Белорусский национальный технический университет, Минск

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭНДОПРОТЕЗА НА УСТОЙЧИВОСТЬ И РАБОТОСПОСОБНОСТЬ СИСТЕМЫ «КОСТЬ-ИМПЛАНТАНТ»

Куриленко А.В.

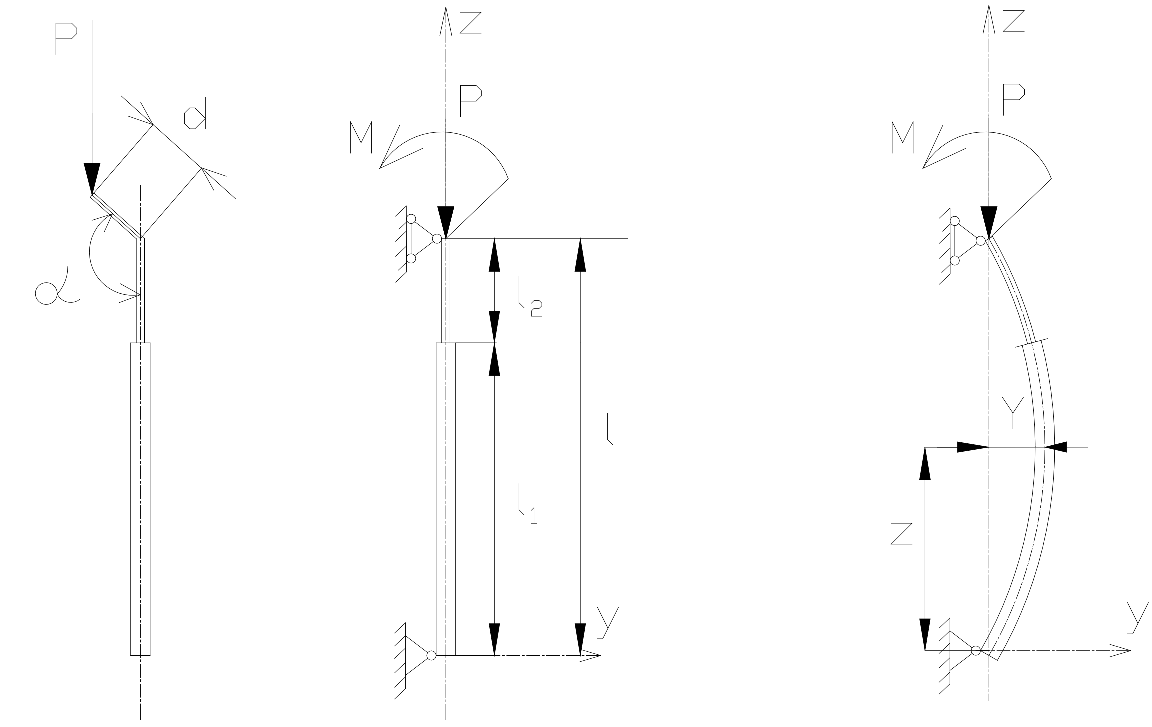
In this article the system stability «bones- implant» has been under consideration.

Эндопротезирование тазобедренного сустава является эффективным и часто единственным способом восстановления утраченной функции конечности. Поэтому необходимо изучение поведения системы «кость-имплантант», как единого целого.

В данной работе в первом приближении решается задача об устойчивости системы «кость-имплантант». Нас интересует влияние физико-механических свойств титанового имплантанта и его геометрических размеров на потерю устойчивости.

На рис. 1 приведено схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант». Изобразим тазобедренную кость с имплантантом под действием приложенной нагрузки P, для этого разделим ее на два участка. На основании рис. 1 определяем момент M:

$$M = Pd \sin\alpha. \quad (1)$$



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант»

Запишем физико-механические и геометрические характеристики кости и имплантанта. Кость: $E_1 = 10^{10}\,Па \quad I_1 = 2{,}5 см^4 \quad l_1 = 45 см \quad d_1 = 2{,}7 см$. Имплантант: $E_2 = 1{,}1 \cdot 10^{11}\,Па \quad I_2 = 0{,}14 см^4 \quad l_2 = 15 см \quad d_2 = 1{,}3 см$.

