho)$ в случае, когда $\rho(x) \equiv 1$. В этом случае

$$b(\rho) = \frac{1}{\pi} \max_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} |\ln|t-x||dt. \quad (15)$$

Заметим, что функция

$$I(x) = \int_{-1}^{1} |\ln|t-x||dx \quad (16)$$

является четной. Положим $0 \le x \le 1$ и преобразуем интеграл (15)

$$I(x) = \int_{-1}^{0} |\ln|t-x||dt + \int_{0}^{1} |\ln|t-x||dt =$$

$$= -\int_{-1}^{0} |\ln|t+x||dt - \int_{0}^{1} |\ln|t-x||dt =$$

$$= -\int_{0}^{1-x} \ln(t+x)dt + \int_{1-x}^{1} \ln(t+x)dt - \int_{0}^{1} \ln|t-x|dt.$$

После исследования функции

$$I(x) = 2 - 2x + \ln\frac{1+x}{1-x} + x\ln(1-x^2), \; x \in [0, 1]$$

находим, что

$$\max_{x\in[-1,1]} I(x) = I(0) = 2. \quad (17)$$

Из соотношений (15)–(17) получаем $b(\rho) = \frac{2}{\pi}$.

Последовательность (7) на каждом шаге дает приближенное решение уравнения (11) с оценками погрешности (13), (14).

4. Применение метода последовательных приближений к решению одного интегрального уравнения с логарифмическим ядром. Попутно исследуем интегральное уравнение, имеющее приложения в механике [5]:

$$u(x) - \lambda q(x)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u(t)\ln|t-x|dt = f(x), \quad (18)$$

где q и f – известные непрерывные на промежутке [–1, 1] функции; u – неизвестная функция.

Введем оператор

$$K(u) = K(u,x) \equiv \lambda\frac{q(x)}{\pi}\int_{-1}^{1} u(t)\ln|t-x|dt.$$

Тогда интегральное уравнение (18) приводится к функциональному уравнению

$$u - K(u) = f. \quad (19)$$

Относительно искомой функции $u(x)$ будем предполагать, что $u(x) \in C$, т. е. она непрерывна на промежутке [–1, 1]. Норма определяется равенством

$$|u| = \max_{x\in[-1,1]} |u(x)|.$$

Будем искать решение уравнения (19) методом последовательных приближений, т. е. как предел последовательности

$$u_{n+1} = f + K(u_n), \; n = 0, 1, \ldots \quad (20)$$

где u_0 – заданная функция.

Рассмотрим вопрос о сходимости последовательности (20)

$$\|K(u)\| \le |\lambda|\frac{q}{\pi}\left(\max_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} u(t)|\ln|t-x||dt\right)\|u\|,$$

где $q = \max\limits_{x \in [-1,1]} |q(x)|$. Учитывая (17), получаем неравенство

$$\|K(u)\| \le |\lambda| \frac{q}{\pi} |u|,$$

с помощью которого легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть выполняется неравенство* $|\lambda| \le \lambda_0 < \dfrac{\pi}{2q}$. *Тогда последовательность (20) при любой функции* $u_0 \in C^*$ *сходится к единственному решению уравнения (18)* u^*. *При этом имеет место оценка*

$$\left|u^* - u\right| \le \frac{\lambda_0 \left(\dfrac{2q}{\pi}\right)^n}{1 - \lambda_0 \dfrac{2q}{\pi}} \max_{x \in [-1,1]} \left|u_1(x) - u_0(x)\right|. \quad (21)$$

Примечание. Если $u_0(x) = f(x)$, то неравенство (21) можно записать в виде

$$\left|u^*(x) - u_n(x)\right| \le \frac{\lambda_0^{n+1} \left(\dfrac{2q}{\pi}\right)^{n+1}}{1 - \lambda_0 \dfrac{2q}{\pi}} \max_{x \in [-1,1]} \left|f(x)\right|. \quad (22)$$

Последовательность (20) на каждом шаге дает приближенное решение уравнения (18) с оценками погрешности (21), (22).

ВЫВОД

Методом последовательных приближений проведено исследование одного сингулярного интегродифференциального уравнения с интегралом, понимаемым в смысле главного значения по Коши, и одного интегрального уравнения с логарифмическим ядром. Соответствующие итерационные последовательности дают приближенные решения таких уравнений с оценками погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуревич, М. И.** Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
2. **Пыхтеев, Г. Н.** Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения / Г. Н. Пыхтеев // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 2. – С. 32–44.
3. **Пыхтеев, Г. Н.** Некоторые методы решения одного нелинейного интегродифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости / Г. Н. Пыхтеев // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 2. – С. 72–86.
4. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
5. **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.

Поступила 14.04.2008

УДК 629.11.001.24:531.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА

Канд. техн. наук, доц. ЧЕПЕЛЕВА Т. И.

Белорусский национальный технический университет

Метод математического моделирования успешно используется для задач, возникающих при проектировании производства и производственных процессов. При установке нового оборудования могут быть кратковременные сбои производства. Сбои производства могут быть и по ряду других причин – выход из строя оборудования, перегрузка складов и т. п. Наиболее важной задачей на стадии проектирования производственного комплекса является за-