Составим два дифференциальных уравнения изгиба для имплантанта и кости соответственно:

$$1.7E_2I_2y_1'' + Py_1 = 0, \qquad (1)$$

$$E_2I_2y_2'' + Py_2 + M = 0, \qquad (2)$$

где $E_1I_1 / E_2I_2 = 1{,}7$ – отношение жесткостей в системе «кость-имплантант» при изгибе.

Обозначим: $P / 1{,}7E_2I_2 = k^2$; $a = \dfrac{M}{1{,}7E_2I_2}$. (3)

Перепишем дифференциальные уравнения в виде:

$$y_1'' + k^2 y_1 = 0, \qquad (1')$$

$$y_2'' + (1{,}33k)^2 y_2 + a = 0. \qquad (2')$$

Решения уравнений (1') и (2') имеют вид:

$$y_1 = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz, \qquad (3)$$

$$y_2 = c_3 \sin 1{,}33kz + c_4 \cos 1{,}33kz + y_2^*. \qquad (4)$$

Находим частное решение y_2^*=const:

$$(1{,}33k)^2 y_2^* + a = 0;$$

$$y_2^* = -\frac{a}{(1{,}33k)^2} = -\frac{M}{1{,}7E_2I_2 \cdot 1{,}33^2 k^2} = -\frac{M \cdot 1{,}7E_2I_2}{1{,}7E_2I_2 \cdot 1{,}33^2 P} = -\frac{0{,}57M}{P} = -0{,}57d \sin\alpha \text{ С}$$

учетом этого перепишем (3) и (4):

$$y_1 = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz, \qquad (3')$$

$$y_2 = c_3 \sin 1{,}33kz + c_4 \cos 1{,}33kz - 0{,}57d \sin\alpha. \qquad (4')$$

Запишем граничные условия:

$$z = 0: \quad y_1 = 0,$$

$$z = \frac{3}{4}l: \quad y_1 = y_2,$$

$$z = \frac{3}{4}l: \quad y_1' = y_2',$$

$$z = l: \quad y_2 = 0.$$

Из первого начального условия получаем $c_2 = 0$, а для оставшихся выписываем соответственно три уравнения:

$$c_1 \sin\frac{3}{4}kl = c_3 \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l + c_4 \cos 1{,}33k\frac{3}{4}l - 0{,}57d\sin\alpha,$$

$$\frac{3}{4}c_1 \cos\frac{3}{4}kl = c_3 \cos 1{,}33k\frac{3}{4}l - c_4 \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l,$$

$$c_3 \sin 1{,}33kl + c_4 \cos 1{,}33kl - 0{,}57d\sin\alpha = 0.$$

Решим данную систему уравнений методом Гаусса.

Подставим числа:

$$k^2 = \frac{P}{1{,}7E_2I_2} = \frac{P}{E_1I_1} = \frac{750}{10^{10} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8}} = 5, \; k = \sqrt{5} = 2{,}24 \text{ м}^{-1};$$

$$l = 0{,}6 \text{ м}; \; kl = 1{,}344.$$

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} 0{,}85c_1 - 0{,}98c_3 - 0{,}22c_4 = -b \\ 0{,}4c_1 - 0{,}22c_3 + 0{,}98c_4 = 0 \\ 0{,}98c_3 - 0{,}22c_4 = b \end{cases}.$$

Решив ее, находим $c_1 = 0{,}058d\sin\alpha$; $c_3 = 0{,}112d\sin\alpha$; $c_4 = 0{,}606d\sin\alpha$.

Подставляя исходные данные окончательно получим:

$$y = \begin{cases} 0{,}058d\sin\alpha\sin 2{,}24z \quad \textit{при}\ 0 \le z \le \frac{3}{4}l \\ d\sin\alpha(0{,}606\sin 2{,}98z + 0{,}112\cos 2{,}98z - 0{,}57) \quad \textit{при}\ \frac{3}{4}l \le z \le l \end{cases}. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет найти опасное сечение, где $M = M_{\max}$, и оценить работоспособность системы в зависимости от d и α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун П.И. Шукейло Ю.А. Биомеханика: Учебник для вузов.-СПб.:Политехника, 2000.-463с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформированных систем.-М: Наука, 1967.-984с.